

УДК 517.95+532.5

doi 10.18101/978-5-9793-0803-6-137-143

**СХЕМА ПЕРЕМЕННЫХ НАПРАВЛЕНИЙ
ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ
ТРЕТЬЕГО РОДА**

© *Ханхасаев Владислав Николаевич*, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики
Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления
Россия, г. Улан-Удэ
E-mail: hanhvladnick@mail.ru

© *Дармакеев Эрдэни Владимирович*, аспирант кафедры высшей математики
Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления
Россия, г. Улан-Удэ
E-mail: erdenid.90@mail.ru

В статье изучено смешанное гиперболо-параболическое уравнение в частных производных 2-го порядка с переменными коэффициентами и краевыми условиями третьего рода в цилиндрической области. Эта математическая модель рассматривалась в работах В. Н. Ханхасаева и С. Л. Буянтуева, где дополнительно бы добавлен период горения электрической дуги до момента отключения. Получены разностные схемы численного решения для внутренних и граничных точек области задания на основе сохранения теплового баланса. Полученные схемы почти на порядок более экономичны, чем обычные явные и неявные. По разностным схемам произведены численные расчеты на языках Фортран и C++ с выводом полей температур в различные моменты времени, вид которых говорит об устойчивости примененных разностных схем.

Ключевые слова: смешанное уравнение теплопроводности, гиперболо-параболическое уравнение, начально-краевая задача, разностные схемы, схема переменных направлений, неявная схема, тепловой баланс.

**SCHEME OF ALTERNATE DIRECTIONS
OF HYPERBOLIC-PARABOLIC HEAT EQUATION WITH
THE BOUNDARY CONDITIONS OF THE THIRD TYPE**

Vladislav N. Khankhasaev, Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor at the Department of Higher Mathematics,
East Siberia State University of Technology and Management
Ulan-Ude, Russia

Erdeni V. Darmakheev, Postgraduate Student at the Department
of Higher Mathematics,
East Siberia State University of Technology and Management
Ulan-Ude, Russia

The mixed hyperbolic-parabolic partial differential equation of the second order with variable coefficients and boundary conditions of the third type in the cylindrical domain is discussed in the article. This mathematical model is introduced in the papers of Khankhasaev V.N. and Buyantev S.L. where the burning period of the electric arc is added up to the extinguishing moment in addition. Finite difference schemes of numerical solution for interior and boundary points of the domain are obtained on the basis of the heat balance. The obtained schemes are more economical than ordinary explicit and implicit schemes. The numerical calculations with the output of the temperature fields at different time points have been carried out using obtained difference schemes in Fortran and C ++ that describe the stability of difference schemes.

Keywords: heat equation of the mixed type, hyperbolic-parabolic equation, initial boundary value problem, finite difference schemes, alternative directions scheme, implicit scheme, heat balance.

Продолжая цикл работ В. Н. Ханхасаева и С. Л. Буйнтуева [1], расширим примененную в них математическую модель, добавив период горения электрической дуги до момента отключения и заменив гиперболическое уравнение теплопроводности [2] гипербола-параболическим с переменными коэффициентами, где область параболичности уравнения означает квазистационарную фазу горения дуги до процесса ее отключения.

В предыдущих работах В. Н. Ханхасаева [3; 4] рассматривалось более общее гипербола-параболическое уравнение с первым краевым условием. В настоящей работе, тесно связанной с процессом тепломассообмена, сконцентрируемся на более подробном описании разностных схем для граничных точек области задания при введении краевых условий третьего рода на основе сохранения теплового баланса и консервативности схемы.

