

Исследование выполнено в соответствии с госзаданием ФГБУН ИФМ СО РАН на 2015-2017 гг. (проект № 0336-2014-0003) и при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 14-08-00453-а, 15-43-04304-р-сибирь-а.

#### Литература

1. Taylor H. F. W. *Cement Chemistry*. London: Thomas Telford, 1997. 459 p.
2. Lea F. *Lea's Chemistry of Cement and Concrete*. London: Elsevier Ltd, 1998. 1057 p.
3. Жариков В. А. *Основы физической геохимии*. М.: Наука, 2005. 654 с.
4. Заварицкий А. Н., Соболев В. С. *Физико-химические основы петрографии изверженных горных пород*. М.: ГОС-ГЕОЛТЕХИЗДАТ, 1961. 383 с.
5. Lutsyk V. I., Vorob'eva V. P., Zelenaya A. E. 3D Reference Book on the Oxide Systems Space Diagrams as a Tool for Data Mining // *Solid State Phenomena*. 2015. Т. 230. P. 51-54.
6. Луцык В. И., Зырянов А. М., Зеленая А. Э. Построение компьютерной модели Т-х-у диаграммы с моновариантным монотектическим равновесием // *Журнал неорганической химии*. 2008. Т. 53, № 5. С. 858-863.
7. Lutsyk V. I., Zelenaya A. E., Zyryanov A. M. Specific Features of the Crystallization of Melts in Systems with a Transition from Syntectic Equilibrium to Monotectic Equilibrium // *Crystallography Reports*. 2009. V. 54, № 7. P. 1300-1307.
8. Lutsyk V., Zelenaya A. Crystallization paths in SiO<sub>2</sub>-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-CaO system as a genotype of silicate materials // *Journal of Silicate Based and Composite Materials*. 2013. № 2. P. 34-38.
9. Lutsyk V. I., Zelenaya A. E., Zyryanov A. M. Multicomponent systems simulation by the software of "Diagrams Designer // *Journal of Materials, Methods & Technologies, International Science Publications*. 2008. № 2. P. 176-184.
10. Зеленая А. Э., Луцык В. И., Савинов В. В. Проблема уникальности концентрационных полей в системе CaO-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-SiO<sub>2</sub> // *Материалы IV научно-практич. конф. с межд. участием «Наноматериалы и технологии»*, Улан-Удэ. 2012.
11. Торопов Н. А., Барзаковский В. П., Лапшин В. В., Курцева Н. Н., Бойкова А. И. *Диаграммы состояния силикатных систем*. Справочник. Вып. 3. Тройные силикатные системы. Ленинград: Наука. 1972. 448 с.
12. Lutsyk V. I., Zelenaya A. E., Savinov V. V. Melt solidification in the ceramic system CaO-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-SiO<sub>2</sub> // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2011. V. 18, no 11.
13. Lutsyk V., Zelenaya A. Crystallization Paths and Microstructures in Ternary Oxide Systems with Stoichiometric Compounds // *Solid State Phenomena*. 2013. V. 200. P. 73-78, 2013.
14. Lutsyk V. I., Zelenaya A. E., Savinov V. V. Phase Trajectories in CaO-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-SiO<sub>2</sub> Melts // *Crystallography Reports*. 2012. V. 57, № 7. P. 943-947.

УДК 51-7

doi: 10.18.101/978-5-9793-0883-8-245-249

### Моделирование нагнетания жидких растворов в трещину

Т. Г. Дармаев<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Бурятский государственный университет, 670000, Россия, г. Улан-Удэ, Смолина, 24а,  
tel.: +7(3012)221215, e-mail: dtg@bsu.ru

#### Аннотация

Проведено моделирование нагнетания жидких растворов в трещину, полученную гидроразрывом, как изотермическое течение несжимаемой бингамовской жидкости между двумя горизонтальными плоскостями. Получены аналитические выражения для времени и глубины проникновения растворов.

**Ключевые слова:** напорная инъекция, бингамовская жидкость.

### Modeling of grout penetration in crack

T. G. Darmaev<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Buryat state university, 670000, Russia, Ulan-Ude, Smolin Str., 24a, tel.: +7(3012)221215  
e-mail: dtg@bsu.ru

#### Abstract

Modeling of grouting of liquid solutions to the crack received by hydraulic fracturing as an isothermal flow of incompressible Bingham liquid between two horizontal planes has been conducted. Analytical expressions for time and depth of solution penetration have been received.

