УДК 517.977
doi: 10.18101/978–5–9793–0814–2–251–253

Проекционная процедура нелокального улучшения в полиномиальных по состоянию системах с частично закрепленным правым концом*

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-01-03680-а)

© **Трунин Дмитрий Олегович**
кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры прикладной математики Бурятского государственного университета, г. Улан-Удэ

В статье предлагается проекционная процедура нелокального улучшения допустимых управлений в классе полиномиальных по состоянию задач оптимального управления с частично закрепленным правым концом. Нелокальность улучшения достигается за счет решения специальной краевой задачи, которая существенно проще, чем краевая задача принципа максимума.
Ключевые слова: задача оптимального управления, нелокальное улучшение, проекционная процедура.

Projective procedure for nonlocal improving in polynomial systems with the partially fixed right end

Dmitrii O. Trunin
PhD in Physics and Mathematics, Senior Lecturer, Ulan-Ude, Buryat State University, Department of Applied Mathematics

In this article the non-local procedure for control improvement in polynomial on state problems with partially fixed right end based on projective operation is proposed. Nonlocal improving achieved to solving special boundary value problem, which is more simple, than boundary value problem of maximum principle.
Keywords: optimal control problem, nonlocal improving, projective procedure.

Введение

В [1] для полиномиальных по состоянию задач оптимального управления со свободным правым концом построены методы нелокального улучшения управлений, основанные на нестандартных формулах приращения функционала без остаточных членов разложений. В данной статье предлагается процедура нелокального улучшения допустимых управлений в классе полиномиальных по состоянию задач оптимального управления с частично закрепленным правым концом на основе операции проектирования.

1. Постановка задачи

Рассмотрим полиномиальную по состоянию и линейную по управлению задачу оптимального управления

$$\dot{x} = A(x,t)u + b(x,t), \;\; t \in T = t_0, \, t_1 \;, \;\; x(t_0) = x^0, \tag{1}$$

$$u(t) \in U, \;\; t \in T = t_0, \, t_1 \;, \tag{2}$$

$$\Phi(u) = \langle c, x(t_1) \rangle \to \min, \tag{3}$$

$$x_1(t_1) = x_1^1, \tag{4}$$

в которой $x = \; x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ – вектор состояния, $u = \; u_1(t), u_2(t), ..., u_m(t)$ – вектор управления, интервал *T* фиксирован, $x^0 \in R^n$, $c = \; c_1, c_2, ..., c_n$ – заданные векторы, $c_1 = 0$, $x_1^1 \in R$, матричная функция *A*(*x*, *t*) и вектор-функция *b*(*x*, *t*) являются полиномиальными по *x* степени $l \geq 1$ с коэффициентами, непрерывно зависящими от *t* на $R^n \times T$.

В качестве доступных управлений рассматривается множество кусочно-непрерывных функций со значениями в компактном множестве $U \subset R^m$

$$V = \; u \in PC^m(T) : u(t) \in U, \; t \in T \;.$$

Для доступного управления $u \in V$ обозначим $x(t,u),\ t \in T$ – решение задачи Коши (1) при $u = u(t),\ t \in T$.

Определим множество допустимых управлений

$$W = \ u \in V : x_1(t_1,u) = x_1^1 \ .$$

Для задачи (1)–(4) функция Понтрягина с сопряженной переменной $p \in R^n$ имеет вид

$$H(p,x,u,t) = H_0(p,x,t) + \langle H_1(p,x,t),u \rangle,$$

где $H_0(p,x,t) = \langle p,\ b(x,t) \rangle$, $H_1(p,x,t) = A(x,t)^T p$.

Рассмотрим нормальный функционал Лагранжа

$$L(u,\lambda) = \langle c, x(t_1) \rangle + \lambda \ \ x_1(t_1) - x_1^1 \ \ ,\ \lambda \in R .$$

Пусть $\ u^0, v \ $ – пара доступных управлений. Приращение функционала Лагранжа в соответствии с [1] имеет вид

$$\Delta_v L(u^0,\lambda) = -\int_T \langle H_1(p(t,u^0,v,\lambda), x(t,v),t), v(t) - u^0(t) \rangle dt, \tag{5}$$

где $p(t,u^0,v,\lambda)$ – решение модифицированной сопряженной системы

$$\dot{p} = -H_x - \frac{1}{2!}\langle H_x, z \rangle_x - \ldots - \frac{1}{l!}\langle \ldots \langle \langle H_x, z \rangle_x, z \rangle_x \ldots, z \rangle_x, \tag{6}$$

$$p_1(t_1) = -\lambda, \tag{7}$$

$$p_i(t_1) = -c_i,\ \ i = \overline{2,n}, \tag{8}$$

где частные производные по x подсчитываются при значениях аргументов $x = x(t,u^0)$, $u = u^0(t)$ и $z = x(t,v) - x(t,u^0)$.