Рассмотрим уравнение смешанного типа 2-го порядка:

$$k(\tau) \frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} + \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + q_v(x, y, \tau) \quad (1)$$

в цилиндрической области $G = \Omega \times [T_1, T_2]$, $\Omega = [0, l_x] \times [0, l_y]$, $T_1 < 0$, $T_2 > 0$, $l_x > 0$, $l_y > 0$; $\Gamma = \gamma \times [T_1, T_2]$, $\gamma = \partial\Omega$. При этом $k(\tau) = 0$, $\tau \leq 0$; $k(\tau) > 0$, $\tau > 0$; $\forall (x, y, \tau) \in G$, т. е. при $\tau \leq 0$ — уравнение (1) параболическое, а при $\tau > 0$ — гиперболическое. λ — коэффициент температуропроводности ($\lambda = 70$ из экспериментальных данных [1]), k — коэффициент тепловой релаксации [2], q_v — джоулево тепло (внутренние источники тепла) при $\tau > 0$, $q_v = 0$.

Краевая задача. Найти решение уравнения (1) в области G такое, что:

$$\left[\mp \lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \alpha_{0x, kx} T \right]_{x=0, l_x} = q_{0x, kx}, \quad \left[\mp \lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \alpha_{0y, ky} T \right]_{y=0, l_y} = q_{0y, ky} \quad (2)$$

$$T(x, y, \tau)|_{\tau=T_1} = T_0(x, y), \quad (3)$$

где $\alpha_{0x, lx, 0y, ly}$ и $q_{0x, lx, 0y, ly}$ — коэффициенты теплоотдачи и плотности теплового потока поверхностных источников на границе области Ω соответственно, $T_0(x, y)$ — начальное распределение температуры в момент времени $\tau = T_1$.

Изобразим область переменных (x, y) прямоугольной формы и введем вначале неравномерную пространственную сетку (рис. 1):

$\{x_n, y_m\}_{n=1, m=1}^{N, M}$, $h_{xn} = x_{n+1} - x_n$, $h_{ym} = y_{m+1} - y_m$ и равномерную сетку по времени:

$$\{\tau_j\}_{j=0}^J, \quad \tau_j = T_1 + j\Delta\tau.$$

Грани элементарных объемов разместим посередине между узловыми точками.

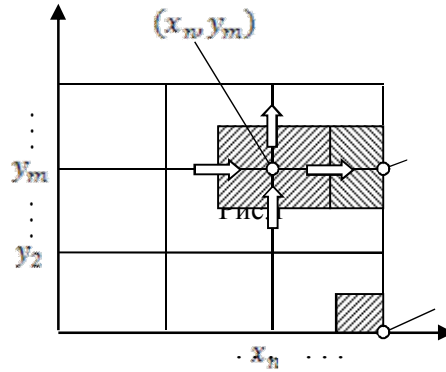


Рис. 1. Неравномерная пространственная сетка

Составим конечно-разностное уравнение для произвольного внутреннего элементарного объема, содержащего узловую точку (x_n, y_m) . Этот объем окружен четырьмя соседними. Поэтому в уравнении теплового баланса следует учитывать четыре тепловых потока от соседних объемов. Уравнение теплового баланса при суммировании по этому объему имеет вид:

$$\begin{aligned} & \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} \int_{y_{m-1/2}}^{y_{m+1/2}} k \left(\frac{dT^{j+1}}{d\tau} - \frac{dT^j}{d\tau} \right) dydx + \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} \int_{y_{m-1/2}}^{y_{m+1/2}} (T^{j+1} - T^j) dydx = \\ & = \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \left[-P_{n+1/2} + P_{n-1/2} - P_{m+1/2} + P_{m-1/2} + \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} \int_{y_{m-1/2}}^{y_{m+1/2}} q_v dydx \right] d\tau, \end{aligned}$$

где $x_{n\pm 1/2} = (x_n + x_{n\pm 1})/2$ и $y_{m\pm 1/2} = (y_m + y_{m\pm 1})/2$.