**Key words:** grouting, Bingham liquid

Исследование течения различных жидкостей в трубе является сложной задачей. Течение в трубе в зависимости от вязкости можно рассматривать как течение вязкой несжимаемой жидкости (течение Пуазейля). Поскольку в состав нагнетаемых растворов входит цемент, то надо рассматривать течения неньютоновских жидкостей или Бингама [1]. В природе и технике существует широкий круг материалов, таких как свежий бетон, геоматериалы (глинистые почвы, некоторые виды нефтей, буровые растворы, сели, магма), коллоидные растворы, порошкообразные смеси, смазочные материалы, металлы при обработке давлением, кровь в капиллярах, пищевые продукты, зубная паста и др., которые

обладают поведением среды Бингама, а именно: ниже определенного предельного значения напряжений среда ведет себя как жесткое тело, выше этого предела - как несжимаемая вязкая жидкость.

Неньютоновские жидкости можно разделить на три группы (рис. 1):

1. Системы, для которых скорость сдвига зависит только от напряжения. К этой группе относятся такие неньютоновские материалы, как дилатантные (shear thickening (dilatant) fluids) и псевдопластические (shear thinning (pseudoplastic) fluids) жидкости, параметры течения которых не зависят от времени. Реологическим уравнением течения псевдопластических и дилатантных материалов является

соотношение Оствальда де Виля  $\theta = K\gamma^n$ , где  $K$  – коэффициент консистенции;  $\gamma$  – угловая деформация (деформация сдвига);  $n$  – индекс течения. При  $n < 1$  это уравнение описывает течение псевдопластических жидкостей, а при  $n > 1$  – дилатантных.

2. Системы, в которых связь между напряжением и скоростью сдвига зависит от времени действия напряжения. Вязкость таких систем называется реодинамической вязкостью. К ним относятся тиксотропные, у которых напряжение сдвига и эффективная вязкость уменьшаются в процессе сдвига, и реопексивные, у которых напряжение сдвига и эффективная вязкость увеличиваются со временем.

3. Твердообразные системы, обладающие свойствами, как твердого тела, так и жидкости. Характерным признаком таких систем является наличие предельного напряжения сдвига или предела текучести.

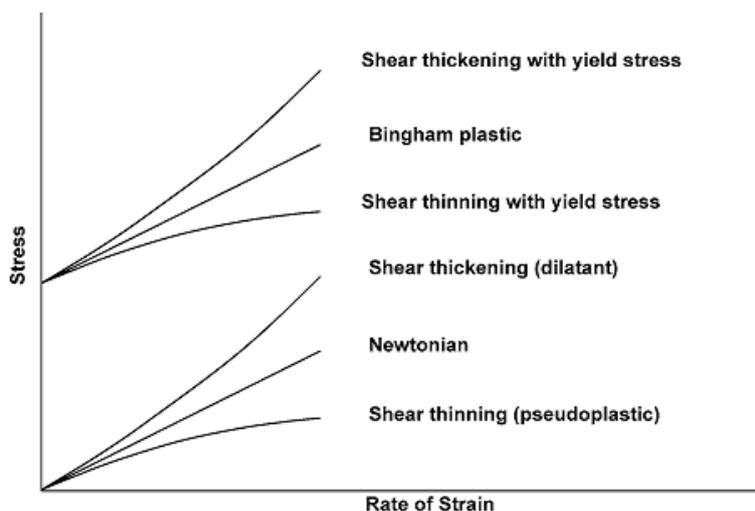


Рис.1. Отношение между скоростями деформации (rate of strain) и напряжениями сдвига (shear stress).

Пусть  $\Omega$  ограниченная связная область в  $\mathbb{R}^n$  ( $n = 2, 3$ ),  $\Gamma$  - граница области. Изотермическое течение несжимаемой вязкопластической среды (среды Бингама, или бингамовской жидкости) в течение временного интервала  $(0, T)$  описывается следующей системой уравнений и определяющих соотношений:

$$\rho \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + (v \nabla) v \right] = \nabla \cdot \sigma + f$$

$$\nabla \cdot v = 0 \tag{1}$$

$$\sigma = -pI + \tau, \quad \tau = \begin{cases} 2\mu D(v) + \sigma_s \frac{D(v)}{|D(v)|}, & |D(v)| \neq 0, \\ |\tau| \leq \sigma_s, & |D(v)| = 0 \end{cases} \tag{2}$$

