

УДК 004

DOI: 10.18101/978-5-9793-1626-0-144-150

ЭМПИРИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА И ОЦЕНКА ЕЕ ПАРАМЕТРОВ

© **Жанцансамбуугийн Дашдэмбэрэл**

преподаватель кафедры информатики,
Институт математики и естествознания,
Монгольский государственный университет образования
Монголия, 210648, г. Улан-Батор, ул. Бага тойруу, 14
E-mail: dashdemberel@msue.edu.mn

© **Дамдинсүрэнгийн Бүрэн-Арвижих**

преподаватель кафедры информационных технологий,
Институт естествоведения и технологий,
Ховдский государственный университет
Монголия, 84000, Ховд аймаг, Жаргалант сум
E-mail: dashdemberel@yahoo.com

© **Цыбикова Туяна Сандаликовна**

кандидат педагогических наук, доцент
кафедры вычислительной техники и информатики,
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: cts2001@mail.ru

Аннотация. В настоящей статье рассматривается оценка параметров, при которой используют принцип самого наименьшего квадрата. При оценке параметров учитывается следующее: когда взаимозависимость двух величин дается в виде какой-то эмпирической формулы, то при помощи значений, полученных в результате наблюдения, эксперимента, измерения, составляется избыточная система уравнений, зависящая от данных параметров. При создании программного кода используется принцип наименьшего квадрата для получения нормальной системы.

Ключевые слова: эмпирическая формула, избыточная система, нормальная система, приближительный результат

Для цитирования

Дашдэмбэрэл Ж., Бүрэн-Арвижих Д., Цыбикова Т. С. Эмпирическая формула и оценка ее параметров // Информационные системы и технологии в образовании, науке и бизнесе: материалы региональной научно-практической конференции с международным участием (Улан-Удэ, 1 июля 2021 г.) / отв. ред. А. А. Тонхонова, науч. ред. Е. Р. Урмакшинова. Улан-Удэ: Изд-во Бурят. гос. ун-та, 2021. С. 144–150.

Теоретическая часть

С целью установить взаимозависимость любых двух величин в статическом и естествоведческом исследовании находят парные значения $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ (1) на основе наблюдения, эксперимента и измерения.

Например, x — количество молодняка какого-нибудь вида скота, y — число самок или x — количество осадков, y — урожай, x — нагрузка пастбища, y —

число поголовья скота. Путем анализа результатов эксперимента можем предложить гипотезу о взаимозависимости между ними и об их законе.

Например, взаимозависимость величин x, y может быть дана одной из следующих формул: $y = ax + b$; $y = a + \frac{b}{x}$; $y = \frac{b}{x}$; $y = \frac{b}{x^2}$; $y = a + b\sqrt{x}$;
 $y = a + \frac{b}{\sqrt{x}}$; $y = \frac{a}{1+bx}$; $xy + ax + by = 0$; $y = ax + bx^2$; $y = ax^2 + bx + c$; $y = ax^k$;
 $y = ae^{bx}$; $y = a^{bx+c}$ ($a > 0$) ; $y = 10^{bx+c}$; $y = \frac{1}{ax+b}$; $y = \frac{1}{ax^2+bx+c}$; $y = \frac{1}{ax+bx} + c$;
 $y = (x - a_1)^{\alpha_1} (x - a_2)^{\alpha_2}$ и т. д.

Каждая формула имеет неопределенные параметры a, b, c . С другой стороны, данные формулы в зависимости от параметров, определенных при помощи приблизительных результатов, найденных в результате измерения, приблизительно выражают взаимозависимость x, y . Формулы с подобным качеством называют эмпирическими. Графику, которая определяется эмпирической формулой, называют кривой регресса.

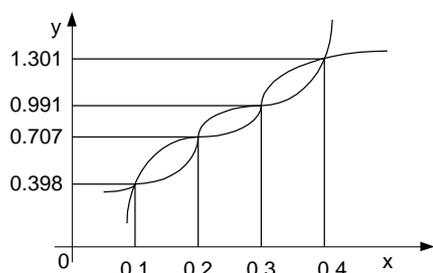
Эмпирическая формула иногда называется как уравнение регресса. Особенность эмпирической формулы состоит в том, что она постоянно исправляется и улучшается. Вопрос об оценке неизвестных коэффициентов (параметров), входящих в состав эмпирической формулы, позволяет приблизительно найти результат избыточной системы, используя эксперимент (1).