Для расчета тепловых потоков $P_{n\pm 1/2}$, $P_{m\pm 1/2}$ используются формулы:

$$P_{n+1/2} = \lambda \frac{(u_{n,m} - u_{n+1,m})(h_m + h_{m-1})}{h_n \cdot 2}, \quad P_{m-1/2} = \lambda \frac{(u_{n,m-1} - u_{n,m})(h_n + h_{n-1})}{h_{m-1} \cdot 2},$$

$$P_{n-1/2} = \lambda \frac{(u_{n-1,m} - u_{n,m})(h_m + h_{m-1})}{h_{n-1} \cdot 2}, \quad P_{m+1/2} = \lambda \frac{(u_{n,m} - u_{n,m+1})(h_n + h_{n-1})}{h_m \cdot 2}.$$

Множители $(h_m + h_{m-1})/2$ и $(h_n + h_{n-1})/2$ соответствуют «площадям» граней элементарного объема, через которые проходят тепловые потоки [5].

Таким образом, из уравнения баланса получаем неявную схему:

$$k \left[\frac{(u_{n,m}^{j+1} - u_{n,m}^j)}{\Delta \tau} - \frac{(u_{n,m}^j - u_{n,m}^{j-1})}{\Delta \tau} \right] \frac{1}{\Delta \tau} \frac{(h_m + h_{m-1})(h_n + h_{n-1})}{4} +$$

$$+ \frac{(u_{n,m}^{j+1} - u_{n,m}^j)(h_m + h_{m-1})(h_n + h_{n-1})}{\Delta \tau \cdot 4} = \lambda \left[\frac{(u_{n+1,m}^{j+1} - u_{n,m}^{j+1})}{h_n} - \frac{(u_{n,m}^{j+1} - u_{n-1,m}^{j+1})}{h_n} \right] \frac{(h_m + h_{m-1})}{2} +$$

$$+ \lambda \left[\frac{(u_{n,m+1}^{j+1} - u_{n,m}^{j+1})}{h_m} - \frac{(u_{n,m}^{j+1} - u_{n,m-1}^{j+1})}{h_m} \right] \frac{(h_n + h_{n-1})}{2} + \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} \int_{y_{m-1/2}}^{y_{m+1/2}} q_v dy dx, \quad (4)$$

где $u_{n,m}^j$ — сеточная функция, соответствующая температуре $T(x_n, y_m, \tau_j)$.

С помощью метода теплового баланса несложно составить разностные уравнения и для граничных элементарных объемов. При этом в уравнениях следует учитывать тепловые потоки на границе области в окружающую среду, выражения для которых вытекают из граничных условий (2).

Следует отметить, что если в правой части уравнения (4) заменить индекс времени $j+1$ на j , то мы получим явную схему.

В ходе численного решения по явной и неявной разностным схемам общее число арифметических действий будет пропорционально N^d , где N — число узлов по какой-нибудь пространственной переменной [6; 7]. Чтобы сократить число операций, построим неявную разностную схему по локально-одномерному методу [8], которая является более экономичной по сравнению с упомянутыми ранее схемами.

Для начала введем в рассмотрение вспомогательный (полуцелый) слой

$$\tau_{j+1/2} = \tau_j + \frac{\Delta \tau}{2}. \text{ Для простоты далее будет использоваться равномерная сетка}$$

$x_n = (n-1)h_x$, $y_m = (m-1)h_y$. Тогда разностная схема (4) при равномерной сетке на полуцелом слое $j+1/2$ примет вид:

$$k \frac{\left(u_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} - 2u_{n,m}^j + u_{n,m}^{j-\frac{1}{2}} \right)}{\left(\frac{\Delta\tau}{2} \right)^2} + \frac{u_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} - u_{n,m}^j}{\frac{\Delta\tau}{2}} = \Lambda_1 u_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 u_{n,m}^j + \frac{q_v}{2}, \quad (5)$$

где $\Lambda_1 u_{n,m} = \frac{1}{h_x^2} (u_{n+1,m} - 2u_{n,m} + u_{n-1,m})$, $\Lambda_2 u_{n,m} = \frac{1}{h_y^2} (u_{n,m+1} - 2u_{n,m} + u_{n,m-1})$.