где  $\rho, \mu, \sigma_s$  - плотность, коэффициент вязкости и предельное напряжение сдвига (предел текучести) бингамовской жидкости соответственно;  $v$  – неизвестное поле скоростей,  $f$  – заданное поле внешних сил;  $\sigma$  – тензор напряжений Коши;  $p$  – давление;  $\tau$  – девиатор тензора напряжений. Если задан произвольный тензор второго ранга с компонентами  $T_{ij}$ , то разложение его на шаровую часть и девиатор имеет вид

$T_{ij} = T\delta_{ij} + T_{ij}^D$ , где  $T = \frac{1}{3}T_{kk}$  и  $T_{kk}^D = 0$ . В механике  $|\tau|$  называют интенсивностью

напряжений.  $D(v) = \frac{1}{2} [\nabla v + (\nabla v)^T]$  - тензор скоростей деформаций с нормой  $|D(v)| = \left( \sum_{1 \leq i, j \leq n} |D_{ij}(v)|^2 \right)^{1/2}$ , где  $n$  - вектор внешней единичной нормали на  $\Gamma$ .

Заметим, что если  $\sigma_s = 0$ , то система (1)–(2) сводится к системе уравнений Навье–Стокса, моделирующей изотермическое течение несжимаемой ньютоновской вязкой жидкости. В случае  $\sigma_s > 0$  система (1)–(2) выполняется в области движения (т.е.  $|D(v)| > 0$ ) и, вообще говоря, не имеет смысла в жесткой зоне  $\Omega_0 : \Omega_0 = \{ (x, t) \in (0, T) \mid D(v)(x, t) = 0 \}$ . Тензор напряжений в жесткой зоне не определен.

Модель Бингама является двухпараметрической моделью. Если в определяющих соотношениях вязкопластической среды положить  $\sigma_s = 0$  или  $\mu = 0$ , то эти уравнения формально перейдут в хорошо известные определяющие соотношения вязкой жидкости или идеальной пластической среды. Если  $\sigma_s > 0$ , то в потоке могут быть зоны, в которых жидкость ведет себя как твердое тело (жесткие зоны).

При возрастании  $\sigma_s$  эти зоны увеличиваются, а при достаточно большом  $\sigma_s$  блокируют течение. Как правило, традиционно рассматриваются два вида жестких зон: зоны застоя, в которых среда покоится, и ядра течения, в которых среда движется как твердое тело. Например, при течении в трубе ядра течения находятся строго внутри области, зоны застоя примыкают к неподвижной границе.

Когда существуют оба вида движения, необходимо ввести “предельную поверхность”. Эта поверхность разделяет две области с разным движением материала. Запишем (2) в виде

$$\tau_{ij} = \eta(|D(v)|) D_{ij}, \eta = 2\mu + \frac{\sigma}{|D(v)|}, \text{ если } |D(v)| \neq 0 \text{ и } |\tau| \leq \sigma_s, \text{ если } |D(v)| = 0 - \text{соотношения Бингама.}$$

Функция  $\eta(D)$  называется эффективной вязкостью. Используются также другие соотношения:

Гершеля-Балкли [2]: 
$$\tau = \left( K \dot{\gamma}^{n-1} + \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} \right) \dot{\gamma}, \quad |\tau| > \tau_0$$

Кэссона [3]: 
$$\tau = \left( \sqrt{\mu} + \sqrt{\frac{\tau_0}{\dot{\gamma}}} \right)^2 \dot{\gamma}, \quad |\tau| > \tau_0$$

Кэссона [3]:

$$\dot{\gamma} = 0, \quad |\tau| \leq \tau_0, \text{ где } \tau_0 - \text{предельное (статическое) напряжение сдвига.}$$

Основным недостатком соотношений Гершеля-Балкли, Кэссона и др. является то, что для них отсутствует теоретическое обоснование, т.е. микрореологическая модель, связывающая реологические коэффициенты со структурно-реологическими характеристиками системы, а именно с силами взаимодействия между частицами, строением и размерами агрегатов.

