

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФГБОУ ВО "Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова"  
ФГАОУ ВО "Новосибирский государственный университет"  
ФГБУН "Институт математики имени С. Л. Соболева" СО РАН  
ГБУ "Академия наук Республики Саха (Якутия)"  
ФГБОУ ВО "Восточно-Сибирский государственный университет  
технологий и управления"

## **ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

Тезисы докладов III Международной научной конференции,  
посвящённой 80-летию со дня рождения профессора В. Н. Врагова  
(Улан-Удэ – оз. Байкал, 18–22 августа 2025 г.)

Ответственный редактор  
И. Б. Юмов, канд. физ.-мат. наук, доц.

Улан-Удэ  
Издательство Бурятского госуниверситета им. Д. Банзарова  
2025

УДК 517.9:52-17 (082)  
ББК 22.161.6в631.0я431  
Д 503

Утверждено  
редакционно-издательским советом  
Бурятского государственного университета  
Протокол № 7 от 14 ноября 2025 г.



Конференция проводится при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение № 075-15-2025-349 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации

*Оргкомитет III Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование» выражает благодарность спонсорам ПАО «Газпромбанк» и ООО «Снежный барс» за оказанную финансовую поддержку*

#### Рецензенты

И. И. Матвеева, доктор физико-математических наук, профессор,  
Новосибирский государственный университет (г. Новосибирск)  
А. С. Булдаев, доктор физико-математических наук, профессор,  
Бурятский государственный университет им. Д. Банзарова (г. Улан-Удэ)

**Д 503 Дифференциальные уравнения и математическое моделирование:** тезисы докладов III Международной научной конференции, посвящённой 80-летию со дня рождения профессора В. Н. Врагова (Улан-Удэ – оз. Байкал, 18–22 августа 2025 г.). — Улан-Удэ: Изд-во Бурятского госуниверситета им. Д. Банзарова. 2025. – 200 с.  
ISBN 978-5-9793-2061-8  
DOI 10.18101/978-5-9793-2061-8-2025-1-200

В сборник включены тезисы докладов участников III Международной научной конференции, посвящённой 80-летию со дня рождения профессора В. Н. Врагова, ректора Новосибирского государственного университета (с 1993 по 1997 г.). Доклады были представлены по следующим направлениям: неклассические задачи для уравнений в частных производных, уравнения смешанного типа и вырождающиеся уравнения, динамические системы, оптимальное управление, спектральная теория дифференциальных операторов, математическое моделирование, вычислительная математика.

Предназначено для студентов, аспирантов, преподавателей и научных работников математических и смежных специальностей.

**Differential equations and mathematical modeling:** abstracts of the III international scientific conference "Differential equations and mathematical modeling" dedicated to the 80th anniversary of the birth of Professor V. N. Vragov (Ulan-Ude – Lake Baikal, August 18 – 22, 2025) – Ulan-Ude: Dorzhi Banzarov Buryat State University Publishing Department. 2025. – 200p.

ISBN 978-5-9793-2061-8  
DOI 10.18101/978-5-9793-2061-8-2025-1-200

This collection features the abstracts of the participants of the III International Scientific Conference "Differential Equations and Mathematical Modeling", dedicated to the 80th anniversary of the birth of Professor V. N. Vragov, Rector of Novosibirsk State University (from 1993 to 1997). The presentations were delivered in the following areas: non-classical problems for partial differential equations, mixed-type and degenerate equations, dynamical systems, optimal control, spectral theory of differential operators, mathematical modeling, and computational mathematics.

The collection may be useful for students, graduate students, teachers, and researchers in mathematics and related fields.

**УДК 517.9:52-17 (082)  
ББК 22.161.6в631.0я431**



Профессор В. Н. Врагов  
(2 октября 1945 – 4 июня 2002)

### Предисловие

Настоящий сборник содержит тезисы докладов, представленных на III Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование» (ДУММ–2025), которая проходила с 18 по 22 августа 2025 года в Улан-Удэ и на озере Байкал.

Конференция была посвящена светлой памяти выдающегося математика, доктора физико-математических наук, профессора Владимира Николаевича Врагова и приурочена к 80-летию со дня его рождения. В. Н. Врагов, ректор Новосибирского государственного университета в 1993–1997 годах, известен не только как талантливый руководитель, сохранивший в сложные постсоветские годы академический дух и высокие стандарты НГУ, но и как крупный ученый, внесший фундаментальный вклад в теорию вырождающихся дифференциальных уравнений и уравнений смешанного типа.

Организаторами конференции выступили Бурятский государственный университет им. Д. Банзарова, Новосибирский государственный университет, Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН, Математический центр в Академгородке (г. Новосибирск), Академия наук Республики Саха (Якутия), Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления.

Научная программа конференции отразила широту научных интересов В. Н. Врагова и актуальные тенденции в математике и её приложениях. В конференции приняли очное и дистанционное участие ведущие ученые из научных центров России, а также из Китая, Узбекистана, Казахстана, Монголии и других стран. Доклады были посвящены как глубоким теоретическим исследованиям в области дифференциальных уравнений, так и решению сложных прикладных задач в физике, механике, биологии, экологии и экономике с помощью современных методов математического моделирования.

Организаторы конференции выражают искреннюю благодарность всем участникам, членам Программного и Организационного комитетов за плодотворную работу и ценный вклад в развитие математической науки.

Мы надеемся, что данный сборник будет полезен специалистам в области дифференциальных уравнений и математической физики, а также послужит стимулом для новых исследований, продолжая лучшие традиции научной школы, к которой принадлежал Владимир Николаевич Врагов.

Таким образом, данный сборник – это не просто отчет о конференции, а важный кирпич в здание той «незримой коллективной памяти» научного сообщества, которая и обеспечивает преемственность и прогресс. Он будет одинаково ценен как для ветеранов, лично знавших В. Н. Врагова, так и для молодых исследователей, для которых его имя – это уже история, воплощенная в актуальных научных проблемах.

Председатель Программного комитета III Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование» А. И. Кожанов

## О многомерных аналогах системы А.В.Бицадзе

© Абдрахманова Римма Петровна

кандидат физико-математических наук,

ученое звание доцент,

доцент кафедры ВМиК ИИМРТ

Уфимский университет науки и технологий

Россия, 450000, г.Уфа, ул. К.Маркса, 12

vmk\_rimma@mail.ru

© Абдрахманов Айдар Максutowич

кандидат физико-математических наук,

ученое звание доцент,

доцент кафедры ИИиПМИ ИИМРТ

Уфимский университет науки и технологий

Россия, 450000, г.Уфа, ул. К.Маркса, 12

abdrail@mail.ru

Для одного линейного уравнения в частных производных второго порядка эллиптического типа задача Дирихле не может иметь более одного решения, по крайней мере, локально (в малой области). Для эллиптических систем оказалось, что свойства разрешимости классических граничных задач существенно отличаются от случая одного уравнения.

Примером такой системы является система (1)-(2):

$$u_{xx} - u_{yy} - 2v_{xy} = 0 \quad (1)$$

$$v_{xx} - v_{yy} + 2u_{xy} = 0, \quad (2)$$

которую рассмотрел А.В.Бицадзе, и которая носит название "система Бицадзе". Для нее задача Дирихле в круге имеет бесконечное число решений (т.е. эллиптичность системы не обеспечивает единственность решения задачи).

Для систем

$$(-1)^i \Delta u_i + 2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) = 0. \quad (3)$$

$$-\Delta u_i + 2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) = 0. \quad (4)$$

$$(-1)^i \Delta u_i + \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) = 0, \quad (5)$$

$$-\Delta u_i + \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) = 0. \quad (6)$$

получим в целом аналогичные результаты.

## Переходный процесс к установившемуся периодическому температурному режиму

© Абидуев Пурбо Ламажапович

кандидат физико-математических наук,

ученое звание доцент,

заведующий кафедры Системного анализа и компьютерного моделирования

Бурятский Государственный университет

Россия, 670000, Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а

apl087@yandex.ru

© Дармаев Тумэн Гомбоцыренович

кандидат физико-математических наук,

ученое звание доцент,

доцент кафедры информационных систем и методов искусственного интеллекта

Бурятский Государственный университет

Россия, 670000, Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а

dtumen@mail.ru

**Ключевые слова:** Двухслойная и однослойная пластина, уравнение теплопроводности периодический тепловой поток, метод конечных элементов, идеальный тепловой контакт, асимптотический метод, ряд Фурье, температурные волны.

Исследуется переходный процесс к установившемуся периодическому тепловому режиму в стенках пластины при воздействии на одной из поверхностей периодического быстроубывающего теплового потока. Эта задача моделирует в стенках взрывных камер распределение температурных полей, возникающих в результате детонации горючих смесей [1, 2]. Задача имеет также практическое значение с точки зрения выявления времени перехода в «рабочий режим» и максимального значения для установившегося температурного поля в зависимости от вида граничных условий на другой поверхности пластины. Показано, что наличие тепловой защиты в виде тонкого внутреннего слоя из материала с высокой теплопроводностью на поверхности воздействия теплового потока позволяет значительно снизить максимальное значение температуры.

Задача решена численно с помощью программы на основе метода конечных элементов и аналитически с помощью асимптотического подхода, где полагается, что рассматривается процесс, достаточно удаленный от начального условия. На рис.1 представлены графики изменения во времени температуры поверхности, на которой действует тепловой поток за 5 циклов его воздействия (100 сек). Причем расчеты проводились для случая однослойной (штриховая кривая 1) и двухслойной (кривая 2) пластин. При заданных граничных условиях и при заданном значении теплового потока численные расчеты показали, что выход на периодический температурный режим происходит за 5-6 циклов воздействия периодического теплового потока.

Для сравнения с численными расчетами полученное установившееся периодическое температурное поле было получено аналитически, с использованием асимптотического подхода. Применяется метод, основанный на использовании обобщенных функций [3, 4].

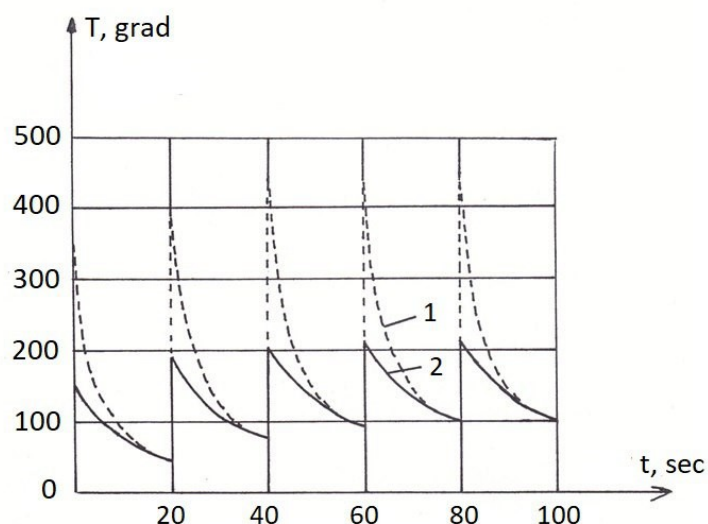


Рис. 1. График изменения во времени температуры поверхности

Полученные расчеты показали их хорошее совпадение. Для двухслойной пластины максимальная температура при установившемся режиме превышает максимальное значение при первом воздействии теплового потока более, чем на  $100^{\circ}\text{C}$ .

## Литература

1. Fickett W., Davis W.C. Detonation: Theory and Experiment. Dover Publications, 2000. 386 с.
2. Smirnov N.N., Nikitin V.F. Numerical simulation of detonation wave structures in hydrogen-air mixtures // Combustion, Explosion, and Shock Waves. 2005. № 41(4). С.405–412. DOI: 10.1007/s10573 005 0146 7
3. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. М.: Наука, 1989. 250 с.
4. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. - М.: Наука, 1979. 310 с.

## Расчет нестационарных аэродинамических характеристик произвольного профиля

© Абидуев Пурбо Ламажапович

кандидат физико-математических наук,

ученое звание доцент,

заведующий кафедры системного анализа и компьютерного моделирования

Бурятский Государственный университет

Россия, 670000, Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а

apl087@yandex.ru

© Дармаев Тумэн Гомбоцыренович

кандидат физико-математических наук,

ученое звание доцент,

доцент кафедры информационных систем и методов искусственного интеллекта

Бурятский Государственный университет

Россия, 670000, Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а

dtumen@mail.ru

**Ключевые слова:** Произвольный профиль, нестационарное обтекание, идеальная несжимаемая жидкость, интегральное уравнение Фредгольма второго рода, аэродинамические характеристики.

Рассматривается нестационарное безотрывное обтекание плоским потенциальным потоком несжимаемой жидкости произвольного профиля, колеблющегося как твердое тело с малой амплитудой по некоторому гармоническому закону. Для вычисления величин стационарной скорости и амплитудного значения нестационарной относительной скорости используется метод расчета интегральных уравнений Фредгольма второго рода [1]-[3], основанный на замене профиля вписанным  $N$ -угольником приводящей к системе алгебраических уравнений. Критическая линия тока стационарного потока, необходимая для вычисления несобственных интегралов для нестационарной части, определяется как решение задачи Коши. При этом несобственные интегралы вычислялись по формуле прямоугольников с координатами в средних точках. Выведены формулы для расчета правых частей системы алгебраических уравнений для изгибно-крутильных колебаний профиля без деформации. На основе работы [4] выведены формулы для расчета коэффициентов аэродинамических сил и момента, действующих на колеблющийся профиль. На основе предложенного метода созданы алгоритм решения и программа на ФОРТРАН. Численно рассчитаны стационарные и нестационарные части относительной скорости, а также нестационарные аэродинамические характеристики изгибно-крутильных колебаний семейства профилей «ЦА-ГИ» при разных толщинах, числах Струхала и углах закручивания.

## Литература

1. Дармаев Т.Г., Дамбаев Ж.Г. О нестационарном обтекании произвольного профиля // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2013. № 2. С.60-69

2. Дармаев Т.Г., Цыдыпов Б.Д. Метод расчета стационарного обтекания произвольного профиля // Вестник БГУ. Математика, информатика. 2016. Выпуск 3. С.51-56. DOI: 10.18101/2304-5728-2016-3-51-56
3. Абидуев П. Л., Дармаев Т. Г., Дамбаев Ж. Г. Метод расчета нестационарного обтекания произвольного профиля // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2019. № 4. С. 65–72. DOI: 10.18101/2304-5728-2019-4-65-72
4. Рябченко В.П. Нестационарные аэродинамические характеристики решёток произвольных профилей, вибрирующих в потенциальном потоке несжимаемой жидкости // Известия АН СССР. МЖГ. 1974. № 1. С.15-20.



**Обратные задачи определения параметров, зависящего от времени в псевдопараболическом уравнении с нелокальными граничными условиями**

© **Аблабеков Бактыбай Сапарбекович**

доктор физико-математических наук,  
ученое звание профессор,  
профессор

Кыргызский национальный университет имени Жусупа Баласагына  
Кыргызстан, 720033, Бишкек, ул.Фрунзе 547  
ablabekov\_63@mail.ru

© **Курманбаева Айнура Кудайбергеновна**

кандидат физико-математических наук,  
ученое звание доцент,  
доцент кафедры Высшей математики

Кыргызский государственный технический университет им. И.Раззакова  
Кыргызстан, 720044, Бишкек, проспект Ч. Айтматова 44  
ainura1971@mail.ru

**Ключевые слова:** Обратная задача, псевдопараболическое уравнение, нелокальная начально-краевая задача, существование, единственность, метод операторных уравнений Вольтерра.

Эта работа посвящена исследованию обратных задач определения источника и коэффициента, зависящего от времени в псевдопараболическом уравнении с нелокальными граничными условиями. Следует отметить, что большая часть исследованных аналогичных обратных задач рассматривались в случае с локальными граничными условиями [1,2].

**Постановка задачи.** В области рассмотрим краевую задачу с нелокальными граничными условиями

$$u_t(x, t) - u_{xxt}(x, t) - u_{xx}(x, t) + q(t)u(x, t) = F(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (2)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t), u_x(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3)$$

где  $\Omega_T = \{(x, t) \mid 0 < x < \pi, 0 < t \leq T\}$ ,  $u_0(x)$  – заданная функция.

**Обратная задача 1.** Пусть функция  $q(t)$  – задана,  $F(x, t) = f(t)h(x, t)$ , где  $h(x, t)$  – известная функция. Требуется найти пару функций  $\{u(x, t), f(t)\}$  из условий (1) – (3) по следующей дополнительной информации

$$u(x_0, t) = \psi(t), \quad 0 < x_0 < \pi, 0 \leq t \leq T. \quad (4)$$

**Теорема 1.** Пусть выполнены следующие условия:

1.  $u_0(x) \in C^4[0, \pi]$ ,  $u_0(0) = u_0(\pi)$ ,  $u_0'(0) = 0$ ,  $\psi(t) \in C^1[0, T]$ ,  $u_0(x_0) = \psi(0)$ ,

2.  $q(t) \in C[0, T]$ ,  $h(x, t) \in C^{(2,1)}(\bar{\Omega}_T)$ ,  $|h(x_0, t)| \geq h_0 > 0$ ,  $\forall t \in [0, T]$ ,  $h(0, t) = h(\pi, t) = 0$ ,  $h''(0, t) = h''(\pi, t) = 0$ .

Тогда при некотором  $T > 0$ , определяемыми известными величинами, решение обратной задачи 1 на отрезке  $[0, T]$  существует, единственно и принадлежит классу  $C[0, T]$ .

**Обратная задача 2.** Пусть функция  $F(x, t)$ —задана. Требуется найти пару функций  $\{u(x, t), q(t)\}$  из условий (1) – (4).

**Теорема 2.** Пусть выполнены следующие условия:

1.  $u_0(x) \in C^4[0, \pi]$ ,  $u_0(0) = u_0(\pi)$ ,  $u'_0(0) = 0$ ,  $\psi(t) \in C^1[0, T]$ ,  $u_0(x_0) = \psi(0)$ ,
2.  $F(x, t) \in C^{(2,1)}(\bar{\Omega}_T)$ ,  $|\psi(t)| \geq \psi_0 > 0$ ,  $\forall t \in [0, T]$ ,  $F(0, t) = F(\pi, t) = 0$ ,  $F''(0, t) = F''(\pi, t) = 0$ .

Тогда при некотором малом  $T > 0$ , определяемыми известными величинами, решение обратной задачи 2 на отрезке  $[0, T]$  существует, единственно и принадлежит классу  $C[0, T]$ .

## Литература

1. Аблабеков Б.С. Обратные задачи для дифференциальных уравнений третьего порядка. — LAP LAMBERT Academic Publishing 2011. — 291 с
2. Аблабеков Б.С., Аблабекова А.Б. Обратная задача определения коэффициента в уравнении Аллера с переопределением во внутренней точке // Известия КГТУ №1 (69), 2024. С.235-241.

## О существовании трех симметричных решений одной краевой задачи

© **Абыллаев Бахытбай Махсетбай улы**

аспирант

Новосибирский государственный университет

Россия, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2

b.abyllaev@g.nsu.ru

© **Чумакова Наталия Алексеевна**

кандидат технических наук,

старший научный сотрудник

Институт катализа им. Г. К. Борескова СО РАН

Россия, 630090, Новосибирск, пр. Акад. Лаврентьева, 5

доцент, кафедра дифференциальных уравнений

Новосибирский государственный университет

Россия, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2

chum@catalysis.ru

**Ключевые слова:** реверс-процесс, неподвижный слой катализатора, математическое моделирование, скользящий режим, краевая задача для системы нелинейных ОДУ, симметричность решения, бифуркация, область множественности, высота слоя катализатора, скорость потока, максимальная температура.

**Благодарности** Работа выполнена частично при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания Института катализа им. Г. К. Борескова СО РАН (проект FWUR-2024-0037).

В работе представлено теоретическое и численное исследование нестационарного реверс-процесса в неподвижном слое катализатора. Такой процесс характеризуется периодическим изменением направления газового потока [1], что приводит к формированию устойчивых профилей температуры и концентрации в реакторе. Основными параметрами управления процессом являются высота слоя катализатора  $H$  и линейная скорость потока газа  $v$ .

Рассматривается модель скользящих режимов для реакции первого порядка, которая соответствует достаточно частому изменению направления потока. Задача сводится к краевой задаче с дополнительно введенным параметром (полученная на выходе из слоя степень превращения вещества) для системы двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно температуры и концентрации вещества на интервале  $[0, H]$ , причем  $H$  монотонно зависит от введенного параметра. Это позволяет одновременно получить зависимость максимальной температуры от  $H$  при произвольном фиксированном значении скорости потока газа  $v$ .

В работе обоснована симметричность решений относительно середины интервала. проведен анализ области параметров управления  $(H, v)$ , в которой, как показано в [2, 3], возможно существование трех различных решений, что свидетельствует о наличии множественности скользящих режимов реверс-процесса.

Численно обнаружены бифуркационные кривые на плоскости параметров  $(H, v)$ , на которых при изменении параметров управления наблюдается резкий скачок температуры. Это связано с тем, что на поверхности состояний системы, определяемой максимальной температурой, имеется две кривые складок, пересечение которых соответствует точке сборки Уитни. В работе численно построены границы области множественности решений.

Новизна настоящей работы заключается в исследовании параметрической чувствительности, а именно, подробно проанализирована зависимость максимальной температуры от линейной скорости потока  $v$  при различных значениях  $H$ .

Таким образом, на основе построенного нелокального параметрического портрета (зависимость максимальной температуры от  $(H, v)$ ), численно получены не только  $S$ -образные кривые, но и изолированные семейства решений в сечениях  $H = \text{const}$  поверхности состояний системы.

## Литература

1. Матрос Ю. Ш. Каталитические процессы в нестационарных условиях. Наука, Новосибирск, 1987.
2. Чумакова Н. А., Матрос Ю. Ш. О скользящих режимах в модели каталитического процесса // Краевые задачи для уравнений с частными производными. Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, 1990. С. 88–111.
3. Чумакова Н. А. Математическое моделирование реакторов с неподвижным слоем катализатора при заданном гидравлическом сопротивлении. Автореферат дисс. ... канд. тех. наук. ИК СО РАН, Новосибирск, 1995.

## Некоторые рекомендации по выбору формул обращения преобразования Радона

© Аниконов Дмитрий Сергеевич

доктор физико-математических наук, профессор  
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН  
Россия, 630008, Новосибирск, Пр. ак. Коптюга, 4  
anik@math.nsc.ru

**Благодарности:** Работа выполнена по программе госзадания ИМ СО РАН FWNF-2022-0009

Преобразование Радона определяется как интегрирование функции по гиперплоскостям в конечномерном евклидовом пространстве. Оно находит широкое применение в различных задачах зондирования неизвестных сред физическими сигналами. При этом основным вопросом является обращение преобразования, т. е. проблема нахождения подынтегральной функции по заданному семейству интегралов. Вероятно, самым известным таким применением является рентгеновская томография для медицины и промышленности. К другим областям применения можно отнести дефектоскопию, геологию, геофизику и экологию.

В этих направлениях более частому применению в основном препятствует недостаточное исследование самой теории преобразования Радона. Одним из имеющихся недостатков является отсутствие доказанных формул обращения преобразования Радона для важного случая негладких подынтегральных функций. Настоящая работа направлена на устранение этого пробела. Сообщение содержит новые формулы обращения в классе разрывных функций для четно мерного и нечетно мерного объемлющего пространства. Важно отметить, что для численной реализации четно мерный случай в некоторых аспектах труднее нечетно мерного. К этим формулам добавляется метод подъема, позволяющий сводить проблему обращения от четно мерного случая к нечетно мерному. Поэтому для исследователя, использующего разрывные подынтегральные функции можно посоветовать придерживаться следующей рекомендации. В нечетно мерном варианте следует непосредственно использовать соответствующую формулу обращения. В четно мерном случае целесообразно перейти к нечетно мерному варианту и только потом применить формулу обращения. Теоретическое обоснование предлагаемой здесь концепции содержится в нескольких публикациях автора и пока находится в печати.