Значения на j слое будут вычисляться аналогичным образом по значениям, полученным на $j + 1/2$ полуцелом слое:

$$k \frac{\left(u_{n,m}^{j+1} - 2u_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} + u_{n,m}^j \right)}{\left(\frac{\Delta\tau}{2} \right)^2} + \frac{u_{n,m}^{j+1} - u_{n,m}^{j+\frac{1}{2}}}{\frac{\Delta\tau}{2}} = \Lambda_1 u_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 u_{n,m}^{j+1} + \frac{q_v}{2}. \quad (6)$$

Вычисление решения разностных схем (5), (6) осуществляется в два этапа. На первом вычисление значений $u_{n,m}$ на полуцелом слое $\tau_{j+\frac{1}{2}}$ ведется

прогонкой в направлении оси 0_x , второй этап — прогонка на слое τ_j по оси 0_y . Поэтому схему называют локально-одномерной, или схемой переменных направлений.

Всего на одном слое осуществляется $2N$ прогонок объемом $2N$ операций. Следовательно, число арифметических операций на одном слое пропорционально N^2 . В используемой неявной схеме можем положить $\Delta\tau = h$ и тогда для расчета до момента T_2 по времени надо сделать N шагов. Значит, трудоемкость решения всей задачи оценивается числом, имеющим порядок N^3 , что более чем на порядок лучше по сравнению со схемами [6; 7].

Из-за наличия граничных условий (2) область сеточной функции $u_{n,m}^j$ разбивается на 9 перечисленных ниже участков. Это связано с тем, что в локально-одномерном методе при вычислении сеточной функции $u_{n,m}^{j+1/2}$ на первом полушаге в прогонке вдоль оси 0_x участвуют, помимо $u_{n,m}^j$, соседние по y значения $u_{n,m-1}^j$, $u_{n,m+1}^j$. На втором полушаге производится прогонка вдоль оси 0_y . При этом область сеточной функции будет точно также разбиваться на 9 таких же участков.

Схема переменных направлений на пространственной сетке, равномерной по каждой из координат x , y , имеет вид:

$$u_{n+1,m}^{j+\frac{1}{2}} - \left(\frac{h_x^2}{\lambda} \left(\frac{k}{\Delta\tau^2} + \frac{1}{\Delta\tau} \right) + 2 \right) u_{n,m}^{j+\frac{1}{2}} + u_{n-1,m}^{j+\frac{1}{2}} + \frac{h_x^2}{h_y^2} u_{n,m+1}^j + \left(\frac{h_x^2}{\lambda} \left(2 \frac{k}{\Delta\tau^2} + \frac{1}{\Delta\tau} \right) - 2 \frac{h_x^2}{h_y^2} \right) u_{n,m}^j + \frac{h_x^2}{h_y^2} u_{n,m-1}^j + \frac{h_x^2}{\lambda} \left(\frac{q_v}{2} - \frac{k}{\Delta\tau^2} u_{n,m}^{j-\frac{1}{2}} \right) = 0$$

для внутренней точки ($n = 2, \dots, N - 1; m = 2, \dots, M - 1$);

$$-\left(1 + \alpha_{lx} \frac{h_x}{\lambda} + \frac{1}{2} \frac{h_x^2}{\lambda} \left(\frac{k}{\Delta\tau^2} + \frac{1}{\Delta\tau} \right) \right) u_{N,m}^{j+\frac{1}{2}} + u_{N-1,m}^{j+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \frac{h_x^2}{h_y^2} u_{N,m+1}^j + \left(\frac{h_x^2}{\lambda} \left(\frac{k}{\Delta\tau^2} + \frac{1}{2\Delta\tau} \right) - \frac{h_x^2}{h_y^2} \right) u_{N,m}^j + \frac{1}{2} \frac{h_x^2}{h_y^2} u_{N,m-1}^j + \frac{1}{2} \frac{h_x^2}{\lambda} \left(\frac{q_v}{2} - \frac{k}{\Delta\tau^2} u_{N,m}^{j-\frac{1}{2}} \right) = 0$$