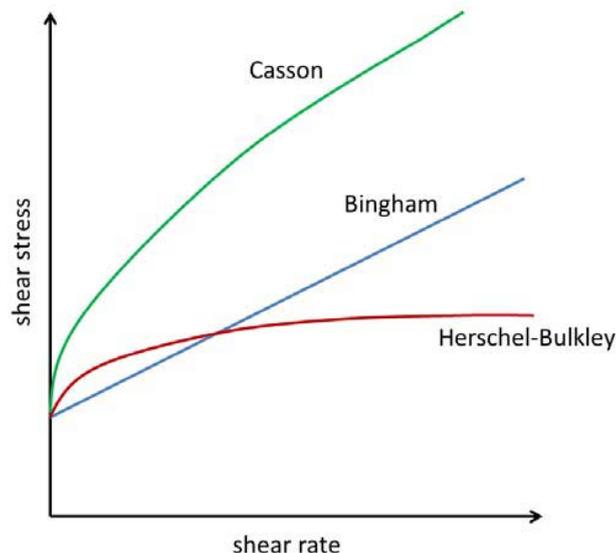


Рис.2. Графики моделей - Bingham (синий), Casson (зеленый) and Herschel-Bulkley (красный).

Известны точные решения системы (1)-(2) для некоторых плоских течений: между параллельными плоскостями, между коаксиальными вращающимися цилиндрами и в круглой прямой трубе [4-5].

Рассмотрим нагнетание раствора в трещину, полученную гидроразрывом, как изотермическое течение несжимаемой бингамовской жидкости между двумя горизонтальными плоскостями. (рис. 3).

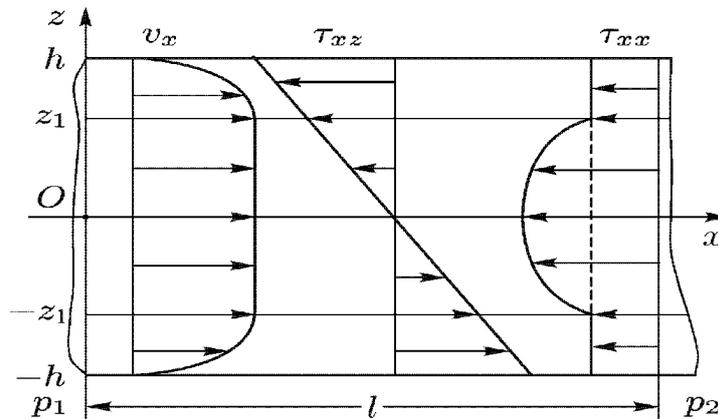


Рис. 3. Течение между плоскостями.

В работе [4] при заданном перепаде давления  $\Delta p = p_2 - p_1$  найдены скорости течения для областей сдвигового и пластического движений. В нашем случае  $p_1$  - давление раствора,  $p_2$  - давление поровой жидкости. Суммарный расход определяется выражением[4-5]:

$$Q = \frac{h^3 \Delta p}{\mu l} \left[ \frac{2}{3} - \frac{\tau_0 l}{h \Delta p} + \left( \frac{\tau_0 l}{h \Delta p} \right)^3 \right], \quad (3)$$

где  $\mu, \tau_0$  - коэффициент вязкости и предельное напряжение сдвига (предел текучести) бингамовской жидкости соответственно.

Координаты  $\pm z_1 = \pm \frac{\tau_0 l}{\Delta p}$  на рис.3 задают поверхности разделяющие области сдвигового и пластического течений. Предельный перепад давления, при котором может существовать течение среды определяется выражением:

$$z_1 = h \rightarrow \Delta p = \frac{\tau_0 l}{h}$$

Откуда следует, что при заданном перепаде максимальное проникновение жидкости составит:

$$L_{\max} = \frac{h \Delta p}{\tau_0}$$

Таким образом, тем больше давление нагнетания и меньше предел текучести раствора, тем дальше проникновение раствора.

Расход жидкости можно представить как отношение объема жидкости в единицу времени:

$$Q = \frac{dV}{dt}$$

Поскольку  $V = 2hl$  используя (3) получаем:

$$2h \frac{dl}{dt} = \frac{h^3 \Delta p}{\mu l} \left[ \frac{2}{3} - \frac{\tau_0 l}{h \Delta p} + \left( \frac{\tau_0 l}{h \Delta p} \right)^3 \right]$$

Вводя нормировки:

$$L = \frac{l}{L_{\max}}, \quad T = \frac{\tau_0^2}{6\mu \Delta p} t$$

получаем:

$$\frac{dL}{dT} = \frac{2 - 3L + L^3}{L} \quad (4)$$

Интегрируя (4), и, учитывая  $L=0$  при  $T=0$ , получаем:

$$T = \frac{L}{3(1-L)} + \frac{2}{9} \ln \left[ \frac{2(1-L)}{2+L} \right] \quad (5)$$