## Одна теорема вложения для пространств функций с переменной гладкостью

© **Артюшин Александр Николаевич**

кандидат физико-математических наук,

ассистент

Новосибирский государственный университет

Россия, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2

alesxp3@yandex.ru

**Ключевые слова:** дробные производные, переменная гладкость, переменный показатель суммируемости, теоремы вложения.

Пусть  $Q = (0, T) \times (0, 1)$ ,  $0 < \nu, \mu < 1$ ,  $1 < p < \infty$ . Пусть  $u(t, x) \in L_p(Q)$  такова, что

$$\partial_t^\nu u(t, x) \in L_p(Q), \quad \partial_x^\mu u(t, x) \in L_p(Q).$$

Предположим, что

$$\frac{1}{p} > \frac{\nu\mu}{\nu + \mu},$$

и положим

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\nu\mu}{\nu + \mu}.$$

Тогда, согласно известной теореме вложения справедливо включение  $u(t, x) \in L_q(Q)$ .

Нас будет интересовать случай переменных показателей гладкости  $\nu = \nu(x)$ ,  $\mu = \mu(t)$ . Вопросы такого рода возникают, например, при анализе уравнения дробной диффузии с переменным показателем производной

$$\partial_t^{\nu(x)} u(t, x) - \Delta u(t, x) = f(t, x).$$

В работе [1] был рассмотрен докритический случай  $0 < \nu(x), \mu(t) < 1/p$ . Оказывается, что при минимальных естественных условиях для переменных показателей имеет место соответствующая теорема вложения.

В настоящем докладе рассматривается случай, когда эти неравенства могут нарушаться. При некоторых дополнительных условиях теорема вложения остается справедливой.

## Литература

1. Артюшин А. Н. Функциональные пространства типа  $L_{p(\cdot)}(L_{q(\cdot)})$  и теоремы вложения пространств функций с переменной гладкостью // Сиб. мат. жур. 2025. № 1. Т. 66, С. 3–16. DOI: 10.33048/smzh.2025.66.101.

## Краевые задачи для нагруженного гиперболического уравнения с инволютивным отклонением

© **Аттаев Анатолий Хусеевич**

кандидат физико-математических наук,

ученое звание доцент,

ведущий научный сотрудник

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН

Россия, 360017, Нальчик, ул. Шортанова, 89А

attaev.anatoly@yandex.ru

**Ключевые слова:** волновое уравнение, нагруженное уравнение, краевые задачи, инволютивное отклонение, задача Коши, задача Гурса, задача Дарбу, граничное управление, начальное состояние, конечное состояние.

Объектом исследования является нагруженное гиперболическое уравнение с инволютивным отклонением следующего вида

$$u_{xx} - u_{yy} = \lambda u(x_0, 1 - y) \quad (1)$$

в области  $\Omega$ , ограниченной характеристиками  $x - y = 0$ ,  $x + y = 1$  и отрезком прямой  $y = 0$  исследуются классические задачи Коши, Гурса и Дарбу. В прямоугольной области ограниченной отрезками прямых  $x = 0$ ,  $x = l$  и  $y = 0$ ,  $y = T$  исследуется задача граничного управления, состоящая в нахождении таких граничных управлений  $\mu(y) = u(0, y)$ ,  $\nu(y) = u(l, y)$ , которые за минимальный промежуток времени переводят систему (1),

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad u_y(x, 0) = \psi_0(x)$$

из начального состояния в конечное состояние

$$u(x, T) = \varphi_1(x), \quad u_y(x, T) = \psi_1(x).$$

## О единственности консервативного решения задачи о колебаниях каскадной системы тел на упругом стержне

© Баргуев Сергей Гаврилович

кандидат физико-математических наук,

ученое звание доцент,

доцент кафедры Высшей математики и общепрофессиональных дисциплин

Бурятский институт инфокоммуникаций (филиал) «Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики»

г. Улан-Удэ ул. Трубочеева 152.

barguev@yandex.ru

© Ханхасаев Владислав Николаевич

кандидат физико-математических наук,

ученое звание доцент,

доцент кафедры Математики им. Ц.Б. Шойнжурова

Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления,

Россия, Улан-Удэ, 670033 ул. Ключевская, д. 40В, стр. 1

доцент кафедры Фундаментальной Математики

Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова,

Россия, Улан-Удэ, 670000, ул. Смолина, д. 24а

hanhvladnick@mail.ru.

© Баиров Сафрон Анатольевич

соискатель кафедры Математики им. Ц.Б. Шойнжурова,

Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления,

Россия, Улан-Удэ, 670033 ул. Ключевская, д. 40В, стр. 1

bairov.sofron@gmail.com.

**Ключевые слова:** начально-краевая задача, упругий стержень, твердые тела, гибридная система дифференциальных уравнений, обобщенное решение, единственность, консервативность.

В данной работе доказывается единственность приближенных решений, записываемых в виде конечных рядов по собственным функциям или формам начально-краевой задачи о колебаниях системы упругого стержня с закрепленным на нем произвольным числом каскадно расположенных твердых тел. При этом используется условие линейной независимости этих собственных форм. Гибридная система дифференциальных уравнений движения указанной механической системы, полученной вариационным принципом Гамильтона, имеет вид:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{z}_1 + c_1 (z_1 - u(a, t)) - c_2 (z_2 - z_1) = 0, \\ m_i \ddot{z}_i + c_i (z_i - z_{i-1}) - c_{i+1} (z_{i+1} - z_i) = 0, & (i = 2, \dots, n-1), \\ \dots \\ m_n \ddot{z}_n + c_n (z_n - z_{n-1}) = 0, \\ \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = c_1 (z_1 - u(x, t)) \delta(x - a), \end{cases} \quad (1)$$



где  $z_i = z_i(t)$  - смещение твердых тел,  $u = u(x, t)$  - поперечные смещения точек стержня,  $x$  - координата точек стержня,  $t$  - время,  $m_i$  - масса  $i$ -го твердого тела,  $c_i$  - коэффициенты жесткости пружин,  $\rho$  - плотность стержня,  $F$  - площадь поперечного сечения стержня,  $E$  - модуль упругости стержня,  $J$  - момент инерции сечения стержня относительно нейтральной оси,  $a$  - координата точки закрепления на стержне системы твердых тел,  $\delta(x - a)$  - функция Дирака.

Краевые условия выражают обращение в нуль на концах стержня длины допустимых четырех комбинаций из множества значений:

$$u(0, t), u(l, t), u_x(0, t), u_x(l, t), u_{xx}(0, t), u_{xx}(l, t), u_{xxx}(0, t), u_{xxx}(l, t). \quad (2)$$

Заданы начальные условия:

$$\begin{aligned} z_{mi}(0) &= z_{mi0}, i = 1, 2, \dots, n, \\ z'_{mi}(0) &= z'_{mi0}, i = 1, 2, \dots, n, \\ u_m(x, 0) &= \varphi_m(x), \\ u_{mt}(x, 0) &= \psi_{nt}(x). \end{aligned} \quad (3)$$

Начально-краевая задача (3,2,3) описывает изгибные колебания системы упругого стержня с каскадно (друг на друге) расположенными твердыми телами, закрепленными на нем и между собой с помощью пружин. В работе [1] исследовалась система с упругим стержнем и одним телом, расположенным на нём.

Доказывается теорема о единственности обобщенных решений корректно поставленной начально-краевой задачи и выводится условие консервативности приведенной гибридной системы:

$$\begin{aligned} &u_t(l, t)u_{xxx}(l, t) - u_t(0, t)u_{xxx}(0, t) + \\ &+ u_{xt}(0, t)u_{xx}(0, t) - u_{xt}(l, t)u_{xx}(l, t) = 0. \end{aligned}$$

## Литература

1. Barguev, S. G., Khankhasaev V. N., Bairov S. A., Existence and Uniqueness of a Generalized Solution to the Initial-Boundary Value Problem Describing Oscillations of Hybrid System Consisting of Elastic Rod with Attached Rigid Body // Journal of Mathematical Sciences. – 2024. – Vol. 284, No. 2. – P. 196-215. – DOI 10.1007/s10958-024-07343-2. – EDN RXTUWO.

## О разрешимости краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений с вырождением

© Баротов Бахтовар Хурсанкулович

аспирант

Новосибирский государственный университет

Россия, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 1

b.barotov@g.nsu.ru

© Кожанов Александр Иванович

доктор физико-математических наук,

ученое звание профессор,

главный научный сотрудник

Институт математика им. С.Л. Соболева СО РАН

Россия, 630090, Новосибирск, пр. Коптюга, 4

kozhanov@math.nsc.ru

**Ключевые слова:** интегро-дифференциальные уравнения, вырождение, краевые задачи, регулярные решеных, существование, единственность.

В работе изучается разрешимость в пространствах С.Л. Соболева интегро - дифференциальных уравнений

$$h_1(t)u_{tt}(t) + h_0(t)u_t(t) + c(t)u - \int_0^t R(t, \tau)u(\tau)d\tau = f(t),$$

$$h_1(t)u_{tt}(x, t) + h_0(t)\Delta u(x, t) + c(x, t)u - \int_0^t R(t - \tau)\Delta u(x, \tau)d\tau = f(x, t),$$

в которых  $t \in (0, T)$ , функции  $h_1(t)$  и  $h_0(t)$  могут обращаться в нуль на отрезке  $[0, T]$ ,  $\Delta$ - оператор Лапласа, действующий по пространственным переменным. Для изучаемых задач будут доказаны теоремы существования и единственности регулярных решений-то есть решений, имеющих все обобщенные по С.Л.Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.

**О неустановившемся движении конечного осесимметричного объёма идеальной несжимаемой жидкости**

© **Белых Владимир Никитич**

доктор физико-математических наук,  
ученое звание старший научный сотрудник,  
ведущий научный сотрудник  
Институт математики им. С.Л. Соболева  
Россия, 630090, Город Новосибирск, ул. Коптюга, 4  
belykh@math.nsc.ru

**Ключевые слова:** идеальная жидкость, осесимметричная задача, свободная граница, класс Жевре, задача Коши

Исследование выполнено в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0008).

Доказана корректность в классе Жевре задачи о нестационарном движении конечного осесимметричного объёма идеальной несжимаемой жидкости (“капли”) под действием начального импульса давления. Т.е. дано строгое описание начальной стадии движения осесимметричной капли, предшествующей моменту её эволюционного разрушения (“blow-up”). Полученный результат позволяет мотивированно высказать конструктивную гипотезу о возможном характере зарождения особых точек (сингулярностей) решения задачи путём организации аналитического его продолжения из окрестности точки  $t = 0$  “далеко” по времени. При этом класс Жевре с параметром  $2 > \alpha > 1$  позволяет исследовать проблему с финитными бесконечно гладкими данными Коши.

## Градиентный метод решения обратной задачи для кинетического уравнения переноса в $P_n$ – приближении

© Бобоев Кодир Сабурович

кандидат физико-математических наук, доцент

Сибирский университет потребительской кооперации (СибУПК)

Россия, 630087, Сибирский федеральный округ, Новосибирская область, г. Новосибирск, проспект Карла Маркса, 26

Рассмотрим нестационарное кинетическое уравнение переноса излучения нейтронов для анизотропного рассеяния в случае плоско-параллельной геометрии [1-3].

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma(x)u = Su, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (1)$$

где

$$Su = \frac{1}{4\pi} \sigma_s(x) \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 g(x, \mu_0) u(x, t, \mu') d\mu' d\phi$$

с начальными и граничными условиями

$$u|_{t=0} = \phi(x, \mu) \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \text{при } \mu > 0, \quad u|_{t=H} = 0, \quad \text{при } \mu < 0 \quad (3)$$

Пусть  $u(x, t, \mu)$ -решение уравнения (1). Рассмотрим ортогональную полную в  $(-1, 1)$  систему полиномов Лежандра  $\{P_i\}$ , и разложение Фурье [3]

$$\phi(x, t, \mu) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2i+1}{2} \phi_i(x, t) P_{i-1}(\mu) \quad (4)$$

Используя разложение (4) из уравнения (1) получаем эквивалентную бесконечную систему симметрических гиперболических дифференциальных уравнений первого порядка по Фридрихсу относительно коэффициентов  $\{\phi_i(x, t)\}$  [2].

$$B \frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} + Cu = Bf \quad (5)$$

$$B = \text{diag}(1, 3, 5, \dots, 2n-1), \quad \bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

$$A = (a_{ij}), \quad a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = i, \quad a_{ij} = 0 \text{ иначе}$$

$$C = \text{diag} \left( \sigma(x) - \frac{1}{2} \sigma_s(x), 3 \left( \sigma(x) - \frac{1}{2} \sigma_s(x) \right), \dots, (2n-1) \left( \sigma(x) - \frac{1}{2} \sigma_s(x) \right) \right)$$

Согласно градиентному методу для решения обратной задачи [4,6,7] системы метода сферических гармоник (СМГ) требуется построить функционал

$$J(\sigma) = \int_0^T \int_{-1}^1 [u(t, 0, \mu, \sigma) - \alpha(t, \mu)]^2 d\mu dt \quad (6)$$

Постараемся найти  $\sigma(x)$  при котором функционал принимал бы минимальное значение.

## Литература

1. Романов В.Г, Кабанихин С.И, Бобоев К. Обратная задача для Рn-приближения кинетического уравнения переноса. ДАН СССР т. 276, №2, - 1984.
2. Годунов С.К. Уравнения математической физики. - М.:Наука, - 1971. - 416 с.
3. Султангазин У.М. Методы сферических гармоник и дискретных ординат в задачах кинетической теории переноса. Изд-во Наука, Каз. ССР, Алма-Ата , 1979.
4. Романов В.Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений. - Новосибирск: НГУ, - 1973. - 252с.
5. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. - М.:Наука, - 1988. - 549с.
6. Бобоев К.С. Обоснование сходимости для конечно-разностного решения одной обратной задачи для приближения кинетического уравнения переноса.// Труды международной конференции «Вычислительная математика и математическая геофизика». Новосибирск: Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 2018.-с.68-71.
7. Бобоев К.С. Решение обратной задачи для кинетического уравнения переноса нейтронов методом оптимизации. В сб. материалов Международной научно-практической конференции «Новые достижения в области естественных наук и информационных технологий», Душанбе Российско-Таджикский (Славянский) университет 2023-с.16-18.

## О разрешимости одной краевой задачи для псевдогиперболического уравнения шестого порядка

© Бондарь Лина Николаевна

кандидат физико-математических наук,  
старший научный сотрудник  
Новосибирский государственный университет  
Россия, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 1  
l.bondar@g.nsu.ru

© Ма Синь

Новосибирский государственный университет  
Россия, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 1  
s.ma2@g.nsu.ru

**Ключевые слова:** псевдогиперболическое уравнение, краевая задача, обобщенное решение, анизотропное соболевское пространство, обобщенное уравнение Буссинеска.

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение No 075-15-2025-349 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации.

Рассматривается первая краевая задача для одного уравнения, не разрешенного относительно старшей производной:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_0 I + a_1 \Delta + a_2 \Delta^2) D_t^2 u + (b_0 I + b_1 \Delta + b_2 \Delta^2) D_t u \\ + (d_0 I + d_1 \Delta + d_2 \Delta^2 + d_3 \Delta^3) u = f(t, x), \\ u \Big|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad D_t u \Big|_{t=0} = \varphi_2(x), \\ u \Big|_S = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_S = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} \Big|_S = 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

в цилиндрической области

$$Q_T = \{(t, x) \in R_+^{n+1} : t \in (0, T), x \in G \subset R^n\},$$

где  $a_1^2 - 4a_0a_2 < 0$ ,  $a_2b_0 \geq 0$ ,  $a_2b_1 \leq 0$ ,  $a_2b_2 \geq 0$ ,  $a_2d_0 \geq 0$ ,  $a_2d_1 \leq 0$ ,  $a_2d_2 \geq 0$ ,  $a_2d_3 < 0$ . Здесь  $G$  —ограниченная область с гладкой границей  $\partial G$ ,  $\nu$  —единичный вектор внешней нормали к  $S = \{t \in (0, T), x \in \partial G\}$ .

Рассматриваемое уравнение относится к классу строго псевдогиперболических уравнений. Этот класс уравнений был введен в монографии [1]. В научной литературе псевдогиперболические уравнения часто именуются уравнениями соболевского типа, что обусловлено пионерскими исследованиями С.Л. Соболева [2] для уравнений, не разрешенных относительно старшей производной.

Уравнение (1) в одномерном случае есть линеаризованная модель обобщенного уравнения Буссинеска [3], которое описывает распространение поверхностных волн. Задача Коши для нелинейных уравнений Буссинеска изучалась в [4, 5, 6].

В работе мы доказываем существование и единственность обобщенного решения краевой задачи (1) в анизотропном соболевском пространстве

$$W_{2,add}^{1,3}(Q_T) = \{u(t, x) \in W_2^{1,3}(Q_T) : \exists D_t \Delta u(t, x) \in L_2(Q_T)\}$$

и устанавливаем оценки решения.

**Теорема.** Пусть  $f(t, x) \in L_2(Q_T)$ ,  $\varphi_1(x) \in W_2^3(G)$ ,  $\varphi_2(x) \in \overset{o}{W}_2^2(G)$ . Тогда краевая задача (1) имеет единственное обобщенное решение  $u(t, x) \in W_{2,add}^{1,3}(Q_T)$ , при этом выполнена оценка

$$\begin{aligned} \|u(t, x), W_2^{1,3}(Q_T)\| + \|D_t \Delta u(t, x), L_2(Q_T)\| \leq c \bigg( & \|f(t, x), L_2(Q_T)\| \\ & + \|\varphi_1(x), W_2^3(G)\| + \|\varphi_2(x), \overset{o}{W}_2^2(G)\| \bigg), \end{aligned}$$

где  $c > 0$  — константа, не зависящая от  $f(t, x)$ ,  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$ .

Доказательство существования обобщенного решения краевой задачи (1) мы проводим методом Галёркина.

## Литература

1. Демиденко Г.В., Успенский С.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.
2. Соболев С.Л. Избранные труды. Т. I. Уравнения математической физики. Вычислительная математика и кубатурные формулы. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, Филиал "Гео"Изд-ва СО РАН, 2003.
3. Pereira P.J.S., Lopes N.D., Trabuco L. Soliton-type and other travelling wave solutions for an improved class of nonlinear sixth-order Boussinesq equations // Nonlinear Dyn. 2015. V. 82. P. 783-818.
4. Умаров. Х.Г. Разрушение и глобальная разрешимость задачи Коши для псевдогиперболического уравнения, связанного с обобщенным уравнением Буссинеска // Сиб. матем. журн. 2022. Т. 63, № 3. С. 672–689. DOI: 10.33048/smzh-2022-63-315.
5. Polat N., Piskin E. Existence and asymptotic behavior of solution of Cauchy problem for the damped sixth-order Boussinesq equation // Acta Math. Appl. Sin. Engl. Ser. 2015. V. 31. P. 735-746. DOI: 10.1007/s10255-012-0174-2.
6. Wang S., Xue H. Global solution for a generalized Boussinesq equation // Appl. Math. Comput. 2008, V. 204, № 1. P. 130-136. DOI: 10.1016/j.amc-2008-06-059.

# О разрешимости задачи Коши для одной псевдогиперболической системы

© Бондарь Лина Николаевна

кандидат физико-математических наук,  
старший научный сотрудник

Новосибирский Государственный университет  
Россия, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 1  
l.bondar@g.nsu.ru

© Мингнарлов Санжар Баходир угли

Новосибирский Государственный университет  
Россия, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 1  
s.mingnarov@g.nsu.ru

**Ключевые слова:** система, не разрешенная относительно старшей производной, псевдогиперболическая система, пространства Соболева, изгибно-крутильные колебания.

## Благодарности

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00370.

В работе рассматривается задача Коши

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(D_t, D_x)U &= F(t, x), \\ U|_{t=0} &= \Phi(x), \quad D_t U|_{t=0} = \Psi(x),\end{aligned}\tag{1}$$

$\mathcal{L}(D_t, D_x)$  имеет вид

$$\mathcal{L}(D_t, D_x) = \begin{pmatrix} I - \alpha_1 D_x^2 & 0 & \varepsilon_1 \\ 0 & I - \alpha_2 D_x^2 & -\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 & -\varepsilon_2 & I - \alpha_3 D_x^2 \end{pmatrix} D_t^2 + \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{12} & l_{22} & l_{23} \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} \end{pmatrix} D_x^4,$$

где  $0 < \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 < 1$ ,  $\alpha_j > 0$ ,  $j = 1, 2, 3$ , и матрица  $(l_{ij})$  положительно определена. Система (1) является не разрешенной относительно старшей производной по времени [1]. Впервые система (1) рассматривалась в [2] при  $l_{ij} = 0$ ,  $i \neq j$ . Она возникает при описании поперечных изгибно-крутильных колебаний упругого стержня. В работе [3] изучена разрешимость задачи Коши для двумерной системы вида (1). В ходе исследования доказаны следующие теоремы.

**Теорема 1.** Для любой функции  $U(t, x) \in W_{2,\gamma}^{2,4}(R^2)$ ,  $\gamma > 0$ , такой, что  $D_t^2 D_x^2 U(t, x) \in L_{2,\gamma}(R^2)$ , имеет место оценка

$$\gamma \left\| (1 + \xi^2)(|\eta| + \gamma + |\xi|) \widehat{U}_\gamma(\eta, \xi), L_2(R^2) \right\| \leq c \left\| \mathcal{L}(D_t, D_x)U(t, x), L_{2,\gamma}(R^2) \right\|$$



с константой  $c > 0$ , не зависящей от  $U(t, x)$ .

**Теорема2.** Пусть  $F(t, x) \in W_{2,\gamma}^{0,1}(R_+^2)$ ,  $\Phi(x) \in W_2^4(R)$ ,  $\Psi(x) \in W_2^3(R)$ . Тогда задача Коши (1) однозначно разрешима в  $W_{2,\gamma}^{2,4}(R_+^2)$ ,  $\gamma > 0$ , таких, что  $D_t^2 D_x^2 U \in L_{2,\gamma}(R_+^2)$ , для решения имеет место оценка:

$$\begin{aligned} & \|U(t, x), W_{2,\gamma}^{2,4}(R_+^2)\| + \|D_t^2 D_x^2 U(t, x), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| \\ & \leq c(\gamma) \left( \|\Phi(x), W_2^4(R)\| + \|\Psi(x), W_2^3(R)\| + \|F(t, x), W_{2,\gamma}^{0,1}(R_+^2)\| \right), \end{aligned}$$

где  $c(\gamma)$  — константа, зависящая от коэффициентов системы и  $\gamma$ .

## Литература

1. Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998. 436 с.
2. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни. Москва: Физматгиз, 1959. 568 с.
3. Bondar L. N. and Demidenko G. V. Solvability of the Cauchy problem for a pseudohyperbolic system // Complex Variables and Elliptic Equations. 2021. 66:6-7. P. 1084-1099.

## Нелокальные задачи с интегральными условиями для некоторых классов уравнений соболевского типа

© Бурюхаев Артур Эдуардович

ассистент

Бурятский государственный университет им. Доржи Банзарова

Россия, 670000, Город Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а

buruhaevartur@gmail.com

**Ключевые слова:** Нелокальные задачи, интегральные условия, уравнения Вольтерра, регулярные решения, существование, единственность.

В [1],[2] предложен подход к исследованию разрешимости нелокальных задач с интегральными условиями, основанный на сведении этих задач к интегральным уравнениям Вольтерра первого рода. В докладе показано, что можно выделить уравнения именно, некоторые уравнения соболевского типа – для которых аналогичный подход сводит изучаемую задачу к интегральным уравнениям Вольтерра второго рода. Тем самым показано, что условия работ [1],[2] могут быть существенно ослаблены.

## Литература

1. Кожанов А.И. Нелокальные задачи с обобщённым условием Самарского-Ионкина для некоторых классов нестационарных дифференциальных уравнений. Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2023, т.509, с. 50-53
2. Кожанов А.И. Нелокальные задачи и задачи с интегральными условиями для дифференциальных уравнений в частных производных. Сводка результатов, нерешённые задачи. Новосибирск, "Наука 2024

## Норма оптимального периодического функционала погрешности квадратурных формул при предельных значениях $p$

© **Васильева Евгения Геннадьевна**

кандидат физико-математических наук,

ученое звание доцент,

доцент кафедры Математики имени Ц.Б. Шойнжурова

Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления,

670013, Россия, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40в,

vasil\_eg@mail.ru

© **Булгатова Елена Николаевна**

кандидат физико-математических наук,

ученое звание доцент,

преподаватель

Чанчуньский университет

130022, Китай, г. Чанчунь, 6543 Weixing Road,

belena77@mail.ru

**Ключевые слова:** : квадратурная формула, сопутствующее число, периодический функционал погрешности, предельные случаи, норма, оптимальность.