Для управления $u^0 \in V$ построим вектор-функцию

$$u^\alpha(p,x,t) = P_U \ \ u^0(t) + \alpha H_1(p,x,t) \ \ ,\ p \in R^n,\ x \in R^n,\ \alpha > 0,$$

где P_U – оператор проектирования на множество U в евклидовой норме.

Функция $u^\alpha(p,x,t)$ непрерывна по совокупности (p, x) на $R^n \times R^n$ и кусочно-непрерывна по $t \in T$, причем имеет место оценка [1]

$$\langle H_1(p,x,t),\ u^\alpha(p,x,t) - u^0(t) \rangle \geq \frac{1}{\alpha} \| u^\alpha(p,x,t) - u^0(t) \|^2 . \tag{9}$$

2. Процедура нелокального улучшения

Поставим задачу улучшения управления $u^0 \in W$: найти управление $v \in W$ со свойством $\Phi(v) \leq \Phi(u^0)$.

Процедура нелокального улучшения.

2.Для заданного $\alpha > 0$ найдем решение $\ x(t), p(t)\ ,\ t \in T$ краевой задачи

$$\dot{x} = A(x,t)u^\alpha(p,x,t) + b(x,t),\ \ t \in T,$$

$$x(t_0) = x^0, x_1(t_1) = x_1^1, \tag{10}$$

$$\dot{p} = -H_x - \frac{1}{2!}\langle H_x, z \rangle_x - \ldots - \frac{1}{l!}\langle \ldots \langle \langle H_x, z \rangle_x, z \rangle_x \ldots, z \rangle_x,$$

$$p_i(t_1) = -c_i,\ \ i = \overline{2,n},$$

где частные производные по x подсчитываются при значениях аргументов $x = x(t,u^0)$, $u = u^0(t)$ и $z = x(t) - x(t,u^0)$.

3.Сформируем управление

$$v(t) = u^{\alpha}(p(t), x(t), t),\ t \in T.$$

Предположим, что решение $x(t), p(t)$, $t \in T$ краевой задачи (10) (возможно, не единственное) существует на T.

Понятно, что $x(t) = x(t,v)$ и $v \in W$.

Покажем свойство улучшения для выходных управлений.

Действительно, решение $p(t), t \in T$ является решением системы дифференциальных уравнений (6) при $x = x(t,u^0)$, $u = u^0(t)$, $z = x(t,v) - x(t,u^0)$ и удовлетворяет краевому условию (8).

Обозначим

$$\overline{\lambda} = -p_1(t_1).$$

Тогда $p(t) = p(t,u^0,v,\overline{\lambda}),\ t \in T$.

Согласно формуле приращения (5) выходное управление v обеспечивает невозрастание функционала Лагранжа

$$L(v,\overline{\lambda}) \le L(u^0,\overline{\lambda}).$$

Следовательно, в силу допустимости управлений $u^0,\ v$ получаем

$$\Phi(v) \le \Phi(u^0).$$

Отметим, что в силу оценки (9) выходное управление обеспечивает строгое улучшение целевого функционала, если управления u^0 и v не совпадают.

Выделим свойства краевой задачи (10), упрощающие ее по сравнению с краевой задачей принципа максимума.

1. В краевой задаче (10) уравнения для сопряженных переменных являются полиномиальными степени $l-1$ по x и линейными по p.

2. В краевой задаче (10) правые части для фазовых переменных являются непрерывными по совокупности аргументов (p, x) на $R^n \times R^n$.

Предложенная процедура дает принципиальную возможность осуществления нелокального улучшения на множестве допустимых управлений в рассматриваемом классе задач. Трудоемкость построения улучшающего управления с выполнением всех терминальных ограничений определяется трудоемкостью решения непрерывной краевой задачи улучшения.

Заключение

Предлагаемая проекционная процедура в рассматриваемом классе задач обеспечивает нелокальное улучшение без операции варьирования с соблюдением всех терминальных ограничений. Данное свойство является существенным фактором повышения эффективности численных методов решения задач оптимального управления с ограничениями на фазовую траекторию.

Литература

1. Булдаев А.С. Методы возмущений в задачах улучшения и оптимизации управляемых систем. – Улан-Удэ: Изд-во Бурят. Гос. Ун-та, 2008. – 260 с.

References

1. Buldaev A.S. Metodi vozmushenii v zadachah uluchsheniya I optimizacii upravlyaemih system. – Ulan-Ude: Izd-vo Buryat.gos.un-ta, 2008. – 260s.