Например, представим, что путем измерения величин x, y найдены парные значения x, y (0.1;0.398), (0.2;0.707), (0.3; 0.991), (0.4;1.304). Определим взаимозависимость между величинами x, y анализируя результат эксперимента.

Решение. Прежде всего здесь наблюдается, что при увеличении значения x увеличивается и значение y .

| | | | | |
|-----|-------|-------|-------|-------|
| x | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |
| y | 0.398 | 0.707 | 0.991 | 1.301 |

Расположим парные значения (x_i, y_i) на плоскости координат.



По рисунку видно, что при увеличении значений x значения y увеличиваются, также наблюдается возможность соединить изображенные 4 точки прямой. С другой стороны, прямая есть графика функции. Поэтому взаимозависимость между x, y приблизительно линейна зависимости. Отсюда можем делать вывод, что получается эмпирическая формула $y = ax + b$ [1].

Сейчас, используя материал эксперимента, найдем значения параметров a, b . Если, используя данные значения, составим избыточную систему,

$$\text{зависящую от } a, b, \text{ получим систему } \begin{cases} 0.1a + b = 0.398 \\ 0.2a + b = 0.707 \\ 0.3a + b = 0.991 \\ 0.4a + b = 1.301 \end{cases}$$

Чтобы найти ее приближительный результат, используем принцип самого наименьшего квадрата при составлении нормальной системы и тогда получим $\begin{cases} 0.3a + b = 0.999 (\approx 1) \\ 0.2a + b = 0.707 (\approx 3.4) \end{cases}$ [2].

В случае использования алгоритма для получения приближительного результата нормальной системы получится $a = 3; b = 0.1$ [3]. Здесь взаимозависимость между x, y приблизительно $y \approx 3x + 0.1$.

Пример: найдите параметры a, b в эмпирической формуле $y = \frac{x^2}{a + bx + x^2}$, используя данные парные значения x, y .

Даны парные значения: (1; 0.1818), (1.2; 0.2202), (1.4; 0.2558), (1.6; 0.2889), (2; 0.3478), (2.1; 0.3612)

Решение: $y = \frac{x^2}{a + bx + x^2}$ напишем в форме $a + bx = \frac{x^2}{y} - x^2$ и отметим

$Y = \frac{x^2}{y} - x^2$, составим уравнение $a + bx = Y$. Вместо x, Y поставим соответствующие значения и для a, b составим избыточную систему.

$$\begin{cases} a + b = 5.5005 - 1 \\ a + 1.2b = 6.5395 - 1.44 \\ a + 1.4b = 7.6622 - 1.96 \\ a + 1.6b = 8.8612 - 2.56 \\ a + 2b = 11.5009 - 4 \\ a + 2.1b = 12.2127 - 4.41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 4.5005 \\ a + 1.2b = 5.0995 \\ a + 1.4b = 5.7022 \\ a + 1.6b = 6.3012 \\ a + 2b = 7.5009 \\ a + 2.1b = 7.8027 \end{cases} \text{ Получена избыточная система.}$$

Если составить нормальную систему

$$\begin{cases} 6a + (1 + 1.2 + 1.4 + 1.6 + 2 + 2.1)b = (4.5005 + 5.0995 + 5.7022 + 6.3012 + 7.5009 + 7.8027) \\ 9.3a + (2.44 + 5.96 + 1.6^2 + 2.1^2)b = (4.5005 + 6.1194 + 7.9831 + 10.0819 + 15.0018 + 16.3857) \end{cases}$$

получается нормальная система $\Rightarrow \begin{cases} 6a + 9.3b = 36.907 \\ 9.3a + 15.37b = 60.0724 \end{cases}$

Если убрать переменные, будет $\begin{cases} a + 1.55b = 6.1512 \\ 0.955b = 2.8665 \end{cases}$. Отсюда результат

системы: $b = \frac{2.8665}{0.955} \approx 3.0016 \approx 3, a = 6.1512 - 1.55 \cdot 3.0016 \approx 1.4987 \approx 1.5$

Поэтому эмпирическая формула получится таким образом: $y = \frac{x^2}{1.5+3x+x^2}$.