Ранее в [1] была получена норма оптимального периодического функционала погрешности в пространстве  $\tilde{L}_p^m(\Delta)$  и уравнение для нахождения сопутствующего числа  $\overset{\circ}{C}$ , входящего в эту норму.

Здесь рассмотрены предельные случаи  $p = 1, p = \infty$ . Получена норма оптимального периодического функционала погрешности в пространствах  $\tilde{L}_\infty^m(\Delta)$  и  $\tilde{L}_1^m(\Delta)$ , а также получены значения сопутствующего числа.

Пусть  $\Delta = \{x \in E : 0 \leq x < 1\}$ .

Пространство  $\tilde{L}_\infty^m(\Delta)$  - множество функций с единичным периодом, имеющих абсолютно непрерывную производную  $(m-1)$ -го порядка и существенно ограниченную измеримую обобщенную производную  $m$ -го порядка в  $\Delta$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\tilde{l}_0(x) = 1 - \sum \delta(x-\beta)$ - периодический функционал погрешности, принадлежащий пространству  $\tilde{L}_\infty^{m*}(\Delta)$ . Тогда функционал  $\tilde{l}_0(\frac{x}{h})$  имеет вид

$$\langle \tilde{l}_0(\frac{x}{h}), \varphi \rangle = \int_0^1 [B_m(x) - B_m(\frac{1}{4})] \varphi^{(m)} dx, \forall \varphi \in \tilde{L}_\infty^m(\Delta)$$

и его норма равна

$$\|\tilde{l}_0(\frac{x}{h})\|_{\tilde{L}_\infty^{m*}(\Delta)} = h^m \int_0^1 |B_m(x) - B_m(\frac{1}{4})| dx$$

Рассмотрим пространство  $\tilde{L}_1^m(\Delta)$  - множество всех периодических функций, имеющих на  $\bar{\Delta}$  абсолютно непрерывную производную  $(m - 1)$ -го порядка и обобщенную производную  $m$ -го порядка, с конечной нормой

$$\|\varphi\|_{\tilde{L}_1^m(\Delta)} = \int_{\Delta} \|\varphi^{(m)}\| dx$$

**Теорема 2.** Если  $\tilde{l}_0(x)$  - периодический функционал, принадлежащий  $\tilde{L}_1^{m*}(\Delta)$ , то

$$\|\tilde{l}_0(x)\|_{\tilde{L}_1^{m*}(\Delta)} = \max_{x \in \bar{\Delta}} |B_m(x) + \overset{\circ}{C}|,$$

где  $\overset{\circ}{C} = \frac{B_m(0) + B_m(0,5)}{2}$ .

## Литература

1. Васильева Е.Г. Норма оптимального периодического функционала погрешности квадратурных формул // Образование и наука: материалы национальной конференции 26-28 ноября 2018 / Вост.-Сиб. гос. ун-т технологий и упр.; ред. И. Г. Сизов [и др.]. - Улан-Удэ: Издательство ВСГУТУ, 2018. - С. 253-260 -  
URL: <https://esstu.bookonlime.ru/Reader/Book/2019020812124600800000444525>  
<https://esstu.ru/library/book2018/> (дата обращения 04.07.2025)

## О разрешимости эллиптических псевдодифференциальных уравнений

© Васильев Владимир Борисович

доктор физико-математических наук,  
 профессор, Белгородский государственный  
 национальный-исследовательский университет  
 Россия, 308015, Белгород, ул. Победы, 85  
 vbv57@inbox.ru

© Сопова Татьяна Владимировна

аспирант, Белгородский государственный  
 национальный-исследовательский университет  
 Россия, 308015, Белгород, ул. Победы, 85  
 sopova\_t@bsuedu.ru

**Ключевые слова:** псевдодифференциальное уравнение, конус, волновая факторизация, символ, индекс, решение, условие разрешимости.

Рассматривается уравнение [2]

$$(Au)(x) = v(x), \quad x \in C, \quad (1)$$

в пространстве Соболева–Слободецкого  $H^s(C)$  [1, 2], где  $C \subset \mathbb{R}^m$  – выпуклый острый конус,  $A$  – модельный псевдодифференциальный оператор с символом  $A(\xi)$ , удовлетворяющим условию

$$c_1(1 + |\xi|)^\alpha \leq |A(\xi)| \leq c_2(1 + |\xi|)^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

с положительными постоянными  $c_1, c_2$ ,

$$(Au)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^m} e^{i(x-y) \cdot \xi} d\xi dy.$$

Здесь будет рассмотрен конкретный конус  $C_a \subset \mathbb{R}^3$  вида

$$C_a = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = (x_1, x_2, x_3), x_2 > a|x_1|, x_3 > 0, a > 0\}.$$

Он представляет собой прямое произведение двумерного конуса  $C_+^a = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), x_2 > a|x_1|, a > 0\}$  и положительной полуоси  $\mathbb{R}_+ = \{x_3 \in \mathbb{R} : x_3 > 0\}$ . Отметим, что в случае полупространства  $\mathbb{R}_+^3$  полное исследование уравнения (1) приведено в работе [1].

В конструкции решения при дополнительных ограничениях на символ участвует оператор

$$(B_3u)(x) = \lim_{\substack{* \\ C_a \ni \tau \rightarrow 0}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{u(y_1, y_2, y_3) dy}{((x_1 - y_1 + i\tau_1)^2 - a^2(x_2 - y_2 + i\tau_2)^2)(x_3 - y_3 + i\tau_3)},$$

однако в некоторых случаях решение оказывается в более узком классе при заданной правой части  $v \in H^{s-\alpha}(C)$ .

Введем оператор

$$(B_2 u)(x) = \lim_{\substack{C_+^a \ni (\tau_1, \tau_2) \rightarrow 0 \\ \mathbb{R}^2}} \int \frac{u(y_1, y_2, y_3) dy_1 dy_2}{((x_1 - y_1 + i\tau_1)^2 - a^2(x_2 - y_2 + i\tau_2)^2)}.$$

Принципиальным моментом является наличие волновой факторизации

$$A(\xi) = A_{\neq}(\xi) \cdot A_{=}(\xi)$$

для символа  $A(\xi)$  [2], связанная с аналитическим продолжением в радиальные трубчатые области над конусом [3].

**Теорема.** Пусть символ  $A(\xi)$  допускает волновую факторизацию относительно конуса  $C_a$  с индексом  $\varkappa$  таким, что  $\varkappa - s = -1 + \varepsilon$ ,  $|\varepsilon| < 1/2$ . Тогда решение уравнения (1) может быть единственным образом представлено в виде

$$\tilde{w}(\xi) = \frac{1}{A_{\neq}(\xi)(\xi_3 + i)} (B_2 \tilde{g}_1)(\xi_1, \xi_2) + \tilde{u}(\xi),$$

где  $u \in H^s(C_a)$ ,  $g_1 \in H^{1/2-\varepsilon}(\mathbb{R}^2)$ .

Справедлива априорная оценка

$$\|u\|_s \leq \text{const} \|v\|_{s-\alpha}^+, \quad [g_1]_{1/2-\varepsilon} \leq \text{const} \|v\|_{s-\alpha}^+,$$

где  $[\cdot]_{1/2-\varepsilon}$  обозначает норму в пространстве  $H^{1/2-\varepsilon}(\mathbb{R}^2)$ .

**Следствие.** Решение уравнения (1) принадлежит пространству  $H^s(C_a)$  тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$(B_2 \tilde{g}_1)((\xi_1, \xi_2) \equiv 0. \quad (2)$$

Отметим, что условие (7) эквивалентно следующему

$$(A_{=} \ell v)(x)|_{C_+^a} = 0,$$

где  $\ell v$  – произвольное продолжение  $v$  на  $H^{s-\alpha}(C)$ , и это условие не зависит от выбора продолжения  $\ell$

## Литература

1. Эскин Г.И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973. 236 с.
2. Васильев В.Б. Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. М.: КомКнига, 2010. 135 с.
3. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 350 с.

## Задача типа Коши для линейных неоднородных уравнений с дробной производной Римана–Лиувилля

© Вершинина Дарья Александровна

студент,

лаборант-исследователь

Челябинский государственный университет (ЧелГУ)

Россия, 454001, Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129

vd2400@mail.ru

© Федоров Владимир Евгеньевич

доктор физико-математических наук,

ученое звание профессор,

главный научный сотрудник,

заведующий кафедрой математического анализа

Челябинский государственный университет (ЧелГУ)

Россия, 454001, Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129

kar@csu.ru

**Ключевые слова:** дробная производная Римана–Лиувилля, задача типа Коши, преобразование Лапласа, интегро-дифференциальное уравнение, разрешающее семейство операторов, резольвента оператора, линейное неоднородное уравнение, банахово пространство, существование, единственность.

### Благодарности

Работа поддержана Российским научным фондом (грант №24-11-20002) и Правительством Челябинской области.

Линейный замкнутый плотно определенный оператор  $A$  в банаховом пространстве  $\mathcal{Z}$  называется оператором класса  $\mathcal{C}_{\alpha,R}(\omega)$  при некоторой константе  $\omega \geq 0$ ,  $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$ , если выполняются следующие условия [4]:

- (i) если  $\operatorname{Re} \lambda > \omega$ , то  $\lambda^\alpha \in \rho(A) := \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})\}$ ;
- (ii) существует  $K \in \mathbb{R}_+$ , такое, что при  $\operatorname{Re} \lambda > \omega$  для всех  $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\left\| \frac{d^n}{d\lambda^n} (\lambda^{m-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}) \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K\Gamma(\alpha - m + n + 1)}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^{\alpha - m + n + 1}}.$$

Рассмотрим задачу типа Коши

$$D^{\alpha-1}z(0) = z_0, \tag{1}$$

для линейного неоднородного уравнения

$$D^\alpha z(t) = Az(t) + f(t), \quad t \in (0, T], \tag{2}$$

где  $\alpha \in (0, 1]$ ,  $A \in \mathcal{C}_{\alpha,R}(\omega)$ ,  $f : [0, T] \rightarrow \mathcal{Z}$ ,  $D^\beta$  — дробная производная Римана – Лиувилля при  $\beta > 0$  или дробный интеграл Римана – Лиувилля при  $\beta \leq 0$ . Решением

задачи (3), (2) назовем такую функцию  $z \in C((0, T]; D_A) \cap L_1(0, T; \mathcal{Z})$ , что  $D^{\alpha-1}z \in C([0, T]; \mathcal{Z}) \cap C^1((0, T]; \mathcal{Z})$ , выполняются условия (3) и равенство (2) при  $t \in (0, T]$ .

Пусть  $A \in \mathcal{C}_{\alpha, R}(\omega)$ ,  $H(\lambda) := \lambda^{m-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}$ , для  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$  определим в соответствии с формулой Филлипса [2, 3]

$$\mathcal{S}_n(t) := e^{-nt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (n(n+\omega)t)^{k+1}}{k!(k+1)!} H^{(k)}(n+\omega).$$

Определим  $Z(t) := s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}_n(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ .

**Теорема** Пусть  $\alpha \in (0, 1]$ ,  $A \in \mathcal{C}_{\alpha, R}(\omega)$ ,  $z_0 \in D_A$ , и выполняется одно из условий:

- (i)  $t^{\alpha-1}f(t) \in L_1(0, T; D_A)$ ;
- (ii)  $t^{\alpha-1}f(t) \in L_1(0, T; \mathcal{Z})$ ,  $f \in W_1^1(0, T; \mathcal{Z})$ .

Тогда функция

$$z(t) = Z(t)z_0 + \int_0^t Z(t-s)f(s)ds.$$

является единственным решением задачи типа Коши (3), (2).

## Литература

1. Fedorov V.E., Vershinina D.A. Strongly continuous resolving families of equations with Riemann–Liouville derivative // Journal of Mathematical Sciences. 2025. Vol.287, no.1. P.52–68. DOI: 10.1007/s10958-025-07564-z.
2. R. S. Phillips An inversion formula for Laplace transforms and semi-groups of linear operators // Annals of Mathematics. 1954. Vol.59. P.325–356.
3. E. Hille, R. S. Phillips Functional Analysis and Semi-Groups. American Mathematical Society, 1957. 333 с.



## Оценки решений разностных уравнений и бесконечных систем линейных уравнений

© Волков Юрий Степанович

доктор физико-математических наук,

ученое звание доцент,

главный научный сотрудник

Институт математики им.С.Л.Соболева СО РАН

Россия, 630090, Новосибирск, пр. Коптюга, 4

volkov@math.nsc.ru

**Ключевые слова:** разностное уравнение, система линейных уравнений, дважды бесконечная матрица, норма обратной матрицы, интерполяция на прямой, кубические сплайны.

### Благодарности

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF–2022–0015).

В задаче экстремальной функциональной интерполяции рассмотрен подход рассмотрения решения разностного уравнения путём перехода к изучению систем уравнений с дважды бесконечной матрицей или циркулянтном. Установлены эффективные оценки решений таких систем уравнений в  $p$ -норме, а также оценки  $p$ -норм обратных матриц рассматриваемых систем уравнений [1, 2]. Получено усиление результата Ю.Н.Субботина. Показано, что ряд хорошо известных для случая конечных систем линейных уравнений оценок норм решения через величину диагонального преобладания справедливы и для дважды бесконечных систем уравнений. Полученные оценки используются в задачах интерполяции сплайнами на неравномерных сетках на прямой. С помощью этих результатов об оценках норм решений доказаны существование и единственность кубического сплайна линейного или квадратичного роста, интерполирующего данные линейного или квадратичного роста соответственно, без ограничений на расположение узлов сетки. Показано, что известные оценки погрешности интерполяции на отрезке переносятся на случай интерполяции на всей вещественной прямой [3, 4].

## Литература

1. Волков Ю.С., Богданов В.В. Оценки  $p$ -норм решений и обратных матриц систем линейных уравнений с циркулянтной матрицей // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2024. Т. 64, № 8. С. 1386–1395. DOI: 10.31857/S0044466924080042.
2. Волков Ю.С. Оценки  $p$ -норм решений разностных уравнений и бесконечных систем линейных уравнений // Сибирский математический журнал. 2024. Т. 65, № 6. С. 1153–1163. DOI: 10.33048/smzh.2024.65.607.

3. Volkov Yu.S., Novikov S.I. Estimates for solutions of bi-infinite systems of linear equations // European Journal of Mathematics. 2022. Vol. 8, no. 2. P. 722–731. DOI: 10.1007/s40879-021-00528-y.
4. Волков Ю.С., Новиков С.И. Оценки решений бесконечных систем линейных уравнений и задача интерполяции кубическими сплайнами на прямой // Сибирский математический журнал. 2022. Т. 63, № 4. С. 814–830. DOI: 10.33048/smzh.2022.63.408.

## Решение многомерного уравнения типа свертки с вырождающимся ядром в окрестности нуля.

© **Воронин Анатолий Федорович**

кандидат физико-математических наук,

старший научный сотрудник

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Россия, 630090, Новосибирск, пр. ак. Коптюга, 4

voronin@math.nsc.ru

**Ключевые слова:** многомерное уравнение типа свертки, первый и второй род уравнения, ограниченное множество, носитель функции, вырождающееся ядро, явное решение

**Благодарности** Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0009).

Для  $m \geq 1$  положим

$$R_{\pm}^m := \{t = (t_1, \dots, t_m) \in R^m : \pm t_j > 0, j = \overline{1, m}\},$$

$$M^+ := \{t \in R_+^m : \text{diam } M^{\pm} \leq C < \infty\}, M^- := -M^+.$$

Рассмотрим на  $M^+$  уравнения типа свертки первого и второго рода (относительно функции  $u$ ):

$$\lambda u(t) - k * u(t) = f(t), t \in M^+,$$

где

$$\lambda \in \{0, 1\}, k \in L_1(M^- \cup M^+), f, u \in L_1(M^+),$$

$$k * u(t) = \int_{M^+} k(t-s)u(s) ds.$$

Предполагаем, что  $k(t) = 0$  в некоторой окрестности точки  $t = 0$ , где окрестность характеризуется параметром  $\delta \in R_+^m$ , причем ноль принадлежит замыканию этой окрестности.

В докладе найден аналог известной теоремы Титчмарша о носителях в свертке для случая однородного уравнения первого рода типа свертки. Найдено также частное решение (в явном виде) неоднородного уравнения второго рода типа свертки с произвольной правой частью, носитель которой лежит на заданном множестве.

Доклад является развитием работы автора [1].

## Литература

1. Voronin A.F. // About the supports in the Fredholm convolution Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2024. V.33. N1. P.543-550. DOI: 10.1515/jiip-2024-0015

## Экспоненциальная дихотомия для дифференциальных и разностных уравнений с периодическими коэффициентами

© Демиденко Геннадий Владимирович

доктор физико-математических наук, профессор

Новосибирский государственный университет

Россия, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 1

demidenk@math.nsc.ru

**Ключевые слова:** системы дифференциальных и разностных уравнений, периодические коэффициенты, критерии экспоненциальной дихотомии, системы матричных уравнений Ляпунова, проектор Рисса

В работе рассматриваются системы нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + f(t, y), \quad -\infty < t < \infty, \quad (1)$$

и системы нелинейных разностных уравнений

$$x_{n+1} = B(n)x_n + g(n, x_n), \quad n \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}. \quad (2)$$

Элементы  $m \times m$ -матриц  $A(t)$  являются непрерывными  $T$ -периодическими функциями, т. е.

$$A(t + T) \equiv A(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

и матричная последовательность  $\{B(n)\}$  имеет период  $N$ , т. е.

$$B(n + N) \equiv B(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Предполагается, что однородные системы (1), (2) экспоненциально дихотомичны (см., например, [1–3]).

В работах [4–6] были установлены: критерий экспоненциальной дихотомии для систем вида (1) в терминах разрешимости специальных краевых задач для дифференциального уравнения Ляпунова

$$\frac{d}{dt}H + HA(t) + A^*(t)H = F(t), \quad 0 < t < T, \quad (3)$$

а также критерий экспоненциальной дихотомии для систем вида (2) в терминах разрешимости некоторых краевых задач для системы разностных уравнений Ляпунова

$$V(l) - B^*(l)V(l+1)B(l) = G(l), \quad l = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4)$$

Установленные в [4–6] критерии отличаются от классических спектральных критериев экспоненциальной дихотомии.

Наша цель — на основе новых критериев экспоненциальной дихотомии исследовать разрешимость некоторых задач для систем вида (1) и (2), получить оценки их решений, а также установить условия существования периодических решений.

## Литература

1. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. М.: Наука, 1970.
2. Годунов С. К. Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 1997.
3. Bulgak A., Bulgak H. Linear algebra. Konya: Selcuk University, 2001.
4. Demidenko G. V. Stability of solutions to difference equations with periodic coefficients in linear terms // J. Comput. Math. Optim. 2010. V. 6. № 1. P. 1–12.
5. Demidenko G.V. On conditions for exponential dichotomy of systems of linear differential equations with periodic coefficients // Int. J. Dynamical Systems and Differential Equations. 2016. V. 6. № 1. P. 63–74.
6. Демиденко Г. В., Бондарь А. А. Экспоненциальная дихотомия систем линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами // Сиб. матем. журн. 2016. Т. 57. № 6. С. 1240–1254.

## Энергетические оценки для одного класса псевдогиперболических операторов с переменными коэффициентами

© Демиденко Геннадий Владимирович

доктор физико-математических наук, профессор  
Новосибирский государственный университет  
Россия, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 1  
g.demidenko@g.nsu.ru

© Нурмахматов Вахоббиддин Саидаслон угли

Новосибирский государственный университет  
Россия, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 1  
v.s.nurmuhammad@gmail.com

**Ключевые слова:** псевдогиперболическое уравнение, уравнение Власова, энергетические оценки, соболевское пространство с весом.

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00370.

В работе будут установлены энергетические оценки для уравнений, не разрешенных относительно старшей производной четвертого порядка с переменными коэффициентами

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, D_x)u = & \left( aI + \sum_{|\beta|=2} a_\beta^0(x) D_x^\beta \right) D_t^2 u + \sum_{|\beta|=3} a_\beta^1(x) D_x^\beta D_t u \\ & + \sum_{|\beta|=2} a_\beta^2(x) D_x^\beta u + \sum_{|\beta|\leq 3} a_\beta^3(x) D_x^\beta u = f(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}. \end{aligned} \quad (1)$$

Такие уравнения часто называют уравнениями *соболевского типа*, поскольку именно исследования С. Л. Соболева послужили началом систематического изучения таких уравнений [1] (с. 333-447). При  $a_\beta^1(x) = 0$  уравнение (1) является уравнением Власова [2, 3]. Оно описывает изгибно-крутильные колебания упругого стержня. Рассматриваемое уравнение входит в класс *псевдогиперболических уравнений*, введенных в монографии [4]. В работах [4, 5] изложен основной метод получения энергетических оценок для псевдогиперболических уравнений в случаях, когда коэффициенты постоянные или мало отличаются от постоянных. Мы рассмотрим коэффициенты  $a > 0$ ,  $a_\beta^j(x) \in C^4(\mathbb{R}^{n+1})$ ,  $j = 0, 1, 2$  вещественнозначные функции и будем предполагать, что выполнены оценки

$$c_1 |\xi|^2 \leq \sum_{|\beta|=2} a_\beta^0(x) (i\xi)^\beta \leq c_2 |\xi|^2, \quad c_3 |\xi|^4 \leq \sum_{|\beta|=4} a_\beta^2(x) (i\xi)^\beta \leq c_4 |\xi|^4, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

где константы  $c_j > 0$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ .

**Теорема.** Пусть коэффициенты  $a > 0$ ,  $a_\beta^j(x) \in C^4(\mathbb{R}^{n+1})$ ,  $j = 0, 1, 2$  и существует  $\gamma_0 > 0$  такое, что для любой функции  $u(t, x) \in W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}^{n+1})$  и

$$D_x^\beta D_t^2 u \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}), \quad |\beta| = 2,$$

имеет место оценка

$$\|(a + |\xi|^2)(|\eta| + \gamma + |\xi|)\hat{u}_\gamma(\eta, \xi), L_2(\mathbb{R}^{n+1})\| \leq c\|\mathcal{L}(x, D_t, D_x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})\| \quad (3)$$

с константой  $c > 0$ , не зависящей от  $u(t, x)$ .

## Литература

1. Соболев С. Л. Избранные труды. Т. 1, Т. 2. Новосибирск: филиал "Гео"Издат. Сиб. отд. РАН, 2003; 2006.
2. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни. Москва - Ленинград: стройиздат, 1940.
3. Bishop R. E. D. Longitudinal waves in beams // Aeronautical Quarterly. 1952. V. 3, No. 4, P. 280-293.
4. Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.
5. Демиденко Г. В. Энергетические оценки для одного класса псевдогиперболических операторов с переменными коэффициентами // Ж. выч. мат. и мат. физики. - 2024. - Т. 64. - №8. - С. 1466-1475.

## **Прямые и обратные задачи для многомерного уравнения смешанного типа высокого порядка**

© Джамалов Сирожиддин Зухриддинович

доктор физико-математических наук,

ученое звание профессор,

главный научный сотрудник

Институт Математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан,  
улица Университетская, 9, Ташкент, 100174 Узбекистан.

e-mail: siroj63@mail.ru.

**Ключевые слова:** Прямые и обратные задачи с нелокальными краевыми условиями, многомерные уравнения смешанного типа высокого порядка, однозначная разрешимость и гладкость решение прямых задач, корректность по Адамару обратных задач.

### **Благодарности**

Работа выполнена при финансовой поддержке научного гранта № Ф-ФА-2021-424 при Министерстве инновационного развития Республики Узбекистан.

Как известно, в процессе исследования нелокальных задач была выявлена тесная взаимосвязь задач с нелокальными условиями с обратными задачами [1].

Отметим, что интерес к исследованию обратных задач для уравнений математической физики обусловлен важностью их приложений в различных разделах механики, сейсмологии, медицинской томографии и геофизики. К настоящему времени достаточно хорошо изучены обратные задачи для классических уравнений математической физики [2].

В последние годы начаты исследования обратных задач для уравнений смешанного типа второго и четвертого порядков [3-8].

Прямые задачи с локальными краевыми условиями для уравнений смешанного типа высокого порядка исследованы в работах [9,10].