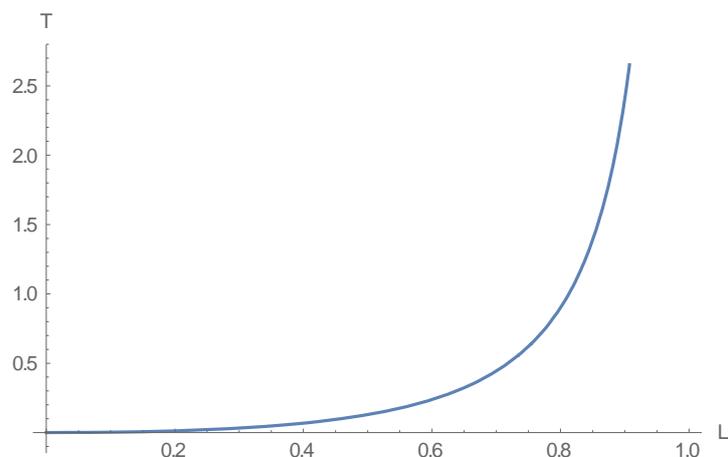


Рис.4. График функции (5).

Из полученных выражений и рис.4 видно, что:

- 1) нормированная длина (глубина) проникновения не зависит от ширины канала, т.е. время проникновения одинаково для всех трещин разных ширины;
- 2) нормированное время нагнетания зависит от перепада давления и реологических свойств раствора;
- 3) за нормированное время  $T=1$  т.е.  $t = \frac{6\mu\Delta p}{\tau_0^2}$  раствор проникает примерно на 80% возможного проникновения во все трещины.

#### Литература

1. Bingham F.C. Fluidity and plasticity. New York: McGraw-Hill, 1922.
2. Hershell W.H., Bulkey R. Konsistenzmessungen von Gummi Benzollösungen // Kolloid Zeitschrift. 1926. 39. S. 291.
3. Casson N. A // Rheol. of disperse systems / Ed. C.C. Mill. L., 1959. P. 84.
4. Гноевой А.В., Климов Д.М., Чесноков В.М. Основы теории течений бингамовских сред. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 272с.
5. Воларович М.П., Гуткин А.М. Течение вязкопластичного тела между двумя параллельными стенками и в кольцевом зазоре между коаксильными трубками // ЖТФ.- 1946. – Т.XVI, вып.3.- с.321-329.

#### Сведения об авторе

Дармаев Тумэн Гомбоцыренович, кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией вычислительных и геоинформационных технологий Бурятского государственного университета, e-mail: dtg@bsu.ru, тел. +7(301-2) 22-12-15.

Darmaev Tumen Gombotsyrenovich, PhD, Head of the laboratory of Buryat State University, 670000, Ulan-Ude, Smolin St., 24a, e-mail: dtg@bsu.ru, tel. +7(301-2) 22-12-15.

УДК 544.344.4

doi: 10.18.101/978-5-9793-0883-8-249-257

### Построение 4D компьютерных моделей Т-Х-У-Z диаграмм металлических и солевых систем

А. М. Зырянов<sup>1</sup>, В. П. Воробьева<sup>1</sup>, В. И. Луцык<sup>1,2</sup>, А. Э. Зеленая<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт физического материаловедения СО РАН, 670047, Россия,  
г. Улан-Удэ, ул. Сахьяновой, 6. e-mail: vluts@ipms.bsnet.ru

<sup>2</sup>Бурятский государственный университет, 670000, Россия, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а

#### Аннотация

Представлены 4D компьютерные модели Т-х-у-z диаграмм Fe-R-Co-S (R=Ni, Cu) и U,Na,Mg,Pu|Cl систем. Установлено, что ликвидус Т-х-у-z диаграмм подсистем Fe-Ni-Co-FeS-NiS-CoS и Fe-Cu-Co-FeS-Cu2S-CoS состоит, соответственно, из 6-ти и 12-ти гиперповерхностей, а Т-х-у-z диаграмму системы UCl<sub>3</sub>-NaCl-MgCl<sub>2</sub>-PuCl<sub>3</sub> формируют 66 гиперповерхностей и 30