Если взаимозависимость между x, y нелинейная или многочленная, то параметры (коэффициенты) можем найти, преобразуя данную эмпирическую формулу в линейную или многочленную форму и используя принцип наименьшего квадрата.

Примеры:

1. Если эмпирическая формула имеет форму $y = a + \frac{b}{x}$, ее преобразуем в $yx = ax + b$. Если отметим $yx = Y, x = X$, то переходит в форму $Y = aX + b$. После этого, используя результат эксперимента, как в предыдущем примере, находим a, b . Если поменяем $Y - yx, X - x$ обратно, то получится эмпирическая формула.

2. Если $y = a + b\sqrt{x}$, то отметим $y = Y, \sqrt{x} = X$ и переводим в форму $Y = a + bX$ и найдем a, b .

В конце, если заменить $Y - y, X - \sqrt{x}$, получится эмпирическая формула.

3. Если $y = e^{ax+b}$ и превратим $\ln y = ax + b$ и отметим $\ln y = Y, x = X$, то получится $Y = aX + b$.

4. Если $y = 10^{ax^2+bx+c}$ и превратим $\lg y = ax^2 + bx + c$ и отметим $\lg y = Y, x = X$, тогда $Y = aX^2 + bX + c$

5. Если $y = a + \frac{b}{xz} + cx^2$ и превратим $yxz = axz + b + cx^3z$ и отметим $yxz = Z, xz = X, cx^3z = Y$, то будет $Z = b + aX + cY$.

С целью показать практическое применение подведем итог переучета поголовья скота Монголии в 2003–2010 гг.¹

Таблица 1

Результат переучета поголовья скота (2003–2010)

| | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 |
|-------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Сумма | 25427.7 | 28027.9 | 30398.8 | 34802.9 | 40263.8 | 43288.5 | 44023.9 | 32729.5 |
| Верблюды | 256.7 | 256.6 | 254.2 | 253.5 | 260.6 | 266.4 | 277.1 | 269.6 |
| Конь | 1968.9 | 2005.3 | 2029.1 | 2114.8 | 2239.5 | 2186.9 | 2221.3 | 1920.3 |
| Корова, бык | 1792.8 | 1841.6 | 1963.6 | 2167.9 | 2425.8 | 2503.4 | 2599.3 | 2176.0 |
| Овец | 10756.4 | 11686.4 | 12884.5 | 14815.1 | 16990.1 | 18362.3 | 19274.7 | 14480.4 |
| Коза | 10652.9 | 12238.0 | 13267.4 | 15451.7 | 18347.8 | 19969.4 | 19651.5 | 13883.2 |

Отсюда проанализируем взаимозависимость поголовья всего скота и поголовья козы.

¹Монгол улсын үндэсний статистикийн хороо. Статистикийн бюллетень 2010. 12 сар; Монгол улсын үндэсний статистикийн хороо. “Хөдөө аж ахуйн салбар — 2007 онд” нэгдсэн мэдээлэл; Монгол улсын үндэсний статистикийн хорооны вэб хуудас. URL: <http://www.nso.mn>.

Таблица 2

Общее количество поголовья скота Монголии и поголовья козы (2003–2010)

| | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 |
|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Сумма | 25427.7 | 28027.9 | 30398.8 | 34802.9 | 40263.8 | 43288.5 | 44023.9 | 32729.5 |
| Коза | 10652.9 | 12238.0 | 13267.4 | 15451.7 | 18347.8 | 19969.4 | 19651.5 | 13883.2 |

Используя вышеприведенные данные, построим график, проведем наблюдение и получим взаимозависимость двух показателей.

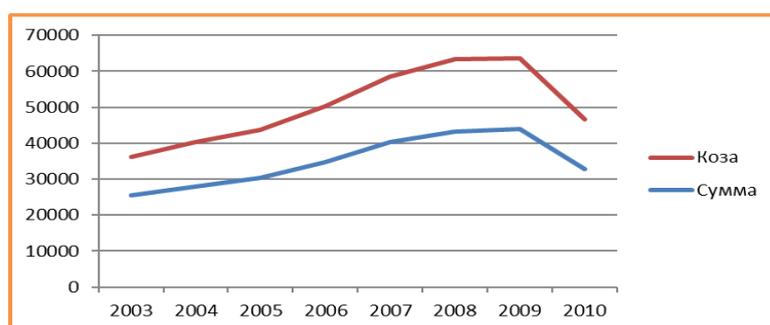


График 1. Количество поголовья козы

По графику 1 ясно, что число всего поголовья скота прямо пропорционально числу поголовья козы, так общее количество скота отметим y , количество поголовья козы – x . Зависимость этих двух величин выражается уравнением $y = ax + b$.