До настоящего времени прямые задачи с нелокальными краевыми условиями для уравнений смешанного типа высокого порядка очень мало исследованы [11], а обратные задачи для уравнений смешанного типа высокого порядка практически не исследовались. Частично восполнить данный пробел мы и попытаемся в рамках данной работы.

В данной работе предлагаются подходы, которые позволяют доказать однозначную разрешимость и гладкость решений некоторых прямых задач с нелокальными краевыми условиями и корректность решений некоторых линейных обратных задач для многомерного уравнения смешанного типа высокого порядка в пространствах Соболева.



## Литература

1. Бицадзе А.В., Самарский. АА. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач. // ДАН. СССР, 1969. т.185. №4. 740 с.
2. Лаврентьев М.М., Романов В.Г, Васильев В.Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука. 1969.
3. Sabitov K.B., Direct and inverse problems for equations of mixed parabolic-hyperbolic type. Moscow: Nauka. 2016.
4. Джамалов.С.З., Ашуров Р.Р. Об одной линейной обратной задаче для многомерного уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка // Дифференциальные уравнения. 2019.Т.55. № 1. с.34–44.
5. Джамалов С.З.,Ашуров Р.Р. Об одной линейной обратной задаче для многомерного уравнения смешанного типа первого рода, второго порядка. // Известия вузов. Математика.2019. №6. с.1–12.
6. Джамалов С.З. Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа. // Ташкент: Монография.2021. 176 с.
7. Dzhamalov S.Z.,Khalkhadzhaev B.B. On the smoothness of a generalized solution of a semi-nonlocal boundary value problem for a fourth-order. Journal of Contemporary Applied Mathematics. 2024. Vol.14. No.2. pp.107–120.
8. Dzhamalov S.Z, Khalkhadzhaev B.B. A linear inverse problem with semi-nonlocal boundary conditions for a three-dimensional equation of mixed type of the second kind of the fourth order in a parallelepiped.  
// Lobachevskii Journal of Mathematics. 2025. Vol. 48. No. 3. pp. 448–456.
9. Врагов В.Н. О постановке и разрешимости краевых задач для уравнений смешанно-составного типа. // Математический анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1978. с. 5–13.
10. Егоров И.Е, Федоров В.Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: ВЦ.СО РАН,1995.
11. Джамалов С.З, Пятков С.Г. О некоторых классах краевых задач для многомерных уравнений смешанного типа высокого порядка. // Сибирский математический журнал.2020. Т.61. №4. с.777–795.

## Об одной коэффициентной обратной задаче с нелокальными условиями для трехмерного уравнения Чаплыгина в параллелепипеде

© Джамалов Сирожиддин Зухриддинович

доктор физико-математических наук,

профессор,

главный научный сотрудник

Институт Математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан

Узбекистан, 100174, Ташкент, ул. Университетская, 9

sirroj63@mail.ru

© Шакиров Абдувасик Абдурахмон угли

Базовый докторант,

Институт Математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан

Узбекистан, 100174, Ташкент, ул. Университетская, 9

shokirov.abduvosiq96@gmail.com

**Ключевые слова:** трехмерное уравнение Чаплыгина, коэффициентная обратная задача с нелокальными краевыми условиями, корректность задачи, методы Фурье, « $\varepsilon$ –регуляризация», априорные оценки, последовательности приближений и сжимающихся отображений.

### Благодарности

Авторы выражают благодарность Министерству инновационного развития Республики Узбекистан за финансовую поддержку. Грант №. F-FA-2021-424.

В работе [1] для уравнения смешанного типа как первого, так и второго рода второго порядка в ограниченных областях изучены корректность некоторых прямых и линейных обратных задач (связанных с поиском решения уравнения и элемента правой части).

Для таких уравнений коэффициентные обратные задачи (связанные с поиском решения, коэффициента уравнения и элемента правой части) в ограниченных и неограниченных областях практически не исследовались.

С этой целью в данной работе с использованием результатов работ [1], с применением метода Фурье,  $\varepsilon$ -регуляризации, априорных оценок, теоремы сжимающихся отображений изучается однозначная разрешимость коэффициентной обратной задачи с нелокальными краевыми условиями для трехмерного уравнения Чаплыгина в параллелепипеде.

В области

$$G = (-1, 1) \times (0, T) \times (0, \ell) = Q \times (0, \ell) = \{(x, t, y) \mid -1 < x < 1, 0 < t < T, 0 < y < \ell\}$$

рассмотрим трехмерное уравнение Чаплыгина:

$$Lu = K(x)u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} + \alpha(x, t)u_t = c(x, t)u + \psi(x, t, y), \quad (1)$$

где  $xK(x) > 0$  при  $x \neq 0$ ,  $x \in (-1, 1)$ ;  $\psi(x, t, y) = g(x, t, y) + h(x, t) \cdot f(x, t, y)$ ,  $g(x, t, y)$  и  $f(x, t, y)$  заданные функции, а функции  $h(x, t)$  и  $c(x, t)$  подлежат определению.

### Коэффициентная обратная задача

Найти функции  $\{u(x, t, y), h(x, t), c(x, t)\}$  удовлетворяющие уравнению (1) почти всюду в области  $G$ , такие, что  $u(x, t, y)$  удовлетворяет следующим условиям:

1) нелокальные краевые условия

$$\gamma D_t^p u|_{t=0} = D_t^p u|_{t=T}, \quad (2)$$

$$\rho D_x^p u|_{x=-1} = D_x^p u|_{x=1} = 0, \quad p = 0, 1, \quad (3)$$

$$u|_{y=0} = u|_{y=\ell} = 0 \quad (4)$$

где  $\gamma, \rho$  — некоторые постоянные числа, отличные от нуля;

2) дополнительные условия

$$u(x, t, \ell_0) = \varphi_0(x, t) \quad (5)$$

$$u(x, t, \ell_1) = \varphi_1(x, t), \quad (6)$$

$$0 < \ell_0 < \ell_1 < \ell < +\infty$$

и вместе с функциями  $h(x, t), c(x, t)$  принадлежит классу

$$U = \{(u, h, c) | u \in W_2^{2,3}(G), h \in W_2^2(Q), c \in W_2^2(Q)\}.$$

Здесь через  $W_2^{2,3}(G)$  обозначено анизотропное пространство Соболева с нормой

$$\|u\|_{W_2^{2,3}(G)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (1 + \lambda_k^2)^3 \|u_k\|_{W_2^2(Q)}^2,$$

где  $W_2^2(Q)$  пространство Соболева,  $u_k(x, t)$  означает коэффициенты Фурье функции  $u(x, t, y)$  по системе  $\{\sin \lambda_k y\}$ ,  $\lambda_k = \frac{k\pi}{\ell}, k = 1, 2, 3, \dots$

**Определение 1.** Обобщенным решением задачи (1)-(6) будем называть функции  $\{u, h, c\} \in U$ , удовлетворяющие уравнению (1) почти всюду в  $G$ , с условиями (2) - (6).

Пусть выполнены следующие условия относительно коэффициентов, правой части уравнения (1) и заданной функции  $\varphi_i(x, y)$ :

#### Условие 1:

нелокальные условия:  $\alpha(x, 0) = \alpha(x, T), \alpha(-1, t) = \alpha(1, t);$

$\gamma g(x, 0, y) = g(x, T, y), \gamma f(x, 0, y) = f(x, T, y);$

гладкость:  $f(x, t, \ell_i) = f_i(x, t) \in C_{x,t}^{0,1}(\overline{Q}), g(x, t, \ell_i) = g_i(x, t) \in C_{x,t}^{0,1}(\overline{Q}), |H| = |\varphi_0 f_1 - \varphi_1 f_0| \geq \eta > 0, f \in W_2^{2,3}(G), g \in W_2^{1,3}(G).$

#### Условие 2:

$$\varphi_i \in W_2^3(\overline{Q}), \quad \gamma D_t^p \varphi_i|_{t=0} = D_t^p \varphi_i|_{t=T}, \quad \rho D_x^p \varphi_i|_{x=-1} = D_x^p \varphi_i|_{x=1}, \quad \varphi_i \neq 0, \quad p = 0, 1.$$

## Литература

1. Джамалов С.З. Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа. Монография. Ташкент. 2021г. с-176.

## Краевая задача Врагова с интегральным граничным условием по времени для уравнения смешанного типа второго порядка

© Егоров И. Е.

доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник-директор  
доктор физико-математических наук,  
ученое звание профессор,  
главный научный сотрудник-директор  
НИИ математики СВФУ им. М.К. Аммосова  
Россия, г. Якутск, ул. Кулаковского, 48  
IvanEgorov51@mail.ru

© Сафонов С.В.

учитель математики  
ГБНОУ РС(Я) РЛИ  
Россия, 677013, Республика Саха (Якутия), город Якутск, ул. Ойунского, д. 37  
rl\_ssv@mail.ru

В цилиндрической области рассматривается краевая задача Врагова с интегральным граничным условием по времени для уравнения смешанного типа

$$k(x, t)u_{tt} - \Delta u + a(x, t)u_t + c(x)u = f(x, t).$$

Отметим, что данная краевая задача без интегрального граничного условия впервые была исследована в [1]. Нелокальная краевая задача Врагова сводится к исследованию вспомогательной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения смешанного типа с локальными краевыми условиями [2]. Разрешимость вспомогательной краевой задачи устанавливается с помощью метода последовательных приближений на основе результатов [3] в весовом пространстве Соболева. Это позволяет построить приближенные решения исходной нелокальной краевой задачи и получить оценку сходимости их к регулярному решению нелокальной краевой задачи в весовом пространстве Соболева.

## Литература

1. Врагов В.Н. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13, №6. С.1098-1105.
2. Кожанов А.И., Пулькина Л.С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42, №9, С.1166–1179
3. Артюшин А.Н. Краевая задача для уравнения смешанного типа в цилиндрической области // Сибирский математический журнал. 2019. Т.60, №2. С.274-289.

## Анализ экранированной гармонической системы в трехмерной области методом итерационных расширений

© Еремчук Максим Павлович

ассистент,

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)»

Россия, 454080 Челябинск, проспект Ленина, 76

info@susu.ru

**Ключевые слова:** экранированная гармоническая система, экранированное уравнение Пуассона, метод итерационных расширений, условие Дирихле, условие Неймана.

Данная работа посвящена решению экранированного уравнения Пуассона в трехмерной области со сложной геометрии при обязательном наличии условия Дирихле с помощью метода итерационных расширений. Этот метод является обобщением метода фиктивных компонент[1], включая введение дополнительного параметра для определения расширенной матрицы и использование метода минимальных невязок для определения оптимального итерационного параметра. Наличие сложной геометрии области и краевого условия Дирихле являются проблемой при решении эллиптических уравнений[2]. Для достижения оптимальной асимптотики для эллиптических краевых задач второго порядка с условием Неймана исследовалась и оптимизировалась методология фиктивных компонент[3].

Краевую задачу для экранированного уравнения Пуассона

$$u: -\Delta \tilde{u} + \kappa \tilde{u} = \tilde{f}|_G, \quad \tilde{u}|_{\gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n}|_{\gamma_2} = 0 \quad (1)$$

определим на области  $G \subset \mathbb{R}^3$  с границами

$$\partial G = \bar{s}, \quad s = \gamma_1 \cup \gamma_2, \quad \gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset.$$

Краевая задача (3) продолжается через границу с условием Дирихле и вводится фиктивная однородная задача, дополняющая область со сложной геометрией до трехмерного примитива, например, параллелепипеда. Полученная продолженная задача аппроксимируется и приводится к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\bar{u} \in \mathbb{R}^N: C\bar{u} = \bar{f}, \quad \bar{f} \in \mathbb{R}^N. \quad (2)$$

Приближённое решение системы уравнений (2) находится с помощью метода итерационных расширений:

$$\bar{u}^k \in \mathbb{R}^N: B(\bar{u}^k - \bar{u}^{k-1}) = -\tau_{k-1}(C\bar{u}^{k-1} - \bar{f}), \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\forall \bar{u}^0 \in \bar{V}_1, \quad \tau_0 = 1,$$

$$\tau_{k-1} = [\bar{r}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1}] / [\bar{\eta}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1}], \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

где в итерационном процессе пошагово необходимо пересчитывать невязки, поправки и эквивалентные невязки

$$\bar{r}^{k-1} = C\bar{u}^{k-1} - \bar{f}, \bar{w}^{k-1} = B^{-1}\bar{r}^{k-1}, \bar{\eta}^{k-1} = C\bar{w}^{k-1}.$$

Алгоритм метода итерационных расширений поитерационно обрабатывает информацию для определения оптимальных итерационных параметров. Итерационные процессы останавливаются по приводимым критериям, т.е. при выполнении предварительно заданных оценок погрешности. В методе итерационных расширений используются более сильные нормы, чем энергетические нормы, чтобы минимизировать ошибки в возникающих поитерационно задачах. Развиваемый метод итерационных расширений имеет неухудшаемую асимптотику, т.е. оптимальную асимптотику по количеству требуемых операций, а также допускает простую, эффективную и универсальную реализацию, по сравнению с методом фиктивного пространства [4].

## Литература

1. Астраханцев Г. П. Метод фиктивных областей для эллиптического уравнения второго порядка с естественными граничными условиями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1978. Т. 18. № 1. С. 118–125. DOI: 10.016/0041555378900125.
2. Ushakov A. L. Investigation of a mixed boundary value problem for Poisson equation // 2020 International Russian Automation Conference (RusAutoCon). Sochi, 2017. Vol. 10. N. 1. P. 26–46. DOI: 10.1109/RusAutoCon49822.2020.9208198.
3. Капорин И. Е., Николаев Е. С. Метод фиктивных неизвестных для решения разностных уравнений эллиптического типа в областях сложной формы // ДАН СССР. 1980. Т. 251. № 3. С. 544–548.
4. Мацокин А. М., Непомнящих С. В. Метод фиктивного пространства и явные операторы продолжения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1993. Т. 33. № 1. С. 52–68.

## Обобщенная разрешимость краевых задач для квазигидродинамических уравнений в весовых пространствах Соболева

© Евсеев Федор Александрович

аспирант,  
заведующий лабораторией томографических  
и электронно-микроскопических исследований,  
Югорский государственный университет,  
АУ «НАЦ РН им. В.И. Шпильмана»  
Россия, 628011, г. Ханты-Мансийск, ул. Чехова, 16  
fedor\_evseev@rambler.ru

**Ключевые слова:** начально-краевая задача, квазигидродинамическая система, априорные оценки, весовые функции, теорема существования.

Мы рассматриваем квазигидродинамическую систему уравнений в случае слабо-сжимаемой жидкости:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{u} &= \operatorname{div} \vec{w}, \quad \vec{w} = \tau((\vec{u}, \nabla) \vec{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \vec{f}), \quad (t, x) \in Q = (0, \infty) \times G, \quad G \subset \mathbb{R}^3, \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} - \vec{w}, \nabla) \vec{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p &= \vec{f} + \mu \Delta \vec{u} + \mu \nabla(\operatorname{div} \vec{u}) + (\vec{u}, \nabla) \vec{w} + \vec{w} \operatorname{div} \vec{u}, \quad \mu = \eta/\rho. \end{aligned} \quad (1)$$

где  $G$  – ограниченная область с границей  $\Gamma \in C^2$ ,  $\mu = \eta/\rho$  – коэффициент кинематической вязкости. Плотность  $\rho$ , динамическая вязкость  $\mu$  и характерное время релаксации  $\tau$  считаются заданными положительными константами. Векторное поле  $\vec{f} = \vec{f}(x, t)$  определяет массовую плотность внешних сил.

Ищем решение системы (1), удовлетворяющее следующим начальным и граничным условиям и условиям нормировки:

$$\vec{u}|_{\Gamma} = 0, \quad \vec{w} \cdot \nu|_{\Gamma} = 0, \quad \vec{u}|_{t=0} = \vec{u}_0(x), \quad \int_G p(t, x) dx = 0, \quad (2)$$

где  $\nu$  – единичный вектор внешней нормали к  $\Gamma$ .

Система (1) в более общем виде была выведена путем осреднения известной кинетической модели [1]. Первые варианты системы называются системой квазигазодинамических уравнений [2]. Позднее, на основе более общего уравнения состояния была разработана еще одна модель, получившая название квазигидродинамическая система уравнений [3]. Детальный анализ свойств этой модели можно найти в монографии [4]. Отметим, что система (1) при определенных условиях является эллиптико-параболической системой: первая ее часть представляет собой эллиптическое уравнение относительно градиента давления, а вторая представляет собой параболическую систему относительно вектора скорости.

Определим обобщенное решение задачи (1)-(2). Пусть  $p_0 \in [1, 3/2]$ ,  $q_0 = 2p_0/(4p_0 - 3)$ ,  $p_1 = 5/4$ . Тогда  $q_0 \in [1, 2]$ . Функции  $\vec{u} \in L_{2,loc}(0, \infty; W_2^1(G)) \cap L_{\infty,loc}(0, \infty; L_2(G))$ ,

$u_t \in L_{p_1,loc}(0, \infty; W_{p_1}^{-1}(G))$ ,  $p \in L_{p_1}(0, \infty; W_{p_1}^1(G))$  такие, что  $\frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u}, \nabla)\vec{u} \in L_{2,loc}(0, \infty, L_2(G))$ , удовлетворяющие (2) называются обобщенным решением задачи (1), (2), если

$$\int_0^\infty (\vec{u}, \nabla \varphi) dt = \int_0^\infty (\vec{w}, \nabla \varphi) dt, \quad \int_0^\infty \left[ \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \vec{\psi} \right) - ((\vec{u} - \vec{w}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{u}) + \frac{1}{\rho} (\nabla p, \vec{\psi}) + \right. \\ \left. \mu(\nabla \vec{u}, \nabla \vec{\psi}) + \mu(\operatorname{div} \vec{u}, \operatorname{div} \vec{\psi}) + ((\vec{u}, \nabla)\vec{\psi}, \vec{w}) \right] dt = \int_0^\infty (\vec{f}, \vec{\psi}) dt,$$

для всех функций  $\varphi \in L_2(0, \infty; W_2^1(G))$  с  $\int_G \varphi(t, x) dx = 0$ ,  $\vec{\psi} \in L_5(0, \infty; W_5^1(G))$  и  $\vec{\psi}|_S = 0$ , имеющих ограниченный по  $t$  носитель.

**Теорема.** Пусть  $f\sqrt{\beta} \in L_2(Q)$ ,  $u_0 \in L_2(G)$ . Тогда существует обобщенное решение задачи (1), (2) такое, что  $\sqrt{\beta}u \in L_2(0, \infty; W_2^1(G))$ ,  $\sqrt{\beta}u \in L_\infty(0, \infty; L_2(G))$ ,  $\beta(u, \nabla)u \in L_2(Q)$ ,  $\sqrt{\beta}(\frac{\nabla p}{\rho} + (\vec{u}, \nabla)\vec{u}) \in L_2(Q)$ ,  $\beta(u, \nabla)u \in L_{q_0}(0, \infty; L_{p_0}(G))$  для любого  $p_0 \in [1, 3/2]$ ,  $\nabla p\beta^\alpha \in L_{q_0}(0, \infty; L_{p_0}(G))$ ,  $\vec{u}_t\beta^\alpha \in L_{q_0}(0, \infty; W_{p_0}^{-1}(G))$  для любого  $p_0 \in [1, 3/2]$  и для всех  $\alpha$  таких, что:

$\alpha < 1/2$  если  $\beta = e^{\gamma t}$  ( $\gamma > 0$ ) и  $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{2-q_0}{2|\beta|q_0}$  если  $\beta = (t+M)^{-\beta}$ ,  $\beta < 0$ ; случай  $\alpha = \frac{1}{2}$  возможен при  $q_0 = 2$ ;  $\alpha > \frac{1}{2} + \frac{2-q_0}{2|\beta|q_0}$  и  $\alpha \geq 1$  если  $\beta = (t+M)^{-\beta}$ ,  $\beta > 0$ ;  $\alpha \geq 1$  если  $\beta = e^{\gamma t}$  ( $\gamma < 0$ ).

В работе доказывается обобщенная разрешимость системы в некоторых весовых классах, характеризующих поведение решений при  $t \rightarrow \infty$ . Доказательство основано на методе Галеркина и получаемых априорных оценках. Описано убывание (рост) решения в зависимости от убывания (роста) правой части системы. Убывание (рост) при  $t \rightarrow \infty$  используемых весовых функций может быть как экспоненциальным, так и степенным.

## Литература

1. Elizarova T.G. Chetverushkin B.N. On a computational algorithm for the calculation of gas-dynamic flows // Soviet Physics. Doklady. 1984. Vol. 29. pp. 907–909.
2. Четверушкин Б.Н. Кинетически согласованные схемы в газовой динамике. Москва, МГУ, 1999.
3. Шеретов Ю.В. Об одной новой математической модели в гидродинамике // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: Тверской государственный университет. 1996. С. 124–134.
4. Шеретов Ю.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики. Тверь: Тверской государственный университет. 2016. 222 с.



## Использование полуаналитического метода для решения задач численного моделирования скважин

© Жаглова Анна Эрнстовна

младший научный сотрудник

Институт проблем нефти и газа Российской академии наук

Россия, 119333, г. Москва, ул. Губкина, 3

azhaglova@ipng.ru

**Ключевые слова:** моделирование скважин, эквивалентный радиус, псевдостационарный режим, режим преобладания границ, численное моделирование.

### Благодарности

Работа выполнена в рамках Государственного задания ИПНГ РАН, тема № 125020501405-1.

При численном моделировании притока флюида к скважине возникает проблема корректного учета взаимодействия пласта и скважины. Из-за разницы в типичных размерах пласт представляется дискретной сеткой, а скважина как точечный источник/сток. При этом давление на скважине не равно давлению в ячейке со скважиной. В работе [1] Д. Писмен предложил интерпретировать давление в скважинном блоке как давление, формирующееся на некотором эквивалентном радиусе (радиусе Писмена) внутри этого блока. Он получил соответствующую формулу для эквивалентного радиуса при стационарном течении флюида (steady state flow, SS) в соответствии с законом Дарси и для случаев использования прямоугольной сетки для моделирования, анизотропной проницаемости пласта и расположения скважины вне центра блока [2, 3], но также в предположении стационарного течения.

В данной работе использован метод «сшивания» глобального численного решения и локального аналитического решения в ячейке со скважиной. Выведены формулы эквивалентного радиуса для псевдостационарного режима (pseudo steady-state flow, PSS) на квадратной и прямоугольной сетках для моделирования. Также получены формулы для потока с преобладанием границ (boundary dominated flow, BD) при использовании прямоугольной сетки.

Рассматривается задача нестационарного притока слабосжимаемого флюида к одиночной скважине с границей  $\Gamma_w$  в изолированной двумерной области  $U$  с внешней границей  $\Gamma_e$  по закону Дарси:

$$\frac{1}{\mu} \cdot \nabla \cdot K(\nabla p) = c_p m \frac{\partial p}{\partial t} \text{ в } U, \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \Gamma_e, \quad \int_{\Gamma_w} K \frac{\partial p}{\partial \nu} dl = -\frac{q}{h} \text{ на } \Gamma_w, \quad (2)$$

где  $\mu$  – вязкость флюида;  $K$  – тензор проницаемости пласта;  $p = p(x, y, t)$  – давление;  $c_p$  – коэффициент сжимаемости пористой среды;  $m$  – пористость;  $t$  – время;  $\nu$  – направление внешней нормали к границе;  $q$  – дебит скважины;  $h$  – толщина пласта.