для точки на стороне прямоугольника ($n = N; m = 2, \dots, M - 1$);

$$-\left(1 + \alpha_{lx} \frac{h_x}{\lambda} + \frac{1}{2} \frac{h_x^2}{\lambda} \left(\frac{k}{\Delta\tau^2} + \frac{1}{\Delta\tau} \right) \right) u_{N,1}^{j+\frac{1}{2}} + u_{N-1,1}^{j+\frac{1}{2}} + \frac{h_x^2}{h_y^2} u_{N,2}^j + \left(\frac{h_x^2}{\lambda} \left(\frac{k}{\Delta\tau^2} + \frac{1}{2\Delta\tau} \right) - \frac{h_x^2}{h_y^2} - \alpha_{0y} \frac{h_x^2}{\lambda} \frac{1}{h_y} \right) u_{N,1}^j + \frac{1}{2} \frac{h_x^2}{\lambda} \left(\frac{q_v}{2} - \frac{k}{\Delta\tau^2} u_{N,1}^{j-\frac{1}{2}} \right) + q_{lx} \frac{h_x}{\lambda} + q_{0y} \frac{h_x^2}{\lambda} \frac{1}{h_y} = 0$$

для угловой точки ($n = N; m = 1$).

Результат. По приведенным разностным схемам проводится численный расчет на языках Фортран и С++ с гладкими коэффициентами k и q_v с выводом полей температур в различные моменты времени, вид которых говорит об устойчивости примененных разностных схем (см. рис. 2).

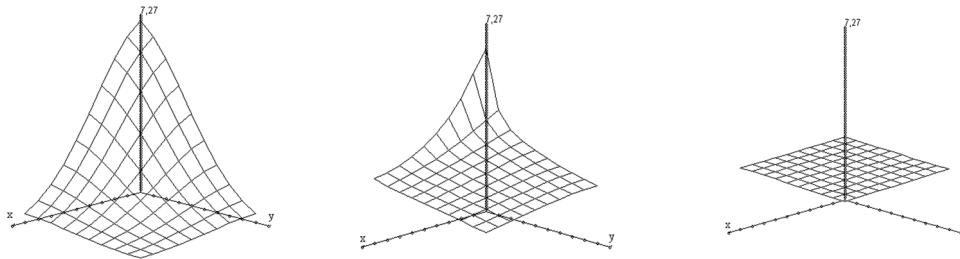


Рис. 2. Распределение температуры в моменты времени $\tau = T_1, \tau = 0, \tau = T_2$ соответственно

Литература

1. Ханхасаев В. Н., Буянтуев С. Л. Численный расчет одной математической модели электрической дуги в потоке газа // Энергосберегающие и природоохранные технологии на Байкале: сб. тр. междунар. науч.-практ. конф. Улан-Удэ, 2001. С. 168–172.
2. Лыков А. В. Теплообмен. М.: Энергия, 1972. 560 с.
3. Ханхасаев В. Н., Местникова Н. Н. Схема переменных направлений для численного решения гиперболо-параболического уравнения // Кубатурные формулы, методы Монте-Карло и их приложения: сб. тр. междунар. конф. Красноярск, 2011. С. 117–120.
4. Ханхасаев В. Н., Местникова Н. Н., Ханхасаева Я. В. Численное решение гиперболо-параболического уравнения по схеме переменных направлений // Инновационные технологии в науке и образовании: сб. тр. междунар. науч.-практ. конф. Улан-Удэ, 2011. С. 79–82.
5. Дульнев Г. Н. Применение ЭВМ для решения задач теплообмена. М.: Высш. шк., 1990. 208 с.
6. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 409 с.
7. Романова Н. А. О сходимости разностных схем одной краевой задачи для уравнений смешанного типа: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Якутск, 1994. 109 с.
8. Ханхасаев В. Н., Дармахеєв Э. В. Алгоритм численного решения по локально-одномерной схеме двухмерного по пространственным переменным гиперболо-параболического уравнения теплопроводности с краевыми условиями третьего рода // Математика, ее приложения и математич. образование: сб. тр. V Междунар. конф. Улан-Удэ, 2014. С. 330–333.