Если при помощи данных из таблицы 2 составим избыточную систему уравнений, то получим

$$\begin{cases} 10652.9a + b = 25427.7 \\ 12238.0a + b = 28027.9 \\ 13267.4a + b = 30398.8 \\ 15451.8a + b = 34802.9 \\ 18347.8 + b = 40263.9 \\ 19969.4a + b = 43288.5 \\ 19651.5a + b = 44023.9 \\ 13883.2a + b = 32729.5 \end{cases}$$

Отсюда, если при помощи программы составить нормальную систему избыточной системы, используя принцип наименьшего квадрата, то получится нормальная система $\begin{cases} 1992378344.1a + 123462.0b = 4477689896.4 \\ 123462.0a + 8.0b = 278963.1 \end{cases}$

Решим систему методом Гаусса и найдем результат.

Получится система, где убраны переменные $\begin{cases} a + 0.0001b = 2.2474 \\ 0.3494b = 1493.4359 \end{cases}$, получатся результаты: $a = 1.9826$; $b = 4274.1376$. Взаимозависимость общего количества поголовья всего скота и поголовья козы будет охарактеризоваться уравнением $y = 1.9826x + 4274.1376$.

Выводы

В зависимости от значений данных, определенных результатами любого эксперимента, наблюдения, измерения, выразив зависимость между величинами в виде содержащихся в них параметров и оценивая их значения, быстро и безошибочно сможем выполнить процесс расчета. При этом можем пользоваться программами [2; 3], при составлении которых используем алгоритмы, чтобы точно выявить зависимость между величинами, составить избыточную систему в познавательном процессе, составить ее нормальную систему, получить приближительный результат нормальной системы.

Анализ переучета поголовья скота Монголии показывает, что число поголовья всего скота прямо пропорционально числу поголовья козы. Зависимость данных двух показателей определяется уравнением : $y = ax + b$ или $y = 1.9826x + 4274.1376$.

В случае если зависимость между величинами дана в пяти видах, ее возможно решить, переводя ее в линейную форму.

Литература

1. Дринфельд Г. И. Интерполирования и способ наименьших квадратов. Киев: Вища школа, 1984. 103 с. Текст: непосредственный.
2. Бүрэн-Арвижих Д. Илүүдэлтэй систем ба хамгийн бага квадратын зарчим // Материалы IX международной конференции. Том II. Ховд-Томск, 2009. С. 350. Текст: непосредственный.
3. Бүрэн-Арвижих Д., Минжирмаа Р. Нормаль системийг ойролцоогоор бодох алгоритм // ХИС. БУФ. Эрдэм шинжилгээний бичиг № 2(14). Улаанбаатар, 2009. С. 3–6. Текст: непосредственный.

EMPIRICAL FORMULA AND EVALUATION OF ITS PARAMETERS

Dashdemberel Jantsansambuу

Lecturer, Department of Computer Science,
Institute of Mathematics and Natural Sciences,
Mongolian State University of Education
14 Baga toyruu St., Ulan Bator 210648, Mongolia
E-mail: dashdemberel@msue.edu.mn

Buren-Arvijikh Damdinsuren

Lecturer, Department of Information Technology,
Institute of Natural Sciences and Technology,
Howd State University
Khovd aimag, Zhargalant sum 84000, Mongolia
E-mail: dashdemberel@yahoo.com

Tuyana S. Tsybikova

Cand. Sci. (Education), A/Prof.,
Department of Computer Science and Informatics,
Dorzhi Banzarov Buryat State University
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia
E-mail: cts2001@mail.ru

Abstract. In statistics, regression analysis includes any techniques for modeling and analyzing several variables, when the focus is on the relationship between a dependent variable and one or more independent variables. More specifically, regression analysis helps one understand how the typical value of the dependent variable changes when any one of the independent variables is varied, while the other independent variables are held fixed. to create a program, the principle of the smallest square is used to obtain a normal system.

Keywords: empirical formula, redundant system, normal system, approximate result