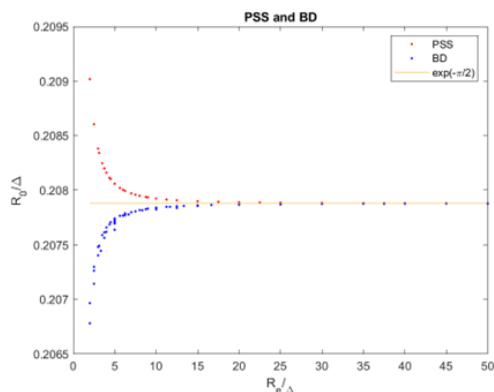


Рис. 1: PSS-, BD- и SS-режимы, квадратная сетка

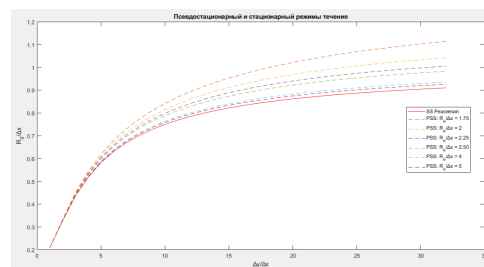


Рис. 2: PSS- и SS-режимы, прямоугольная сетка

Аппроксимация уравнения (3) на пятиточечном шаблоне методом конечных объёмов:

$$c_p m \frac{V_0}{h} \frac{1}{\tau} \cdot [p(t + \tau) - p(t)] = \frac{q}{h} - 2 \frac{1}{\mu} [k_y \frac{\Delta x}{\Delta y} (p_0(t) - p_2(t)) + k_x \frac{\Delta y}{\Delta x} (p_0(t) - p_1(t))], \quad (3)$$

где  $\Delta x, \Delta y$  – размеры ячеек;  $V_0 = \Delta x \cdot \Delta y \cdot h$  – объём сеточного блока 0;  $k_x, k_y$  – соответствующие главные значения тензора проницаемости К.

Подставляя аналитические решения задачи (3)-(2) в уравнение (3), можно получить формулы для радиуса Писмена при различных режимах течения и для различных сеточных модификаций.

По рисунку 1 можно сделать вывод, что при моделировании PSS- и BD-режима на квадратной сетке допускается использовать формулу для радиуса Писмена, выведенную для стационарного режима течения.

На рисунке 2 показано, что формула, полученная Писменом для SS-режима на прямоугольной сетке, значительно отличается от формулы, выведенной для PSS-режима, если отношение размеров ячеек велико или внешняя граница находится близко к скважине, что является обычной ситуацией при моделировании горизонтальных скважин. Следовательно, в таких случаях необходимо использовать уточненную формулу для эквивалентного радиуса.

## Литература

1. Peaceman D.W. Interpretation of Well-Block Pressures in Numerical Reservoir Simulation // SPEJ, 183-94, June 1978; Trans., AIME, 253. Paper SPE 6893
2. Peaceman D.W. Interpretation of Well-Block Pressure in Numerical Reservoir Simulation with Nonsquare Grid Blocks Anisotropic Permeability // SPE Journal 9 (June 1983): 531-543.
3. Peaceman D.W. Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation. Part 3. – Off center and multiple wells within a well-block // SPERE. 1990. Vol. 5, No. 2. 6 p.

## Задача для уравнения соболевского типа 4го порядка с вырождением

© **Жигжитжапов Бато Валерьевич**

аспирант,

Бурятский государственный университет им. Доржи Банзарова

Россия, 670000, Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а

zhat120401@gmail.com

© **Кожанов Александр Иванович**

доктор физико-математических наук,

ученое звание профессор,

главный научный сотрудник

Институт математики им. С. Л. Соболева

Россия, 630090, Новосибирск, Пр. ак. Коптюга, 4

kozhanov@math.nsc.ru

**Ключевые слова:** дифференциальные уравнения соболевского типа, вырождение, начально-краевые задачи, регулярные решения, существование, единственность.

Для дифференциальных уравнений составного типа

$$Au_{tt} + Bu_t + Cu = f(x, t)$$

с вырождающимися операторами  $A$ ,  $B$  и  $C$  второго порядка, действующими по пространственным переменным, изучается разрешимость классической первой начально-краевой задачи. Доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений - решений, имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.

# Нелокальные краевые задачи с интегральными условиями для уравнений в частных производных третьего порядка

© **Зикиров Обиджан Салижанович**

доктор физико-математических наук, профессор,  
Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека,  
Узбекистан, 100174, г. Ташкент, ул. Университетская, 4  
zikirov@yandex.ru

**Ключевые слова:** уравнение, задача, интегральное, условие, регулярное, решение, теорема, нелокальное, существование, единственность.

В области  $D = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$  рассмотрим уравнение третьего порядка с оператором теплопроводности в главной части

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + c(x, t)u = f(x, t), \quad (1)$$

где  $c(x, t)$  и  $f(x, t)$  – заданные непрерывные функции.

В работе для уравнения (1) исследуется следующая задача с интегральным условием:

Требуется найти в области  $D$  решение  $u(x, t)$  уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (2)$$

граничным

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u_x(0, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

и интегральному условию

$$\int_0^\ell u(x, t) dx = \int_0^t h(t, \tau) u(\ell, \tau) d\tau + \mu_3(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

где  $f(x, t) \in C^2(\overline{D})$ ,  $\varphi(x) \in C^2[0, \ell]$ ,  $\psi_i(t)$ ,  $(i = \overline{1, 3})$  – заданные, непрерывные при  $x \in [0, \ell]$ ,  $t \in [0, T]$  соответственно функции, удовлетворяющие условиям согласования:

$$\varphi(0) = \mu_1(0), \quad \varphi'(0) = \mu_2(0); \quad \int_0^\ell \varphi(x) dx + \mu_3(0) = 0.$$

Заметим, что в исследуемой задаче вместо интегрального условия (4) можно брать условие

$$u_x(\ell, t) = \alpha(t)u(\ell, t) + \int_0^\ell k(x)u(x, t) d\tau + \mu_3(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Изучается разрешимость краевых задач, сочетающих задачи с нелокальными условиями А.А. Самарского и задачи с интегральными условиями. Для рассматриваемых задач доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений.

## Об одной задаче управления для уравнения диффузии

© **Ившин Михаил Сергеевич**

стажер-исследователь

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН

Россия, 360017, Нальчик, ул. Шортанова, 89А

mikhail.ivshin.1996@mail.ru

**Ключевые слова:** уравнение диффузии, начальное условие, оптимальное управление, функционал, минимум функционала, полином, метод наименьших квадратов, система алгебраических уравнений, матрица Гильберта, определитель.

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Арсена Владимировича Псху и Анатолия Хусеевича Аттаева, которые дали полезные замечания и рекомендации, и помогли улучшить качество доклада.

В данной работе рассматривается уравнение диффузии

$$u_y - u_{xx} = 0 \quad (1)$$

в области

$$\Omega = \{(x, y) : -\infty < x < \infty, 0 < y < T\}. \quad (2)$$

Пусть

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad x \in R, \quad (3)$$

где  $R = (-\infty, \infty)$ .

**Определение.** Регулярным решением уравнения (1) в области (2) назовем функцию, непрерывную в  $\bar{\Omega}$ , имеющую непрерывную производную по  $y$ , непрерывные производные до второго порядка по  $x$ , и удовлетворяющие уравнению (1) в  $\Omega$

Обозначим через  $W$  множество всех  $\tau(x)$ , при которых задача (1), (3) имеет единственное регулярное решение.

### Задача.

Для заданных множества  $V \subset W$  и функции  $h(y) \in C[0, T]$ , найти начальное управление  $\tau(x) \in V$  при котором величина

$$\int_0^T [u_x(0, y) - h_2(y)]^2 dy \quad (4)$$

принимает минимальное значение.

В данной работе мы рассмотрим случай, когда класс  $V$  совпадает с классом полиномов, т.е. когда  $V = P_n$ , где

$$P_n = \left\{ g(x) = \sum_{k=0}^n p_k x^{2k+1} \right\}, \quad (5)$$

# О весовых дельта - функциях Радона-Киприянова с отрицательными степенями веса, сосредоточенными на поверхности

© **Калитвин Владимир Анатольевич**

кандидат физико-математических наук,

ученое звание доцент,

доцент

ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского

398020, Россия, г. Липецк, ул. Ленина, д. 42

kalitvin@gmail.com

**Ключевые слова:** Преобразование Радона—Киприянова, преобразование, двойственное преобразованию Радона—Киприянова, скрытая сферическая симметрия, обращение преобразования Радона-Киприянова, линейные сингулярные дифференциальные уравнения,  $P$ -поверхность.

## $P$ -поверхность в евклидовом пространстве $\mathbb{R}_n^+$ .

### Преобразование Радона—Киприянова.

Пусть  $\mathbb{R}_n = \{x = (x_1 \dots, x_n)\}$ ,  $\mathbb{R}_n^+ = \{x : x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}$ . Через  $S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$  будем обозначать подпространство пространства пробных функций Л.Шварца  $\{\varphi\}$ , состоящее из функций, четных по каждой координате  $x_i$  аргумента  $x$ . Пусть  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ ,  $\gamma_i \in (0, 1)$ . Соответствующий класс регулярных весовых распределений  $S'_{ev}$  определяется весовой билинейной формой  $(u, v)_{-\gamma} = \int \Omega \subseteq \mathbb{R}_n^+ u(x) v(x) x^\gamma dx$ ,  $x^{-\gamma} = \prod_{i=1}^n x_i^{-\gamma_i}$ . Введем многомерный оператор Пуассона

$$P_x^{-\gamma} f(x, t) = C(n, -\gamma) \int_0^\pi \dots \int_0^\pi f(x_1 \cos a_1, x_2 \cos a_2, \dots, x_n \cos a_n) \prod_{i=1}^n \sin^{2\mu_i} \alpha_i d\alpha_i.$$

Через посредство оператора Пуассона введем в пространстве распределений  $S'_{ev}$  весовую обобщенную  $\delta$ -функцию, сосредоточенную на поверхности  $P(x)=0$ ,  $x \in \mathbb{R}_n^+$  (как правило, размерности  $n-1$ ):

$$(P_x \delta(P(x)), \varphi)_\gamma = C(\gamma) \int_{\Gamma=\{z: P(z)=0\}} \tilde{\varphi}(z) Z_2^{\gamma-1} d\Gamma(z), \quad Z_2^{\gamma-1} = \prod_{i=1}^n z_{2i}^{\gamma_i-1}, \quad (1)$$

где  $C(n, \gamma)$  — константа, нормирующая многомерный оператор Пуассона,

$$z = (z_1, z_2, \dots, z_{2n-1}, z_{2n}), \quad \tilde{\varphi}(z) = \varphi \left( \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \dots, \sqrt{z_{2n-1}^2 + z_{2n}^2} \right),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z_{2i-1} = x_i \cos \alpha_i, \\ z_{2i} = x_i \sin \alpha_i \end{array} \right|, \quad 0 < \alpha_i < \pi, \quad i = \overline{1, n}, \quad -\infty < z_{2i-1} < \infty, \quad 0 < z_{2i} < \infty. \quad (2)$$

Переменные с четными и нечетными номерами координат вектора  $z$  будем обозначать отдельно друг от друга:  $Z_1 = (z_1, z_3, \dots, z_{2n-1})$ ,  $Z_2 = (z_2, z_4, \dots, z_{2n})$ . Поверхность интегрирования в (1), полученная отображением через посредство оператора Пуассона будем называть  $P(P(x)=0)$  - поверхностью ( $P$ -сфера,  $P$ -плоскость). Заметим, что если бы первоначально поверхность  $P(x)=0$  была бы  $n$ -полусферой  $|x|=R$ , в  $\mathbb{R}_n^+$ , то  $P$ -сфера — уже  $2n$ -полусфера  $|z|=R$  в  $\mathbb{R}_{2n}^+ = \{z : z_{2i} > 0\}$ .

## Представление Гельфанда—Шапиро преобразования Радона—Киприянова

Пусть  $\langle x, \theta \rangle = \sum_i x_i \theta_i$  и  $p = \langle x, \theta \rangle$  — нормальная плоскость в  $\mathbb{R}_n$ . Тогда соответствующая  $P$  — плоскость:

$$\{x \in \mathbb{R}_n^+ : \langle x, \theta \rangle = p\} \xrightarrow{\text{def}(1)} \{z \in \mathbb{R}_{2n}^+ : \langle z, \Theta \rangle = p\}, \quad \Theta = (\theta_1, 0, \theta_2, 0, \theta_3, \dots, 0, \theta_n, 0). \quad (3)$$

Преобразование Радона—Киприянова (введено в [1]; см. также книги [2], с.211 – 225; [3], с. 483 – 495) определяется следующим образом:

$$K_\gamma[f](\theta; p) = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) P_x^\gamma \delta(p - \langle x, \theta \rangle) x^\gamma dx. \quad (4)$$

По определению (1), выражение (4) примет вид

$$K_\gamma[f](\Theta; p) = C(\gamma) \int_{\Gamma = \{z : p = \langle z, \Theta \rangle\}^+} \tilde{f}(z) Z_2^{-\gamma-1} d\Gamma(z), \quad (5)$$

где  $\{z : p = \langle z, \Theta \rangle\}^+ = \{z : p = \langle z, \Theta \rangle, z_{2i} > 0\}$ ,  $\tilde{f}(z) = f\left(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \dots, \sqrt{z_{2n-1}^2 + z_{2n}^2}\right)$ .

Так как интегрирование в (4) и (5) определено по  $(2n)$  переменным, а координаты векторов  $\theta \in \mathbb{R}_n^+$  и  $\Theta \in \mathbb{R}_{2n}^+$  связаны трансформацией (3), то определения преобразований (4) и (5) совпадают:

$$K_\gamma[f](\theta; p) = K_\gamma[f](\Theta; p). \quad (6)$$

Обычно, определение (5) носит вспомогательный характер. В нашей работе это будет основное определение Радона-Киприянова. Таким образом, правая часть равенства (6) представляет собой *специальное весовое преобразование Радона* в  $\mathbb{R}_{2n}$  (см. [1]), которое называется *представлением Гельфанда—Шапиро* и имеет классический вид

$$K_\gamma[f](\theta; p) = C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_{2n}^+} \tilde{f}(z) \delta(p - \langle z, \Theta \rangle) Z_2^{\gamma-1} dz =$$

$$K_\gamma[f](\theta; p) = C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_{2n}^+} \tilde{f}(z) \delta(p - \langle z, \Theta \rangle) Z_2^{\gamma-1} dz = C(\gamma) \int_{\{p = \langle z, \Theta \rangle\}^+} \tilde{f}(z) Z_2^{\gamma-1} d\Gamma(z). \quad (7)$$

Правая часть (7) — многомерное смешанное специальное преобразование Радона (по нечетным переменным  $Z_1$ ) и преобразование Меллина (по четным переменным  $Z_2$ ). Если вектор  $\theta$  — фиксирован, то введем обозначение  $K_\gamma[f](\theta; p) = K_{\gamma, \theta}[f](p) \iff K_\gamma[f](\Theta; p) = K_{\gamma, \Theta}[f](p) \xrightarrow{(5)} K_{\gamma, \Theta}[f](p) = K_{\gamma, \Theta}[f](p)$ . В (7)  $n$ -полуплоскость интегрирования обозначим символом  $\Theta_\perp^+$ , т.е.  $\Theta_\perp^+ = \{z : \langle \Theta, z \rangle = p, z_{2i} \geq 0\} \in \overline{\mathbb{R}_{2n}^+}$ . Преобразование Радона—Киприянова можно записать в виде интеграла по  $2n$ -полуплоскости  $\Theta_\perp^+$  в пространстве  $\mathbb{R}_{2n}^+$ :  $K_{\gamma, \Theta}[f](p) = C(\gamma) \int_{\Theta_\perp^+} \tilde{f}(p\Theta + z) Z_2^{\gamma-1} dz$ .

## Литература

1. Киприянов И.А., Ляхов Л.Н. О преобразованиях Фурье, Фурье—Бесселя и Радона // Докл. АН СССР. 1998. 360. № 2. С. 157–160.

2. Ляхов Л.Н. В-Гиперсингулярные интегралы и их применение к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с В-потенциальными ядрами. Липецк. ЛГПУ. 2007. С. 232.
3. Катрахов В.В., Катрахова А.А., Ляхов Л.Н., Муравник А.Б., Ситник С.М., Хе Кан Чер. Сингулярные краевые задачи / Воронеж: ООО ИПЦ «Научная книга». 2024. –528 с.



## Методы неподвижных точек для поиска экстремальных управлений

© Казьмин Иван Дмитриевич

кандидат физико-математических наук,

старший научный сотрудник

Бурятский государственный университет

Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а

kazminvanya@mail.ru

**Ключевые слова:** линейно управляемая система, принцип максимума, задача о неподвижной точке, итерационные методы.

Рассматривается класс линейных по управлению задач оптимального управления:

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_T (\langle a(x(t), t), u(t) \rangle + d(x(t), t)) dt \rightarrow \inf_{u \in V}, \quad (1)$$

$$\dot{x} = A(x(t), t)u(t) + b(x(t), t), \quad x(t_0) = x^0, \quad u(t) \in U \subset R^m, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (2)$$

в котором переменная  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in R^n$  описывает состояние системы, переменная  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t)) \in R^m$  характеризует управляющее воздействие в системе. Функции  $a(x, t)$ ,  $d(x, t)$ ,  $A(x, t)$ ,  $b(x, t)$  дифференцируемы по переменной  $x$  и непрерывны по переменной  $t$  на множестве  $R^n \times T$ . Функция  $\varphi(x)$  дифференцируема на множестве  $R^n$ . В качестве допустимых управлений  $u(t)$ ,  $t \in T$  рассматривается множество  $V$  кусочно-непрерывных функций со значениями в компактном и выпуклом множестве  $U \subset R^m$ . Начальное состояние  $x^0$  и временной интервал  $T$  заданы.

Функция Понтрягина с сопряженной переменной  $\psi$  в задаче (1), (2) имеет следующий вид:

$$H(\psi, x, u, t) = H_0(\psi, x, t) + \langle H_1(\psi, x, t), u \rangle, \\ H_0(\psi, x, t) = \langle \psi, b(x, t) \rangle - d(x, t), H_1(\psi, x, t) = A^T(x, t)\psi - a(x, t).$$

Стандартная сопряженная система рассматривается в следующей форме:

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t), u(t), t), \quad t \in T, \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)). \quad (3)$$

Для  $v \in V$  обозначим  $x(t, v)$ ,  $t \in T$  - решение системы (2) при  $u(t) = v(t)$ ;  $\psi(t, v)$ ,  $t \in T$  - решение стандартной сопряженной системы (3) при  $x(t) = x(t, v)$ ,  $u(t) = v(t)$ .

$$u^*(\psi, x, t) = \arg \max_{w \in U} \langle H_1(\psi, x, t), w \rangle, \quad \psi \in R^n, \quad x \in R^n, \quad t \in T.$$

С помощью отображения  $u^*$  условие известного принципа максимума [1] для управления  $u \in V$  в задаче (1), (2) можно записать в виде:

$$u(t) = u^*(\psi(t, u), x(t, u), t), \quad t \in T. \quad (4)$$

$$u^\alpha(\psi, x, w, t) = P_U(w + \alpha H_1(\psi, x, t)), \quad \psi \in R^n, \quad x \in R^n, \quad w \in U, \quad t \in T, \quad \alpha > 0.$$

С помощью отображения  $u^\alpha$  условие принципа максимума (4) в задаче (1), (2) можно записать в эквивалентном виде:

$$u(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t), \quad t \in T, \quad \alpha > 0. \quad (5)$$

$$X(v) = x, \quad v \in V, \quad x(t) = x(t, v), \quad t \in T;$$

$$\Psi(v) = \psi, \quad v \in V, \quad \psi(t) = \psi(t, v), \quad t \in T;$$

$$V^\alpha(\psi, x, v) = v^\alpha, \quad \psi \in C(T), x \in C(T), \quad v \in V, \quad v^\alpha(t) = u^\alpha(\psi(t), x(t), v(t), t), \quad t \in T,$$

где  $C(T)$  – пространство непрерывных на  $T$  функций. С помощью введенных отображений условие принципа максимума (5) можно представить как задачу о неподвижной точке с оператором управления  $G_1^\alpha$ :

$$u = V^\alpha(\Psi(u), X(u), u) = G_1^\alpha(u), \quad u \in V. \quad (6)$$

$$X^\alpha(\psi, v) = x^\alpha, \quad \psi \in C(T), \quad v \in V,$$

где  $x^\alpha(t)$ ,  $t \in T$  является решением специальной задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = A(x(t), t)u^\alpha(\psi(t), x(t), v(t), t) + b(x(t), t), x(t_0) = x^0.$$

Рассмотрим задачу о неподвижной точке с оператором управления  $G_2^\alpha$ :

$$u = V^\alpha(\Psi(u), X^\alpha(\Psi(u), u), u) = G_2^\alpha(u), \quad u \in V. \quad (7)$$

$$\Psi^\alpha(x, v) = \psi^\alpha, \quad x \in C(T), \quad v \in V,$$

где  $\psi^\alpha(t)$ ,  $t \in T$  – решение сопряженной задачи Коши:

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t), u^\alpha(\psi(t), x(t), v(t), t), t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)).$$

Рассмотрим задачу о неподвижной точке с оператором управления  $G_3^\alpha$ :

$$u = V^\alpha(\Psi^\alpha(X(u), u), X(u), u) = G_3^\alpha(u), \quad u \in V. \quad (8)$$

Для решения задач о неподвижной точке принципа максимума (6)–(8) рассмотрим соответствующие итерационные процессы метода простой итерации при  $k \geq 0$ :

$$v^{k+1} = V^\alpha(\Psi(v^k), X(v^k), v^k) = G_1^\alpha(v^k), \quad v^0 \in V; \quad (9)$$

$$v^{k+1} = V^\alpha(\Psi(v^k), X^\alpha(\Psi(v^k), v^k), v^k) = G_2^\alpha(v^k), \quad v^0 \in V; \quad (10)$$

$$v^{k+1} = V^\alpha(\Psi^\alpha(X(v^k), v^k), X(v^k), v^k) = G_3^\alpha(v^k), \quad v^0 \in V. \quad (11)$$

Анализ сходимости построенных итерационных процессов (9)–(11) можно осуществить на основе известного принципа сжимающих отображений [2].

## Литература

1. Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. — М.: Физматлит, 2000. — 160 с.
2. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. — М.: Наука, 1989. — 432 с.

## **Краевые задачи для дифференциальных уравнений с незнакоопределенной характеристической формой**

© **Кожанов Александр Иванович**

доктор физико-математических наук,  
профессор,  
заведующий кафедрой математики ФИТ НГУ,  
Новосибирский государственный университет,  
Россия, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 1  
kozhanov@math.nsc.ru

**Ключевые слова:** дифференциальные уравнения с незнакоопределенной характеристической формой, краевые задачи, регулярные решения, существование, единственность.

Доклад подготовлен при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение № 075-15-2025-349 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации.

В теории краевых задач для дифференциальных уравнений смешанного типа с произвольным числом независимых переменных хорошо известны результаты В.Н. Врагова [1], [2] о постановке корректных краевых задач для таких уравнений, о существовании обобщенных и регулярных решений. Эти результаты усиливались и обобщались в многочисленных работах А.Н.Терехова, Н.А.Ларькина, И.Е.Егорова, В.Е.Федорова, А.Н.Артюшина. Вместе с тем еще много вопросов в этой теории (теории корректных краевых задач для дифференциальных уравнений смешанного типа) остается без ответов, еще много имеется нерешенных задач.

О некоторых нерешенных задачах, связанных с работами В.Н.Врагова, и будет идти речь в настоящем докладе.

### **Литература**

1. Врагов В.Н. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа. Дифференциальные уравнения, 1977, Т.13, №6, С.1098-1105.
2. Врагов В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: НГУ, 1983.

## О разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных с инволюцией и вырождением в старших производных

© Кожанов Александр Иванович

доктор физико-математических наук,

профессор,

главный научный сотрудник

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Россия, 630090, г. Новосибирск, пр. Ак. Коптюга, 4

kozhanov@math.nsc.ru

© Бжеумихова Оксана Игоревна,

старший преподаватель

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова

Россия, 360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173

bzhoksana@gmail.com

**Ключевые слова:** эллиптические уравнения, параболические уравнения, краевые задачи, инволюция, вырождение, регулярные решения, существование, единственность.

### Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке Внутреннего гранта КБГУ (договор №8)

Данная работа посвящена исследованию разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка, особенностью которых является наличие производных искомого решения, заданных не только в текущих точках, но и в точках, определяемых некоторым инволютивным преобразованием. Уравнения подобного типа в последнее время привлекают все больше внимания исследователей [1]-[8].

Пусть  $\Omega$  есть интервал  $(0, 1)$  оси  $Ox$ ,  $Q$  есть прямоугольник  $\Omega \times (0, T)$  конечной высоты  $T$ . Далее, пусть  $\varphi(x)$  есть заданная инволюция отрезка  $[0, 1]$ ,  $a(x, t)$ ,  $c(x, t)$  и  $f(x, t)$  есть заданные определенные на множестве  $\overline{Q}$  функции.

**Краевая задача I.** Найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения

$$u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) - a(x, t)u_{xx}(\varphi(x), t) + c(x, t)u(x, t) = f(x, t)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (2)$$

**Краевая задача II.** Найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в прямоугольнике  $Q$  решением уравнения

$$u_{tt}(x, t) + u_{xx}(x, t) + a(x, t)u_{xx}(\varphi(x), t) - c(x, t)u(x, t) = f(x, t)$$

и такую, что для нее выполняются условия (1) и (2), а также условие

$$u(x, T) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Краевые задачи I и II в случае  $a(x, t) \equiv 0$  представляют собой обычные хорошо изученные краевые задачи для параболических и соответственно эллиптических уравнений (то есть для уравнений без инволюции). Если же  $a(x, t)$  не является тождественно нулевой функцией, то ранее задачи I и II изучались лишь в случае  $a(x, t) \equiv \text{const}$ ,  $\varphi(x) = 1 - x$ .

В работе для изучаемых задач доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений – решений, имеющих все обобщенные по С.Л. Соболеву производные, входящие в уравнение.

## Литература

1. Ashyralyev A., Sarsenbi A.M. Well-posedness of an elliptic equation with involution // Electronic Journal of Differential Equations. 2015. Vol. 2015, no. 284. P. 1-8.
2. Tojo F.A.F., Torres P. Green's functions of partial differential equations with involutions // Journal of Applied Analysis & Computation. 2017. Vol. 7, no. 3. P. 1127-1138. DOI: 10.11948/2017070
3. Турметов Б.Х. Об одном обобщении третьей краевой задачи для уравнения Лапласа // Челяб. физ.-матем. журн. 2019. Т. 4, № 1. С. 33–41. DOI: 10.24411/2500-0101-2019-14103
4. Yarka U., Fedushko S., Veselý P. The Dirichlet Problem for the Perturbed Elliptic Equation // Mathematics. 2020. Vol. 8, no. 12. P. 1-13. DOI: 10.3390/math8122108
5. Алтынбек Д.Н., Муратбекова М.А. Вопросы разрешимости некоторых краевых задач для уравнения высокого порядка с инволюцией // Международная научно-практическая конференция «Проблемы современной фундаментальной и прикладной математики» посвященная 30-летию независимости Республики Казахстан и 20-летию Казахстанского филиала МГУ имени М.В. Ломоносова. Нур-Султан, 2021. 85-88 с.
6. Кожанов А.И., Бжеумихова О.И. Краевые задачи для параболических и гиперболических уравнений с инволюцией // Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения (DYSC 2021): Материалы 3-й Международной конференции. Иркутск: Иркутский государственный университет, 2021. 40-42 с.
7. Kirane M., Sarsenbi A.A. Solvability of Mixed Problems for a Fourth-Order Equation with Involution and Fractional Derivative // Fractal Fract. 2023. Vol. 7, no. 2: 131. P. 1-12. DOI: 10.3390/fractalfract7020131
8. Кожанов А.И., Бжеумихова О.И. Собственные функции и собственные числа дифференциальных уравнений с инволюцией // Сибирский математический журнал. 2024. Т. 65, № 5. С. 953-964.

## Нелокальные краевые задачи для вырождающихся квазипараболических уравнений нечетного порядка.

© Кожанов Александр Иванович

доктор физико-математических наук,  
ученое звание профессор,  
главный научный сотрудник  
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН  
Россия, 630090, Новосибирск, пр. Коптюга, 4  
kozhanov@math.nsc.ru

© Маманазаров Дилшод Собиржон угли

аспирант  
Новосибирский государственный университет  
Россия, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 1  
d.mamanazarov@ngsu.ru

**Ключевые слова:** квазипараболические уравнения третьего порядка, нелокальные задачи, вырождение, обобщенное условие Самарского–Ионкина, регулярные решения, существование, единственность.

**Благодарности:** Доклад подготовлен в рамках государственного задания Института Математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект FWNF-2022-0008).

Работа посвящена исследованию разрешимости пространственно-нелокальных краевых задач с обобщенным условием Самарского - Ионкина для вырождающихся квазипараболических уравнений вида

$$h(t)D_t^{2p+1}u + \sum_{k=0}^{2p} a_k(x, t)D_t^k u + u_{xx} + b(x, t)u_x = f(x, t),$$

в которых  $D_t^k = \frac{\partial^k}{\partial t^k}$ ,  $p$  – целое не/отрицательное число,  $h(t)$ ,  $a_k(x, t)$ ,  $k = \overline{0, \dots, 2p}$ ,  $b(x, t)$ ,  $f(x, t)$  – заданные функции.

Разрешимость нелокальных задач с обобщенным условием Самарского – Ионкина для квазипараболических уравнений изучалась в работах [1] и [2]. Для вырождающихся квазипараболических уравнений в качестве примера можно привести работу [3].

## Литература

1. Кожанов А.И., Абдрахманов А.М. Пространственно-нелокальные краевые задачи с обобщенным условием Самарского–Ионкина для квазипараболических уравнений // Сиб. электрон. матем. изв. 2023. Т. 20, № 1. С. 110–123.
2. Кожанов А. И. Нелокальные задачи и задачи с интегральными условиями для дифференциальных уравнений в частных производных: сводка результатов, нерешенные задачи. – Новосибирск: Наука, 2024. – 96 с.

3. Кожанов А. И. Квазипараболические уравнения со слабым вырождением // Математические заметки СВФУ. 2021. Т. 28, № 1. С. 27–36.

УДК 511.5

## Об одной задаче восстановления правой части линеаризованного уравнения Линя-Рейснера-Цзяня

© Кожанов Александр Иванович

доктор физико-математических наук,  
ученое звание профессор,  
главный научный сотрудник  
Институт математики им.С.Л.Соболева Со РАН  
Россия, 630090, Новосибирск, ул. Коптюга, 4  
kozhanov@math.nsc.ru

© Телешева Любовь Александровна

кандидат физико-математических наук,  
доцент кафедры фундаментальной математики  
Бурятский государственный университет им.Д.Банзарова  
Россия, 670000, Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а  
love\_20\_09@mail.ru

**Ключевые слова:** гиперболические уравнения, обратные задачи, неизвестные параметры, интегральное условие переопределения, регулярные решения, существование.

Работа посвящена исследованию разрешимости новых линейных обратных задач нахождения вместе с решением линеаризованного уравнения Линя-Рейснера-Цзяня также неизвестного параметра, определяющего внешнее воздействие(правую часть). Для изучаемых задач доказываются теоремы разрешимости в классах регулярных решений – решений, имеющих все обобщенные по С.Л.Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.

Особенностью изучаемых задач является во-первых, неизвестный коэффициент есть величина постоянная(что соответствует, например, однородной среде). Во вторых, новое условие переопределения, ранее не используемое у предшественников.

## Литература

1. Kozhanov, A. I. Composite type equations and inverse problems // Utrecht; VSP. 1999.
2. Kozhanov A.I. Hyperbolic Equations with Unknown Coefficients// Symmetry 2020. 12. Issue 9. 1539. doi.org/10.3390/sym12091539.



## Об одной обратной задаче для гиперболического уравнения третьего порядка с интегральным условием переопределения

© Кожанов Александр Иванович

доктор физико-математических наук,

ученое звание профессор,

главный научный сотрудник

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Россия, 630090, Новосибирск, пр. Коптюга, 4

kozhanov@math.nsc.ru

© Сорокин Роман Викторович

кандидат физико-математических наук,

ученое звание доцент,

доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений

Сибирский федеральный университет

Россия, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79

rsorokin@sfu-kras.ru

**Ключевые слова:** MGT уравнение, линейные обратные задачи, интегральное переопределение, разрешимость.

### Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Красноярского математического центра, финансируемого Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2025-1790).

В последние годы предметом активных исследований (см., например, [1]–[4]) является уравнение Мура–Гибсона–Томпсона (MGT), являющееся обобщением классического волнового уравнения.

В данной работе исследуется корректность первой краевой задачи идентификации коэффициента в правой части одномерного MGT уравнения с интегральным условием переопределения. Обозначим через  $Q_T$  прямоугольник  $(0, 1) \times (0, T)$  переменных  $(x, t)$ . Здесь  $T$  – некоторая фиксированная величина. В прямоугольнике  $Q_T$  рассмотрим задачу: найти функции  $u(x, t)$  и  $q(x)$ , удовлетворяющие уравнению, в котором  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $c$  – некоторые заданные константы,  $f(x, t)$  и  $h(x, t)$  – заданные функции

$$u_{ttt} + \alpha u_{tt} - c^2 u_{xx} - u_{xxt} + \beta u = f(x, t) + q(x)h(x, t). \quad (1)$$

Пусть заданы начальные условия, характерные для гиперболического уравнения третьего порядка

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = u_{tt}(x, 0) = 0 \quad (2)$$

и краевые условия Дирихле

$$u(0, t) = u(1, t) = 0. \quad (3)$$

Считаем, что задано интегральное условие переопределения

$$\int_0^T N(t)u(x, t) dt = 0, \quad (4)$$

в котором  $N(t)$  – заданная функция.

В доказательстве разрешимости данной задачи используется методика сведения исходной обратной задачи к прямой, содержащей в правой части интегралы от неизвестной функции. Разрешимость прямой задачи доказывается с использованием метода продолжения по параметру. В работе получены достаточные условия на входные данные, гарантирующие существование решения прямой задачи в классах Соболева.

## Литература

1. Liu S., and Triggiani R. An Inverse Problem for a Third Order PDE Arising in High-Intensity Ultrasound: Global Uniqueness and Stability by One Boundary Measurement, *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 2013, vol. 21, no. 6, pp. 825–869. DOI: 10.1515/jip-2012-0096.
2. Lasiecka, I. and Wang, X. Moore–Gibson–Thompson Equation with Memory, Part I: Exponential Decay of Energy, *Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physik*, 2016, vol. 67, article no. 17. DOI: 10.1007/s00033-015-0597-8.
3. Al-Khulai, W. and Boumenir, A. Reconstructing The Moore–Gibson–Thompson Equation, *Nonautonomous Dynamical Systems*, 2020, vol. 7, no. 1, pp. 219–223. DOI: 10.1515/msds-2020-0117.
4. A. A. Boltaev, D. K. Durdiev, A. A. Rahmonov. Kernel Determination Problem in the Third Order 1D Moore–Gibson–Thompson Equation with Memory, *Vladikavkaz Mathematical Journal* 2024, Volume 26, Issue 4, P. 55–65.

## О некоторых обратных задачах для линейного эллиптического уравнения

© Кожанов Александр Иванович

доктор физико-математических наук,  
ученое звание профессор,  
главный научный сотрудник  
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН  
Россия, 630090, Новосибирск, пр. Коптюга, 4  
kozhanov@math.nsc.ru

© Шипина Татьяна Николаевна

кандидат физико-математических наук,  
ученое звание доцент,  
доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений  
Сибирский федеральный университет  
Россия, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79  
tshipina@sfu-kras.ru

**Ключевые слова:** эллиптические уравнения, линейные обратные задачи, граничное переопределение, условия Самарского - Ионкина, существование, единственность.

### Благодарности

Доклад подготовлен в рамках государственного задания  
Института математики им. С.Л.Соболева СО РАН, проект FWNF- 2022-0008

Пусть  $Q$  есть цилиндр  $(0, 1) \times (0, T)$  конечной высоты  $T$  плоскости переменных  $x, t$ , функции  $f(x, t)$ ,  $h(x, t)$  известны и определены в  $\overline{Q}$ , функция  $\mu(t)$  задана на отрезке  $[0, T]$ .

Доклад посвящен исследованию разрешимости обратных краевых задач для эллиптического уравнения вида

$$u_{tt} + u_{xx} + \mu(t)u = f(x, t) + q(t)h(x, t), \quad (x, t) \in Q,$$

в котором неизвестен коэффициент  $q(t)$ .

В качестве условий переопределения используются условия граничного переопределения при  $x = 1$ .

Задачи идентификации свободного члена, или линейные обратные задачи, для эллиптических уравнений, изучались и раньше. Но существенным отличием исследований, представленных в докладе, является то, что все построения и рассуждения основаны на переходе от изучаемой обратной задачи к нелокальной задаче типа задачи Самарского - Ионкина, и на использовании недавних результатов одного из авторов (см. работы [1, 2]).

В докладе представлены достаточные условия существования регулярных решений как возникающих по ходу доказательств прямых нелокальных краевых задач, так и исходных обратных задач. Регулярными решениями называются решения, имеющие все обобщенные по С.Л.Соболеву производные, входящие в соответствующее дифференциальное уравнение

Доказаны теоремы существования и единственности регулярных решений изучаемых обратных задач.

## Литература

1. Кожанов А.И., Дюжева А.В. Корректность обобщенной задачи Самарского - Ионкина для эллиптических уравнений в цилиндрической области // Дифференциальные уравнения. 2023. №59(2). С.223 - 235.
2. Кожанов А.И. Нелокальные задачи с обобщенным условием Самарского-Ионкина для некоторых классов нестационарных дифференциальных уравнений // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. 2023. №509. С.50–53.

## Обобщенная задача Самарского-Ионкина для ультрапараболических уравнений

© Кошелева Юлия Анатольевна

старший преподаватель

Сахалинский Государственный университет

Россия, 693000, Сахалинская область, г. Южно-Сахалинск, ул. Ленина, д. 290

**Ключевые слова:** ультрапараболические уравнения, нелокальные задачи Самарского-Ионкина, регулярные решения, существование, единственность.

Нелокальная задача Ионкина, а также нелокальная задача Самарского-Ионкина занимают особое место в теории нелокальных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных. К настоящему времени разрешимость подобных задач в классах регулярных решений установлена для многих дифференциальных уравнений, но в их число ультрапараболические уравнения не входят. Устранить это (хотя бы частично) автор и собирается в настоящем докладе.

В области  $Q = (0, 1) \times (0, T) \times (0, A)$  переменных  $(x, t, a)$  изучается разрешимость нелокальных задач для уравнения

$$u_t + h(t)u_a - u_{xx} + c(x, t, a)u = f(x, t, a)$$

с условиями

$$u(0, t, a) = \gamma(t, a)u(1, t, a), \quad u(1, t, a) = 0,$$

либо условиями

$$u_x(0, t, a) = \gamma(t, a)u_x(1, t, a), \quad u(1, t, a) = 0,$$

также естественными начальными условиями при  $t = 0$  и  $a = 0$ . Для этих задач доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений.

## Байесовский подход к оценке параметров распространения эпидемий

© Криворотко Ольга Игоревна

доктор физико-математических наук,

Заведующий лабораторией

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Россия, 630090, Новосибирск, пр. Ак. Коптюга, 4

o.i.krivorotko@math.nsc.ru

© Зятков Николай Юрьевич

кандидат технических наук,

научный сотрудник

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Россия, 630090, Новосибирск, пр. Ак. Коптюга, 4

n.y.zyatkov@math.nsc.ru

**Ключевые слова:** идентифицируемость, обратные задачи, доверительные интервалы, эпидемиология, байесовская оптимизация, вероятностное моделирование, машинное обучение, Монте Карло, анализ чувствительности, обыкновенные дифференциальные уравнения.

### Благодарности

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, проект FWNF-2024-0002.

В работе исследуются модели SIR-типа распространения эпидемии, описываемые системой обыкновенных дифференциальных уравнений [1]:

$$\dot{x} = \Phi(x, t, q), \quad x(t_0) = x^0, \quad (1)$$

удовлетворяющая закону действующих масс  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ . Здесь  $x_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$  – концентрация исследуемой группы населения (чувствительные, инфицированные, вакцинированные и т.п.),  $q$  –  $m$ -вектор коэффициентов модели, характеризующий эпидемическую и социально-экономическую ситуацию исследуемого региона (контагиозность вируса, вероятность развития тяжелой формы заболевания, смертность, индекс самоизоляции и др.). Параметры модели  $\tilde{q} = (q, x^0)$  требуют более точной оценки для построения сценариев развития эпидемии и мер ее контроля, в результате чего формулируются обратные задачи, которые состоят в оценке параметров модели (3) по дополнительным измерениям состояния системы в фиксированные моменты времени:

$$f_k = h(x(t_k), t_k, \tilde{q}) + \varepsilon_k, \quad k = 1, \dots, K, \quad (2)$$

с ошибкой  $\varepsilon_k$  – независимые и одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним и постоянной дисперсией  $\sigma^2$ .

Для оценки погрешности восстановления параметров  $\tilde{q}$  в обратной задаче (3)-(2) часто используют оценку доверительных интервалов, основанную на матрице ковариаций [2] и рассматривающие параметр популяции как фиксированный с применением подхода Монте Карло. В данной работе предлагается использовать байесовские доверительные интервалы (БДИ) [3], значения которых имеют (апостериорную)

плотность вероятности, представляющую правдоподобие того, что параметр  $\tilde{q}$  имеет эти значения:

$$\pi(\tilde{q}) := \pi_{\text{posterior}}(\tilde{q}|f) = \frac{\pi_{\text{likelihood}}(f|\tilde{q})\pi_{\text{prior}}(\tilde{q})}{\int \pi_{\text{likelihood}}(f|\tilde{q})\pi_{\text{prior}}(\tilde{q}) d\tilde{q}}. \quad (3)$$

Вычисление интеграла в знаменателе размерности  $m + n$  трудоемко [4]. Для получения апостериорной плотности вероятности распределения параметров модели используется подход на основе марковской цепи Монте Карло (МСМС). Основная идея [5] метода состоит в

- построении цепи Маркова, (а) пространство состояний которой является пространством параметров, и (б) ядро перехода, управляющее вероятностью перехода из одного состояния  $\tilde{q}$  в другое  $\tilde{q}'$ , наделяет цепь стационарным распределением, равным апостериорному распределению  $\pi(\tilde{q})$ ,
- моделировании цепи Маркова для получения реализации  $q_1, \dots, q_m, x_1^0, \dots, x_n^0$ , рассматриваемой как (последовательно-коррелированные) выборки из  $\pi(\tilde{q})$ .

БДИ, во-первых, позволяет включать предыдущую (т.е. до сбора данных  $f_k$ ) информацию о параметрах модели в решение обратной задачи. Во-вторых, БДИ дает вероятностное решение обратных задач, которое количественно оценивает неопределенность входных параметров.

В работе будут получены и проанализированы апостериорные распределения эпидемиологических параметров распространенности туберкулеза (ТБ) [6] в регионах Российской Федерации по данным об инфицированных ТБ, инфицированных ТБ и ВИЧ, умерших от ТБ с 2010 по 2023 гг.

## Литература

1. Krivorotko O., Kabanikhin S. Artificial intelligence for COVID-19 spread modeling // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2024. V. 32, No. 2. P. 297–332. DOI: 10.1515/jiip-2024-0013
2. Криворотко О. И., Кабанихин С. И., Петракова В. С. Идентифицируемость математических моделей эпидемиологии: туберкулез, ВИЧ, COVID-19 // Математическая биология и биоинформатика. 2023. Т. 18, № 1. С. 177–214. DOI: 10.17537/2022.18.177
3. Tarantola A. Inverse problem theory and methods for model parameter estimation. SIAM, 2005.
4. Murphy K. P. Probabilistic machine learning: Advanced topics. MIT Press, 2023.
5. Waqar F. G., Patel S., Simon C. M. A tutorial on the Bayesian statistical approach to inverse problems // APL Mach. Learn. 2023. V. 1, no. 4. Article 041101. DOI: 10.1063/5.0154773
6. Kabanikhin S., Krivorotko O., Neverov A., Kaminskiy G., Semenova O. Identification of the mathematical model of Tuberculosis and HIV co-infection dynamics // Mathematics. 2024. V. 12. Article 3636. DOI: 10.3390/math12233636

## О разрешимости задачи Стефана для случая сложной структуры вещества

© Кулеш Тимофей Дмитриевич

аспирант

Тихоокеанский государственный университет

Россия, 680042, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136

2015302323@togudv.ru

**Ключевые слова:** задача Стефана, относительная компактность, нецилиндрическая область, неизвестная граница, неподвижная точка.

### Благодарности

Работа выполнена в Дальневосточном центре математических исследований при финансовой поддержке Минобрнауки России, соглашение от 28 февраля 2024 г. № 075-02-2024-1432 по реализации программ развития региональных научно-образовательных математических центров.

Задача Стефана описывает фазовые переходы с подвижной границей раздела фаз и возникает в широком спектре прикладных задач: теплообмен, кристаллизация, таяние и др. Классическая постановка была предложена Я. Стефаном [1]. В дальнейшем теория развивалась в трудах Л. Рубинштейна, А. Фридмана, О. А. Олейник и С. Л. Каменостской, А. Г. Дюво, А. М. Мейрманова, J. Bolatti и D. A. Tarzia.

Рассматривается одномерная нелинейная задача Стефана с уравнением теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(u) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0. \quad (1)$$

Начальные и краевые условия:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_0 \in W_2^1, \quad u_0(1) = 0, \quad (2)$$

$$a(u)u_x(0, t) = 0, \quad (3)$$

$$u(s(t), t) = 0, \quad (4)$$

$$a(u)u_x(s(t), t) = -\varphi(s(t))s'(t), \quad (5)$$

где  $\varphi(s)$  — функция скрытой теплоты, зависящая от положения границы.

Требуется определить температуру  $u(x, t)$ , а также границу раздела фаз  $s(t)$ .

Аппроксимационное решение строится в виде разложения:

$$u_m(x, t) = \sum_{k=0}^m c_k(t) \omega_k(x, t), \quad (6)$$

где  $\omega_k(x, t)$  — ортонормированная система, зависящая от положения границы  $s(t)$ .

В процессе доказательства для  $u_m$  получены следующие априорные оценки:

$$\int_0^{s(t)} u_m^2 dx + 2 \int_0^t \int_0^{s(\tau)} [a(u_m) + a'(u_m)u_m] u_{mx}^2 dx d\tau \leq c_0^2, \quad (7)$$



$$\int_0^{s(t)} u_{mx}^2 dx + \int_0^t u_{mx}^2(s(\tau), \tau) s'(\tau) d\tau + 2\delta \int_0^t \int_0^{s(\tau)} u_{mxx}^2 dx d\tau \leq c_1^2, \quad (8)$$

$$\int_0^t \int_0^{s(\tau)} u_{mt}^2 dx d\tau \leq \tilde{c} \left( \int_0^T s'^2(\tau) d\tau + 1 \right). \quad (9)$$

Данные оценки обеспечивают возможность применения теорем компактности из [2] для функций из шкалы банаховых пространств и обоснование существования обобщённого решения.

Для определения  $s(t)$  построен оператор:

$$G(s(t)) = \Phi^{-1} \left( \alpha - a(0) \int_0^{s(t)} B(u(\xi, t)) d\xi \right), \quad (10)$$

где  $\Phi(s) = \int_0^s \varphi(\xi) d\xi$ ,  $B(u) = \int_0^u \frac{1}{a(\eta)} d\eta$ ,  $\alpha = \Phi(1) + a(0) \int_0^1 B(u_0(\xi)) d\xi$ .

Для доказательства существования неподвижной точки оператора  $G$  рассматривается множество  $S \subset W_2^1(0, T)$ , состоящее из неубывающих функций  $s(t)$  с фиксированным начальным значением и ограниченной нормой производной. Доказывается, что оператор  $G$  переводит множество  $S$  в себя, является непрерывным в  $C[0, T]$ , и  $S$  компактно в этом пространстве. Применяя теорему Шаудера о неподвижной точке, делается вывод о существовании функции  $s^*(t) \in S$ , для которой выполняется равенство  $G(s^*) = s^*$ . Эта функция описывает корректное движение границы фазового перехода, удовлетворяющее уравнениям модели.

Полученные результаты обобщают классические подходы, позволяя учитывать сложную зависимость скрытой теплоты от положения границы. Предложенный метод обеспечивает существование решения при минимальных ограничениях на начальные данные и нелинейность уравнения.

## Литература

1. Stefan. J. On the theory of ice formation, especially on ice formation in the polar seas // Annalen der Physik und Chemie. 1889. № 2. С. 269–286.
2. Подгаев А. Г. Об относительной компактности множества абстрактных функций из шкалы банаховых пространств // Сиб. мат. журнал. 1993. № 2. С. 135–145. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00970957>.

## О возможности оперативного прогноза опасности цунами

© Лаврентьев Михаил Михайлович

доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН  
Институт автоматики и электрометрии СО РАН, Новосибирск, Россия  
630090, Новосибирская область, г. Новосибирск, пр-кт Академика Коптюга, д.1  
mmlavrentiev@gmail.com

Сильнейшее землетрясение произошло 30 июля 2025 года на территории Камчатского края и Сахалинской области. Магнитуда (интегральная характеристика выделившейся энергии) оценивается как 8,8, то есть это сейсмическое событие входит в десятку сильнейших с начала XX века. На территории Камчатки, Сахалина и Курильских островов, а также в Японии и США была объявлена угроза цунами. Однако, несмотря на огромную мощь подводного землетрясения, катастрофически больших волн, в отличие, например, от Великого восточно-японского землетрясения 11 марта 2011 года, нигде не наблюдалось. Отметим, что стоимость эвакуационных мероприятий в ожидании гигантских волн может значительно превышать непосредственный ущерб береговой инфраструктуре.

Несмотря на наличие в разных странах центров предупреждения о цунами и развитых инструментах математического и компьютерного моделирования, задача оперативной (быстрой) оценки параметров волны цунами вдоль побережья до настоящего времени не имеет надежного решения.

В Институте автоматики и электрометрии СО РАН проводятся исследования возможности быстрой, в течение 1 – 2 минут, обработки данных и проведения расчетов с целью получения распределения ожидаемых максимальных высот волны вдоль всего защищаемого побережья.

В частности, был разработан специализированный аппаратный ускоритель расчетов на основе микрочипа вентильной матрицы программируемой пользователем (Field Programmable Gates Array – FPGA) для персонального компьютера, который позволяет получить численное решение системы уравнений мелкой воды (с хорошей точностью описывающей движение волны цунами) с производительностью суперкомпьютера. Моделирование распространения волны через весь Тихий океан занимает 22,5 минуты (на сетке  $9601 \times 6781$  узлов – 30 часов физического движения волны). Распределение ожидаемых высот волны цунами вдоль побережья протяженностью 1000 километров занимает менее одной минуты. С целью тестирования предлагаемой технологии выполнены следующие работы: исследована зависимость численного решения от размера расчетной сетки; проведено сравнение с известными точными решениями; проведено сравнение метода расщепления (основного инструмента, используемого службами США) и предложенной схемы МакКормака; зависимость от данных цифровой батиметрии; зависимость зон наибольшей амплитуды от положения источника; сравнение результатов, полученных на сетках разной детальности.

Создание надежных инструментов оперативного прогноза опасности цунами возможно уже в ближайшее время.

**Задача о контакте пластины по боковой поверхности с препятствием заданной ширины**

© **Лазарев Нюргун Петрович**

доктор физико-математических наук,  
главный научный сотрудник  
Северо-Восточный федеральный университет  
Россия, 677000, Якутск, ул. Белинского, 58  
nyurgunlazarev@yandex.ru

© **Никифоров Дьулустан Яковлевич**

кандидат физико-математических наук,  
научный сотрудник  
Северо-Восточный федеральный университет  
Россия, 677000, Якутск, ул. Белинского, 58  
dju92@mail.ru

© **Романова Наталья Анатольевна**

кандидат физико-математических наук,  
доцент кафедры "Алгебра, геометрия, математический анализ и дифференциальные уравнения"  
Северо-Восточный федеральный университет  
Россия, 677000, Якутск, ул. Белинского, 58  
romnatan@mail.ru

**Ключевые слова:** контактная задача, выпуклое множество, минимизация функционала, условие непроникания, эквивалентная задача, условия Синьорини.

**Благодарности**

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания, проект FSRG-2023-0025.

Исследованы вопросы корректности для новой математической модели описывающей контакт упругой пластины Тимошенко. Под воздействием внешних нагрузок пластина может контактировать боковой поверхностью с жестким препятствием по полосе заданной ширины. Недеформируемое препятствие имеет определенную геометрию и ограничивает перемещения, а также углы поворотов нормальных волокон по внешней боковой кромке. Препятствие задается с помощью цилиндрической поверхности, образующие которой перпендикулярны срединной плоскости пластины. Кроме того, препятствие прикасается боковой поверхности пластины по полосе заданной ширины в исходном состоянии. Минимизируется функционал энергии над выпуклым множеством допустимых перемещений. Множество допустимых перемещений задается с учетом условия закрепления и условия непроникания в подходящем пространстве Соболева. Условие непроникания, описывающее контакт, записывается для перемещений и углов поворота нормальных волокон. Доказано существование и единственность решения задачи. Найдена эквивалентная дифференциальная постановка в рамках условия о дополнительной регулярности решения вариационной

задачи [1]. Установлена качественная связь предложенной модели с ранее изученной задачей [2], в которой рассмотрен случай пластины контактирующей по всей ширине боковой поверхности. Отметим, что условия непроникания вида неравенств при описании возможного контакта берегов трещины использовались для модели пластины Кирхгофа-Лява, см., например, [3].

## Литература

1. Лазарев Н. П., Никифоров Д. Я., Романова Н. А. Задача о равновесии для пластины Тимошенко, контактирующей боковой поверхностью по полосе заданной ширины // Челяб. физ.-матем. журн. 2024. Т. 9, № 4. С. 596–608. DOI: 10.47475/2500-0101-2024-9-4-596-608
2. Lazarev N. P. Fictitious domain method in the equilibrium problem for a Timoshenko-type plate contacting with a rigid obstacle // J. Math. Sci. 2014. V. 203, № 4. С. 527–539. DOI: 10.1007/s10958-014-2156-9
3. Хлуднев А. М. Задачи теории упругости в негладких областях. Москва: Физматлит, 2010. 252 с.

## Спектр краевой задачи двумерной тепловой конвекции

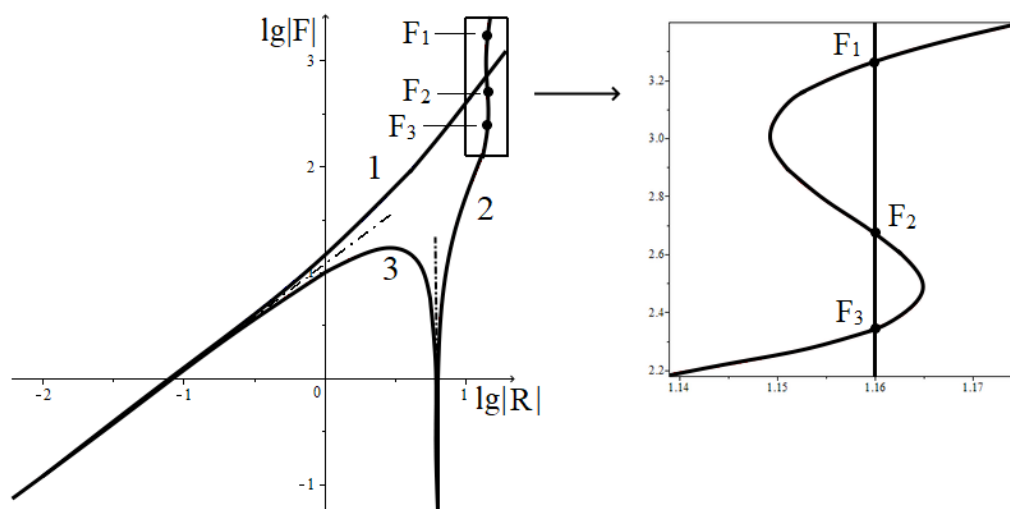
© Лемешкова Елена Николаевна

кандидат физико-математических наук,  
научный сотрудникИнститут вычислительного моделирования СО РАН  
Россия, 660036, Красноярск, ул. Академгородок, 50/44  
elena\_cher@icm.krasn.ru

**Ключевые слова:** уравнения Навье – Стокса, уравнение теплопроводности, нелинейная задача, обратная задача, краевые условия, условие просачивания, неединственность решения, собственные значения, спектр краевой задачи, тепловая конвекция, число Рейнольдса.

Исследуется задача о двумерном течении жидкости в слое толщиной  $l$  с подогреваемым нижним дном. На верхней стенке для скорости задано условие просачивания. Поле скоростей линейно по продольной координате, а поля температур и давлений — квадратичные функции той же координаты. Анализ совместности уравнений Навье – Стокса и теплопроводности приводит к нелинейной обратной задаче на собственные значения для нахождения поля течения в слое. Предложен алгоритм численного анализа задачи при любых скоростях проницаемости. Основным приемом исследования является сведение краевой задачи к задаче Коши.

На рис. 1 численно построен спектр  $F = F(R)$  в логарифмической системе координат,  $F$  — безразмерный продольный градиент давления,  $R = l\nu^{-1}v_0$  — число Рейнольдса,  $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости,  $v_0$  — скорость просачивания. Ветвь 1 спектра соответствует отрицательным значениям параметра  $R$ , а ветви 2, 3 — положительным. Отрицательным значениям  $F$  соответствует только ветвь 3. Один из концов ветви 3 соответствует найденной асимптотике  $F = -12R$ , а другой при  $F \rightarrow 0$  стремится к общей с ветвью 2 вертикальной асимптотике при  $\lg |R| \approx 0.799$ .

Рис. 1. Спектр  $F = F(R)$  задачи

Установлено, что спектр  $F = F(R)$  обладает неединственностью решения. В частности, на ветви 3 ( $R > 0$ ) имеется от одного до трёх значений собственного числа  $F$ , отвечающих фиксированному значению параметра  $R$ . Участок ветви 2 с неединственным решением представлен в увеличенном масштабе на рис. 1. Отметим также, что имеется не менее двух решений с нулевым собственным значением: одно соответствует асимптотике  $F = -12R$ , а второе — значению параметра  $R = 6.303$  (общая вертикальная асимптота ветвей 2 и 3).

В заключении отметим важность предложенного метода: в большинстве задач тепловой конвекции, содержащих параметры, представляет интерес именно совокупность решений для всего диапазона значений параметров, а не отдельное решение для конкретного набора значений параметров. Также рассмотренная задача может быть использована в качестве тестовой при численных расчётах, а также при моделировании реальных ситуаций, встречающихся в приложениях.

## Об обратных задачах нелинейной фильтрации

© Любанова Анна Шоломовна

кандидат физико-математических наук,

ученое звание доцент,

доцент кафедры систем автоматики, автоматизированного управления и проектирования  
Сибирский федеральный университет

Россия, 660041, Красноярск, просп. Свободный, 79

lubanova@mail.ru

**Ключевые слова:** обратная задача, уравнение соболевского типа, краевые условия, условие переопределения, обобщенное решение, существование, единственность, операторное уравнение, фильтрация, трещиноватая среда

Появление новых моделей фильтрации, учитывающих внутренние взаимодействия в сложных средах, дало толчок развитию качественной теории обратных и нелокальных задач для неклассических уравнений типа фильтрации. К таким уравнениям относятся, в частности, уравнения соболевского и параболического типа, а также связанные с ними стационарные уравнения.

Настоящее исследование посвящено двум коэффициентным обратным задачам для нелинейного уравнения соболевского типа, описывающего фильтрацию слабожимаемой жидкости в трещиноватых средах (почвах, нефтяных пластах и др.).

$$(u + \eta M\psi(u))_t + k(t)M\psi(u) + g(t)u = f(t, x). \quad (1)$$

Рассматриваются две обратные задачи.

**Задача 1.** При заданных функциях  $\psi(\rho)$ ,  $f(t, x)$ ,  $\beta(t, x)$ ,  $U_0(x)$ ,  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$ ,  $\omega(t, x)$ , постоянной  $\eta$  и  $g(t) = 0$  найти пару функций  $\{u(t, x), k(t)\}$ , удовлетворяющую уравнению (1) в цилиндре  $Q_T = (0, T) \times \Omega$ , где  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$  – ограниченная область с границей  $\partial\Omega$ , краевым условиям

$$(u + \eta M\psi(u))|_{t=0} = U_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u = \beta(t, x), \quad (t, x) \in S_T = (0, T) \times \partial\Omega, \quad (3)$$

и условию переопределения

$$\int_{\partial\Omega} \left\{ \eta \frac{\partial(\psi(u))_t}{\partial \bar{N}} + k(t) \frac{\partial \psi(u)}{\partial \bar{N}} \right\} \omega(t, x) ds + \varphi_1(t)k(t) = \varphi_2(t) \quad (4)$$

при  $t \in (0, T)$ . Здесь  $M$  – линейный сильно эллиптический оператор вида

$$M = -\operatorname{div}(\mathcal{M}(x)\nabla) + m(x)I,$$

где  $I$  – тождественный оператор,  $\mathcal{M}(x)$  – матрица функций  $m_{ij}(x)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ,  $m(x)$  скалярная функция;

$$\frac{\partial}{\partial \bar{N}} = (\mathcal{M}(x)\nabla, \bar{\mathbf{n}}),$$

$\bar{n}$  – единичный вектор внешней нормали к  $\partial\Omega$ .

**Задача 2.** При заданных функциях  $\psi(\rho)$ ,  $f(t, x)$ ,  $\beta(t, x)$ ,  $U_0(x)$ ,  $\varphi(t)$ ,  $\omega(t, x)$ , постоянной  $\eta$  и  $k(t) = 1$  найти пару функций  $\{u(t, x), g(t)\}$ , удовлетворяющую уравнению (1) в цилиндре  $Q_T = (0, T) \times \Omega$ , краевым условиям (2), (3) и условию переопределения

$$\int_{\partial\Omega} \left\{ \eta \frac{\partial(\psi(u))_t}{\partial \bar{N}} + \frac{\partial\psi(u)}{\partial \bar{N}} \right\} \omega(t, x) ds = \varphi(t)$$

при  $t \in (0, T)$ .

Для задач 1 и 2 найдены достаточные условия существования и единственности обобщенного решения  $u$ , определенного в  $Q_{t^*} = (0, t^*) \times \Omega$ , где  $0 < t^* \leq T$ , из класса  $W(t^*) = \{v \mid \psi(v) \in C([0, t^*]; W_2^2(\Omega)), v \in C([0, t^*]; L^4(\Omega)), v_t \in L^\infty(0, t^*; L^2(\Omega)), (\psi(v))_t \in L^\infty(0, t^*; W_2^2(\Omega))\}$  и неизвестных коэффициентов из  $C([0, t^*])$ . При доказательстве локальной разрешимости этих задач используется метод продолжения данных, разработанный автором в [1] на основе идеи сведения обратной задачи к операторному уравнению для неизвестного коэффициента [2].

## Литература

1. Lyubanova A. Sh. Identification of a constant coefficient in an elliptic equation / A. Sh. Lyubanova // *Applicable Analysis*. 2008. V. 87. № 10-11. P. 1121–1128. DOI: 10.1080/00036810802189654.
2. Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. *Methods for solving inverse problems in mathematical physics*. New York: Marcel Dekker, Inc., 2000. 709 p.



О  $B$ -полигармонических операторах

## © Ляхов Лев Николаевич

доктор физико-математических наук,

ученое звание профессор,

Воронежский государственный университет

Россия, 394018, Воронеж, ул. Ленина, 10 А

Липецкий государственный педагогический университет имени П.П. Семенова-Тян-Шанского

Россия, 398020, Липецк, ул. Ленина, 42

Елецкий государственный университет И.А. Бунина

Россия, 399770, Елец, ул. Коммунаров, 28

levnlya@mail.ru

## © Грязнева Елена Анатольевна

старший преподаватель кафедры математики и физики

Липецкий государственный педагогический университет имени П.П. Семенова-Тян-Шанского

Россия, 398020, Липецк, ул. Ленина, 42

gryaznevaea@mail.ru

**Ключевые слова:**  $B$ -полигармонический оператор, радиальная функция, фундаментальное решение, сингулярный дифференциальный оператор Бесселя, оператор Киприянова, линейная форма, распределения Л. Шварца.

Пусть  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  — мультииндекс, с фиксированными мало отрицательными координатами  $\gamma_i > -1$  и пусть  $B_{\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_n^+ = x : x_i > 0$ . Рассматривается сингулярный дифференциальный оператор  $\Delta_{B_\gamma} = \sum_{i=1}^n B_{\gamma_i}$ . Натуральная степень этого оператора  $\Delta_{B_\gamma}^m$  называется  $B$ -полигармоническим оператором порядка  $m$ . Применением формулы Киприянова—Бельтрами [1-2] получено равенство  $\Delta_{B_\gamma} \varphi(|x|) = B_\mu \varphi(|x|)$ ,  $\mu = n + |\gamma| - 1$ , с помощью которого доказана формула понижения порядка  $B$ -полигармоничности:  $\Delta_\gamma^m |x|^{2m-n-|\gamma|} = \Xi(m, n, \gamma) B_\mu r^{2-n-|\gamma|}$ .

В качестве основного пространства функций рассматривается подпространство Л.Шварца  $S_{ev} = S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$ , состоящее из функций четных по каждой координате своего аргумента. Число  $|\gamma| = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$  (возможно отрицательное), следуя [2], будем называть коэффициентом скрытой сферической симметрии, а число  $n + |\gamma| > 0$  — псевдоевклидовой размерностью евклидова пространства  $\mathbb{R}_n$ .  $\delta$ -Функцией Дирака—Киприянова с носителем в начале координат будем называть сингулярное весовое распределение в весовой линейной форме  $(u, \varphi)_\gamma = \int u(x) \varphi(x) x^\gamma dx$ , определенное соотношением  $(\delta_\gamma, \varphi)_\gamma = \varphi(0)$  (введено в [3]). Распределение Дирака—Киприянова с носителем в произвольной точке  $\overline{\mathbb{R}_n^+}$  вводится на основе оператора Т-псевдосдвига (см. [3]).

Поиск фундаментального решения  $B$ -полигармонического оператора сведено к поиску фундаментального решения оператора Бесселя  $B_\mu$  с параметром  $\mu = n + |\gamma| - 1$ . Для псевдоевклидовой размерности  $n + |\gamma| = \mu + 1$ , возможны три случая.

**Случай А)** :  $n + |\gamma| < 1$  при этом  $-1 < \mu < 0$ .

**Случай В)** :  $n + |\gamma| = 1$  при этом  $\mu = 0$ .

**Случай С)** :  $n + |\gamma| > 1$  при этом  $\mu > 0$ .

В каждом из указанных случаев фундаментальное решение  $B$ -полигармонического оператора  $\Delta$  совпадает (с точностью до константы) с фундаментальным решением оператора Бесселя  $B_\mu$ ,  $\mu = n + |\gamma| - 1$ . Приведем соответствующие формулы.

**Случай А)**  $-1 < n + |\gamma| < 0$ .

**Теорема 1.** Фундаментальным решением  $K$ -полигармонического оператора  $\Delta_{B-\gamma}^m$  при  $-1 < \mu < 0$  с центром в начале координат и в произвольной точке  $\overline{\mathbb{R}_n^+}$  соответственно являются функции

$\mathcal{E}_{(A)}(|x|) = \mathcal{M}(m, n, \gamma) |x|^{2m-n+|\gamma|}$ ,  $\mathcal{E}_{(A)}(|x|) = \mathcal{M}(m, n, \gamma) \mathbb{T}_y^x |x|^{2m-n+|\gamma|}$ .  
где  $\mathcal{M}(m, n, \gamma)$  — константа.

**Случай В):**  $\mu = n + |\gamma| - 1 = 0$ .

**Теорема 2.** Фундаментальным решением  $B$ -полигармонического оператора  $\Delta_{B-\gamma}^m$  при условии  $(\mu = n + |\gamma| - 1 = 0)$  с центром в начале координат и в произвольной точке  $\mathbb{R}_n^+$  является следующее регулярное распределение в  $S'_{ev}$ , соответственно

$$\mathcal{E}_{(B)}(x - y) = \frac{|x - y|^{2m-n-|\gamma|}}{\Xi(m, n, \gamma) |S_1(n)|_\gamma} = \frac{|x - y|^{2m-1}}{\Xi(m, n, \gamma) |S_1(n)|_\gamma}.$$

**Случай С):**  $n + |\gamma| > 1$ .

**Теорема 3.** Пусть число  $\frac{\mu+1}{2} = \frac{n+|\gamma|}{2}$  не натуральное или натуральное, но  $n + |\gamma| < m$ . Тогда фундаментальным решением в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}_n^+$  для  $B$ -полигармонического оператора  $\Delta + B^m$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$  является функция

$$\mathcal{E}_{m,n,\gamma}(x) = \frac{(-1)^m \Gamma(\frac{n+|\gamma|}{2} - m)}{2^{2m} \Gamma(m) \Gamma(\frac{n+|\gamma|}{2})} |T^y x|^{2m-n-|\gamma|}.$$

а при  $2m \geq n + |\gamma|$

$$\mathcal{E}_{m,n,\gamma}(x) = \frac{(-1)^{\frac{n+|\gamma|-2}{2}}}{2^{2m} \Gamma(m) \Gamma(m+1 - \frac{n+|\gamma|}{2}) \Gamma(\frac{n+|\gamma|}{2})} |T^y x|^{2m-1-n-|\gamma|} \ln |x|.$$

Здесь  $T_x^y$  — сдвиг Пуассона [3].

## Литература

1. Ляхов Л. Н., Санина Е. Л. Оператор Киприянова-Бельтрами с отрицательной размерностью операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для В-гармонического уравнения, *Дифференциальные уравнения* — 2020.— Т.56. № 12.— С. 1610–1620.
2. Ляхов Л. Н., Санина Е. Л. Дифференциальные и интегральные операции в скрытой сферической симметрии и размерность кривой Коха, *Матем. заметки*, 2023, том 113, выпуск 4, 517–528.
3. Ляхов, Л.Н. Фундаментальное решение сингулярного дифференциального оператора Бесселя с отрицательным параметром / Л.Н. Ляхов, Е.Л. Санина, С.А. Рошупкин, Ю.Н. Булатов // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2023. — № 7. — С. 52–65.

## Теорема о норме сингулярных $\mathbb{J}$ -псевдодифференциальных операторов Киприянова

### © Ляхов Лев Николаевич

доктор физико-математических наук,

ученое звание профессор,

профессор кафедры математического и прикладного анализа

Воронежский государственный университет

Россия, 394018, Воронеж, Университетская пл., 1

профессор кафедры математики, информатики, физики и методики обучения

Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина

Россия, 399770, Елец, ул. Коммунаров, 28

Липецкий государственный педагогический университет имени П.П. Семенова-Тян-Шанского

Россия, 398020, Липецк, ул. Ленина, 42

levnlya@mail.ru

### © Булатов Юрий Николаевич

старший преподаватель кафедры математики, информатики, физики и методики обучения

Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина

Россия, 399770, Елец, ул. Коммунаров, 28

y.bulatov@bk.ru

### © Рощупкин Сергей Александрович

кандидат физико-математических наук,

ученое звание доцент,

директор цифровых технологий и математики

Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина

Россия, 399770, Елец, ул. Коммунаров, 28

y.bulatov@bk.ru

**Ключевые слова:** сингулярный дифференциальный оператор Бесселя, оператор  $\mathbb{T}$ -псевдосдвига,  $\mathbb{J}$ -преобразование Бесселя, псевдодифференциальные операторы.

### Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 24-21-00387).

Пусть  $\mathbb{R}_n = \{x = (x_1, \dots, x_n)\}$ ,  $\mathbb{R}_n^+ = \{x : x_i > 0\}$ ,  $\overline{\mathbb{R}_n^+} = \{x : x_i \geq 0\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Изучение уравнений с сингулярными дифференциальными операторами Бесселя, содержащих отрицательный параметр, было инициировано И.А. Киприяновым. Такие исследования начаты в работе [1] для операторов вида

$$\Delta_{B_{-\gamma}} = \sum_{i=1}^n B_{-\gamma_i}, \quad B_{-\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad -\gamma = (-\gamma_1, \dots, -\gamma_n), \quad -\gamma_i \in (-1, 0).$$

Пусть  $\mu_i = (\gamma_i + 1)/2$ . Линейно независимые решения сингулярных дифференциальных уравнений Бесселя  $B_{-\gamma_i} u + u = 0$ , имеют следующий вид:

$$\mathbb{J}_{-\mu_i}(x) = \Gamma(1 - \mu_i) 2^{-\mu_i} x_i^{\mu_i} J_{-\mu_i}(x), \quad \mathbb{J}_{\mu_i}(x) = \Gamma(1 + \mu_i) 2^{\mu_i} x_i^{\mu_i} J_{\mu_i}(x),$$

где  $J_{\mp\mu_i}$  — функции Бесселя первого рода. Пусть  $\mathbb{J}_\mu(x) = \prod_{i=1}^n \mathbb{J}_{\mu_i}$ , где  $\mu$  мультииндекс, с координатами  $\mu_i \in (\frac{1}{2}, 1)$ . Через  $S_{ev} = S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$  обозначим подпространство пространства основных функций Шварца, состоящее из четных по Киприянову [2, с.21] функций. Через  $\Xi_{-\gamma}^m = \Xi_{-\gamma}^m(\mathbb{R}_n^+ \times \mathbb{R}_n^+)$  будем обозначать класс бесконечно дифференцируемых четных функций  $a(x, \xi)$  удовлетворяющих неравенству  $|(B_{-\gamma_i}^{\alpha_i})_x (B_{-\gamma_i}^{\beta_i})_\xi a(x, \xi)| \leq C (1 + \xi^2)^{\frac{m-|\beta|}{2}}$ , константа  $C=C_{\alpha,\beta}$  не зависит от  $x, \xi$ .

Через  $H_{-\gamma}^s(\mathbb{R}_n^+)$  обозначим пополнение множества  $S_{ev}$  по норме

$$\|u\|_{H_{-\gamma}^s}^2 = \int_{\mathbb{R}_n^+} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 \xi^{-\gamma} d\xi,$$

где  $\widehat{u}$  — четное  $\mathbb{J}$ -преобразование функции  $u$  (см. [1]). Введем псевдосдвиг

$$\mathbb{T}_x^y f(x) = \int_0^\pi \dots \int_0^\pi f\left(x \overset{\alpha}{\rightarrow} y\right) \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma_i+2}{2}\right)} \frac{(x_i y_i)^{\gamma_i+1}}{(x_i \overset{\alpha_i}{\rightarrow} y_i)^{\gamma_i+1}} (\sin \alpha_i)^{\gamma_i+1} d\alpha_i,$$

где  $(x \overset{\alpha}{\rightarrow} y)$  — вектор, координаты которого  $x_i \overset{\alpha_i}{\rightarrow} y_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos \alpha_i}$ .

**Определение.** Оператор, действующий на функцию  $u \in S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$  по формуле

$$Au(x) = \int_{\mathbb{R}_n^+} \int_{\mathbb{R}_n^+} \mathbb{T}_x^y \mathbb{J}_\mu(x\xi) a(x, \xi) u(y) y^{-\gamma} dy \xi^{-\gamma} d\xi,$$

будем называть сингулярным  $\mathbb{J}$ -псевдодифференциальным оператором Киприянова.

**Теорема.** Пусть  $A$  — сингулярный  $\mathbb{J}$ -псевдодифференциальный оператор Киприянова, отвечающий символу  $a(x, \xi) \in \Xi_{-\gamma}^m$ . Обозначим через  $|a(x^0, \xi^0)| = c_0 \neq 0$  — значение символа в точке  $x^0, \xi^0$ . Тогда для любой окрестности  $\Omega^+ \subset \mathbb{R}_n^+$  точки  $x^0$ , а также для любых вещественных чисел  $s, l < m$  и  $\varepsilon > 0$  найдется бесконечно дифференцируемая функция  $u_\varepsilon(x) = \mathbb{J}_\mu(x, \lambda \xi^0) \varphi(x)$ , ( $\lambda = \lambda_\varepsilon$  — большое положительное число, а  $\varphi$  четная по Киприянову, с носителем в  $\Omega^+$ ), такая что

$$\|u_\varepsilon\|_{H_{-\gamma}^{s-m+l}} \leq \varepsilon \|\overline{u_\varepsilon}\|_{H_{-\gamma}^s},$$

$$\left| \|Au_\varepsilon\|_{H_{-\gamma}^{s-m}} - C_0 \|\overline{u_\varepsilon}\|_{H_{-\gamma}^s} \right| \leq \varepsilon \|\overline{u_\varepsilon}\|_{H_{-\gamma}^s},$$

в которых

$$\|\overline{u_\varepsilon}\|_{H_{-\gamma}^s} = \max \left( \sqrt{\int (1+|\xi|^2)^s \left( \mathbb{T}_\xi^{\lambda \xi^0} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 \right) \xi^{-\gamma} d\xi}, \quad \|u_\varepsilon\|_{H_{-\gamma}^s} \right).$$

## Литература

1. Ляхов Л.Н., Булатов Ю. Н., Рошупкин С. А., Санина Е.Л. Псевдосдвиг и фундаментальное решение  $\Delta_B$ -оператора Киприянова // Дифф. уравнения. 2022. Т. 58, № 12. С. 1654–1665. DOI: 10.1134/s00122661220120072.
2. Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Наука, 1997. 198 с.

## Об одном алгоритме решения искомой многомерной гиперболической задачи

©Максудов Рустам Зайнутдинович

кандидат физико-математических наук,

ученое звание доцент,

доцент кафедры высшей математики

Ташкентский институт инженеров ирригации

и механизации сельского хозяйства.

Узбекистан, 100000, г.Ташкент, ул. Кори Ниязов, дом 39.

e-mail rusmaks-85@mail.ru

**Ключевые слова:** алгоритм, многомерное, расщепления, разностный, импульс, одномерные, комбинации, давление, скорость, сжимаемость

В работе предлагается аналитический алгоритм расчета волновых полей.

Алгоритм численно реализован для системы уравнений акустики. Алгоритм основывается на методе расщепления, многомерное задачи на пространственно-одномерные на интервале времени. Для решения систем (1)-(2) обычно применяют какой-либо конечно разностный алгоритм. Здесь было предложено от систем (1)-(2) переходить к их каноническому виду.

Пусть имеем многомерную гиперболическую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$U(x, y, 0) = U_0(x, y). \quad (2)$$

Рассмотрим для системы (1) задачу с начальными данными (2) и предположим, что  $A$  и  $B$  – квадратные симметрические матрицы порядка  $m$ , а правая часть системы (1) равна нулю.

Алгоритм численного расчёта решений системы уравнений (1)-(2) строится на основе метода расщепления как [1,2] исходной системы на две одномерные, по  $x$  и по  $y$ .

При этом на интервале времени  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$  имеем:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \varphi(x, y, t_i) = u(x, y, t_i) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + B \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \psi(x, y, t_i) = \varphi(x, y, t_{i+1}) \quad (4)$$

$$u(x, y, t_{i+1}) = \psi(x, y, t_{i+1})$$

Теперь вместо задачи (1)-(2) на каждом интервале времени  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$  можно последовательно решать задачи (3)-(4) и тем самым находить приближенное решение задачи (1)-(2). Для решения системы (3)-(4) обычно применяются какой-либо

конечно-разностный алгоритм. В работах [2] было предложено от систем (3)-(4) переходить к их каноническому виду:

$$\frac{\partial r_k}{\partial t} + \lambda_k \frac{\partial r_k}{\partial x} = 0. \quad (5)$$

$$\frac{\partial s_k}{\partial t} + \mu_k \frac{\partial s_k}{\partial y} = 0. \quad (6)$$

где  $r_k, s_k$  - римановы инварианты,  $\lambda_k, \mu_k$  — действительные собственные числа матриц  $A$  и  $B$ . Для нахождения решений (5)-(6) были использованы как [3] явные и неявные разностные схемы бегущего счета. В этой работе предлагается для нахождения решения систем (5)-(6) воспользоваться аналитическими формулами.

Действительно, из (5) сразу следует соотношение:

$$r_k(x, y, t_{i+1}) = r_k(x - \lambda_k(t_{i+1} - t_i), y, t_i), \quad (7)$$

Из (6) следует, что выполнено соотношение

$$S_k = (x, y, t_{i+1}) = S_k(x, y - \mu_k(t_{i+1} - t_i), t_i). \quad (8)$$

где  $S_k$  — линейные комбинации функций  $\psi_k$ , которые при  $t = t_i$  известны, так как  $\psi_k(x, y, t_i) = \varphi_k(x, y, t_{i+1})$ , и  $S_k$  определены при  $t = t_i$ .

Таким образом, вместо нахождения решений систем (3)-(4) или (5)-(6) разностными методами предлагается на каждом временном интервале  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$  для приближенного нахождения решения задачи (1)-(2) последовательно пользоваться аналитическими формулами (7)-(8). Пусть в плоскости  $(x, y)$  распространение звуковых волн описывается системой уравнений акустики;

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $u = u(x, y, t)$ ,  $v = v(x, y, t)$  — компоненты вектора скорости перемещений точек среды,  $p = p(x, y, t)$  — давление в среде,  $c_0$  — скорость звука. Постоянные  $\rho_0, c_0^2$  связаны со свойствами среды:  $\rho_0$  — ее плотность,  $c_0^2$  — характеризует сжимаемость среды.

В рассматриваемом случае давление и плотность связаны соотношением:

$$\rho = c_0^2(\rho - \rho_0).$$

На решениях системы уравнений (9) для любого замкнутого контура  $\gamma$  выполнено следующее интегральное равенство:

$$\oint_{\gamma} \left( \rho_0 \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{\rho^2}{2\rho_0 c_0^2} \right) dx dy + p u dy dt + p v dx dt = 0$$

Это равенство является законом сохранения энергии акустических волн в случае двух пространственных переменных. Основанием для вывода расчетных формул будут служить интегральные соотношения, представляющие законы сохранения массы и импульса для рассматриваемой акустической задачи.

## Литература

Багриновский К.А., Годунов С.К. Разностные схемы для многомерных задач. – Докл. АН СССР, т.115, № 3, с. 431 – 433.

Яненко Н.Н. Метод дробных шагов. – М.: Наука, 1967.

Максудов Р.З. Аналитический алгоритм расчета для уравнения гиперболического типа. Неклассические уравнения математической физики. Международная научная конференция. Ташкент. Изд-во "Маърифат" 2024 г. С.182.

## Нелокальные краевые задачи пространственного типа для квазиультрапараболических уравнений

© Маматов Жавохир Абдишукур угли

аспирант, Новосибирский государственный университет  
Россия, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 1  
z.mamatov@g.nsu.ru

© Кожанов Александр Иванович

доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник  
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН  
Россия, 630090, Новосибирск, пр. Коптюга, 4  
kozhanov@math.nsc.ru

**Ключевые слова:** квазиультрапараболические уравнения, краевые задачи, регулярные решения, существование, единственность.

**Благодарности:** Доклад подготовлен в рамках государственного задания Института Математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект FWNF-2022-0008).

В докладе излагаются результаты о разрешимости краевых задач для квазиультрапараболических уравнений вида:

$$u_t + a(t) \frac{\partial^{2p+1} u}{\partial x^{2p+1}} - \Delta_y u + c(x, y, t)u = f(x, y, t), \quad (1)$$

где  $p \geq 0$  — целое число.

Суть рассматриваемых задач состоит в том, что по пространственной переменной  $y$  задаются условия интегрального вида.

Здесь  $x, y, t$  — независимые переменные такие, что  $x \in \Omega$ ,  $\Omega$  — интервал  $(0, 1)$  оси  $OX$ ,  $y \in G \subset \mathbb{R}^m$ ,  $t \in (0, T)$ ,  $0 < T < +\infty$ . В области  $Q = \Omega \times G \times (0, T)$  рассматривается квазиультрапараболическое уравнение (1), где  $c(x, y, t)$ ,  $f(x, y, t)$ ,  $a(t)$  — заданные функции. Доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений — решений, имеющих все обобщённые по С. Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.



## Дозвуковое обтекание упруго-пластически деформируемых стержней, взаимодействующих с окружающей средой

© Маматова Нигора Тухтабаевна

кандидат физико-математических наук, доцент,  
Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека,  
Узбекистан, 100174, г. Ташкент, ул. Университетская, 4  
nigmamatova@yandex.com

**Ключевые слова:** трение Кулона, упруго-пластическая деформация, знакопеременное нагружение, нелинейные диаграммы нагружений, метод характеристик.

Известно, что многие аналитические решения задач о взаимодействии протяженных конструкций с условием Кулонова трения в упругопластически деформируемых конструкциях получены только при постоянных импульсивных нагружениях во времени [1], [2]. Учет переменности внешних нагрузок, что нередко связано с потребностями практики существенно усложняет решение этого класса задач – становятся заранее неизвестными области контактного взаимодействия Кулонова трения с соответствующими знаками относительных скоростей.

В данной работе решается задача об ударном и знакопеременном нагружении протяженной деформируемой конструкции, находящейся в упругой среде и взаимодействующей с ней по закону сухого трения Кулона. Задача характеризуется тем, что материал конструкции может быть не только линейно-упругим, но и нелинейно деформируемым материалом. К этим нелинейностям, характеризующим материал конструкции, прибавляются нелинейности присущие для законов сухого трения Кулона.

В случае линейных аппроксимаций активных диаграмм нагружений, решения представляются в виде точных аналитических формул для искомых параметров в начальной стадии ударного нагружения. Для материалов конструкции с существенными нелинейными диаграммами нагружений, не подчиняющимися схемам Прандтля разработан численный метод характеристик с соответствующими анализами поставленных задач. Проверена достоверность численных результатов исследований: при устремлении коэффициента трения к нулю, на контакте взаимодействия, решения с большой точностью совпадают, как и ожидалось, с классическими решениями разработанными Х.А.Рахматулиным [3].

## Литература

1. Begmatov A., Mamatova N.T. Sudden loading of an elastoplastic rod Interacting with the environment.// Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2022, Vol. 63, . 1. P. 118–131.
2. Бегматов А., Маматова Н.Т. Задача о внезапном нагружении упруго-пластического стержня, взаимодействующего с окружающей внешней средой// Узб.журнал “Проблемы механики”. 2019. 2. –С. 44–52.
3. Рахматулин Х.А., Демьянов Ю.А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. – М.: Университетская книга; Логос, 2009. – 512 с.

**Математическое моделирование системы твёрдых тел, прикрепленных к двум упругим стержням**

© **Миждон Арсалан Дугарович**

доктор технических наук, профессор

Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления,

Россия, 670013, Респ. Бурятия, Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40В

E-mail: miarsdu@mail.ru

© **Хамханов Алдар Кимович**

преподаватель

Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления,

Россия, 670013, Респ. Бурятия, Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40В

E-mail: msdos147@gmail.com

**Ключевые слова:** гибридная система дифференциальных уравнений, балка Эйлера–Бернулли, вариационный принцип, упругий стержень, твердое тело, динамика систем.

Применение вариационного принципа Гамильтона–Остроградского общего для систем с сосредоточенными и распределенными параметрами для построения уравнений динамики систем твердых тел, соединенных упругими связями со стержнями, приводит к рассмотрению гибридных систем дифференциальных уравнений (ГСДУ) [1, 2]. Под ГСДУ понимается система дифференциальных уравнений, состоящая из обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Полученные при этом системы дифференциальных уравнений являются линейными ГСДУ, с коэффициентами, зависящими от  $\delta$ -функций Дирака, в связи с этим представляют собой новый класс дифференциальных уравнений, который предлагаем классифицировать как линейные ГСДУ с сингулярными коэффициентами.

Отметим, на протяжении последних лет на кафедре прикладной математики ВСГУТУ проводились исследования, направленные на разработку теоретических основ исследования линейных ГСДУ с сингулярными коэффициентами [3]. В качестве приложений исследований, в частности рассматривались механические системы, представляющие собой различные классы систем взаимосвязанных твердых тел и стержней, описываемые ГСДУ. Вывод, на основании вариационного принципа Гамильтона–Остроградского, уравнений движения различных механических систем, представляющих собой балку Эйлера–Бернулли с прикрепленной на ней системой взаимосвязанных твердых тел, и их анализ позволил авторам предложить обобщенную математическую модель данного класса механических систем [4, 5]. Под обобщенной математической моделью понимается ГСДУ заданной структуры, описывающая динамику произвольных систем взаимосвязанных твердых тел, прикрепленных упругими связями к балке Эйлера–Бернулли. Для обобщенной математической модели были разработаны теоретические основы исследования свободных колебаний, основанные на математическом аппарате обобщенных функций [3, 4, 5].

В докладе производится развитие методов исследования свободных колебаний на случай механических систем, состоящей из  $n$  тел, закрепленных на двух упругих стержнях, представляющих собой балки Эйлера–Бернулли. Рассмотрение случая крепления тел на два упругих стержнях позволяет учесть дополнительные факторы взаимодействия между элементами механических систем и в целом расширяет класс исследуемых моделей [6].

Система состоит из  $n$  твердых тел, которые присоединены либо друг к другу, либо к упругим стержням пружинами заданной жёсткости. При построении математической модели учитываются поступательные и вращательные движения тел, а также поперечные колебания стержней. Потенциальная энергия системы включает упругие деформации пружин и стержней, а кинетическая энергия охватывает поступательное и вращательное движение тел, а также колебания стержней. Концы стержней жестко закреплены, что отражено в граничных условиях модели.

Разработанная модель может быть использована для дальнейшего уточнения обобщённых математических моделей механических систем, расчетные модели которых представляют собой системы взаимосвязанных твердых тел, прикрепленных к нескольким стержням.

## Литература

1. Мижидон А.Д., Мижидон К.А. Собственные значения для одной системы гибридных дифференциальных уравнений // Сибирские электронные математические известия. 2016. Т. 13. С. 911–922.
2. Мижидон А.Д. Гибридные системы дифференциальных уравнений в приложении к исследованию одного класса механических систем с сосредоточенными и распределенными параметрами // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов в 4 томах. Т. 1: Общая и прикладная механика. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. С. 21–23.
3. Мижидон А.Д. Теоретические основы исследования одного класса гибридных систем дифференциальных уравнений // Математический анализ, Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. 2018. Т. 155. С. 38–64.
4. Мижидон А.Д. Обобщенная математическая модель системы твердых тел, установленных на упругом стержне / А.Д. Мижидон, М.Ж. Цыцыренова // Вестник ВСГУТУ. — 2013. — № 6. — С. 5–12.
5. Mizhidon A.D. A generalized mathematical model for a class of mechanical systems with lumped and distributed parameters // AIMS Mathematics. 2019. Vol. 4. N. 3. P. 751–762.
6. Мижидон А.Д. Гибридная система дифференциальных уравнений, описывающая твердое тело, прикрепленное к двум упругим стержням / А.Д. Мижидон, А.К. Хамханов // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. — 2022. — № 4. — С. 38–47.

## О задаче восстановления граничных режимов для уравнения Буссинеска

© Намсараева Гэрэлма Владимировна

кандидат физико-математических наук,

старший преподаватель

Восточно-Сибирский государственный университет

технологий и управления

Россия, 670013, Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40В, строение 1

gerel@inbox.ru

**Ключевые слова:** обратная задача, уравнение Буссинеска, условие переопределения, метод Фурье.

Пусть  $\Omega$  есть ограниченная область пространства  $R^n$  с гладкой (бесконечно-дифференцируемой) границей  $\Gamma$ ,  $Q$  – есть цилиндр  $\Omega \times (0, T)$ ,  $S = \Gamma \times (0, T)$  – боковая граница  $Q$ ,  $f(x, t)$ ,  $h(x)$ ,  $N(x)$  – заданные функции, определенные при  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $x_0$  – заданная точка из  $\bar{\Omega}$ .

**Обратная задача I:** найти функции  $u(x, t)$  и  $q(t)$  такие, что для функции  $u(x, t)$  выполняется уравнение

$$u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} = f(x, t), \quad (1)$$

и выполняются также условия

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu} = q(t)h(x), \quad (x, t) \in S, \quad (3)$$

$$\int_{\Omega} N(x)u(x, t)dx = 0, \quad 0 < t < T. \quad (4)$$

Здесь и далее  $\nu = (\nu_{x_1}, \nu_{x_2}, \dots, \nu_{x_n})$  – вектор внутренней нормали к границе в текущей точке  $x$ .

**Обратная задача II:** найти функции  $u(x, t)$  и  $q(t)$  такие, что для функции  $u(x, t)$  выполняется уравнение (1), условия (2), (4) и

$$u(x, t) = q(t)h(x), \quad (x, t) \in S. \quad (5)$$

Изучаемые задачи относятся к классу обратных задач — именно, задач, в которых вместе с решением неизвестными являются те или иные входные данные. В настоящей работе вместе с решением неизвестным является множитель, зависящий от временной переменной и определяющий правую часть в граничном условии первого или второго рода.

Обратные задачи определения вместе с решением также неизвестных граничных данных ранее изучались для параболических уравнений — см. [2, 1, 3, 8, 9], для уравнения же Буссинеска подобные задачи ранее не изучались. Обратные задачи для уравнения Буссинеска изучались в работах [4, 5, 6, 7].

Мы применим подход к исследованию разрешимости обратных задач для уравнения Буссинеска, основанный на применении метода Фурье и сведении задачи к интегральным уравнениям Вольтерра второго рода.

## Литература

1. Кожанов А.И. Линейные обратные задачи для некоторых классов нестационарных уравнений // Сиб. электрон. мат. изв. 2015. Т. 12. С.264–275.
2. Костин А.Б., Прилепко А.И. О некоторых задачах восстановления граничного условия для параболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1996. Т.32. № 11. С. 1519–1528.
3. Короткий А. И., Ковтунов Д. А. Реконструкция граничных режимов в обратной задаче тепловой конвекции высоковязкой жидкости // Тр. ИММ УрО РАН. 2006. Т. 12. № 2. С. 88–97.
4. Мегралиев Я.Т. Обратная краевая задача для уравнения Буссинеска-Лява с дополнительным интегральным условием. Сиб. журн. индустр. мат. Том 16, №1, 2013. С. 75–83.
5. Мегралиев Я.Т. Ализаде Ф.Х. Обратная краевая задача для одного уравнения Буссинеска с интегральным условием. Чебышевский сборник, Том 14, Выпуск 4, 2013. С. 167–179.
6. Намсараева Г.В. Линейные обратные задачи для некоторых аналогов уравнения Буссинеска. Математические заметки СВФУ, Том 21, № 2, 2014. С. 47–59.
7. Намсараева Г.В. Обратные задачи определения внешних источников в уравнении распространения продольных волн / Г. В. Намсараева // Сиб. журн. индустр. матем. – 2016. – Т.19, № 3. – С. 28–40;
8. Телешева Л.А. Восстановление параметров в краевых задачах для линейных параболических уравнений четвертого порядка // Математические заметки СВФУ, Том 22, № 3, 2015. С. 48–56.
9. Япарова Н.М. О различных подходах к решению обратных граничных задач тепловой диагностики // Вестник ЮУрГУ. Серия: Матем. Мех. Физика. Вып. 7. № 34. 2012.

## Идентификация неоднородных свойств функционально-градиентного упругого стержня с пустыми порами

© **Нестеров Сергей Анатольевич**

доктор физико-математических наук,

ведущий научный сотрудник

Южный математический институт – филиал Владикавказского научного центра РАН

Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53

1079@list.ru

© **Дударев Владимир Владимирович**

кандидат физико-математических наук,

доцент кафедры теории упругости

Южный федеральный университет

Россия, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а

dudarev\_vv@mail.ru

**Ключевые слова:** материал с пустыми порами, модель Ковина-Нунзиато, неоднородный материал, стержень, колебания, идентификация, проекционно-итерационный подход, интегральное уравнение, полиномы, начальное приближение.

### Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00265-П, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/>, в Южном федеральном университете.

Упругие материалы, содержащие пустые поры, широко применяются в различных областях техники в качестве биопротезов, звукопоглощающих и теплоизоляционных материалов. Для описания поведения таких материалов часто применяется микро-дилатационная теория Ковина–Нунзиато, в которой в качестве переменных выступают вектор смещения среды и пористость (микро-дилатация) [1]. В рамках данной модели проведено большое число исследований колебаний однородных тел.

Однако в последнее время с целью оптимизации конструкций стали внедряться функционально-градиентные пористые материалы (ФГПМ) – композиты, материальные свойства которых, согласно технологии изготовления, должны изменяться по степенным законам [2]. Для осуществления контроля качества конструкций из ФГПМ требуются надежные технологии идентификации их материальных свойств, например, в классе полиномиальных функций на основе аппарата коэффициентных обратных задач (КОЗ) пороупругости.

Ранее был разработан итерационный подход к решению аналогичных нелинейных КОЗ механики связанных полей, в том числе задач термоупругости для стержня [3, 4] и пороупругости с насыщенными жидкостью порами для стержня [5] и цилиндра [6]. Материальные характеристики на каждом этапе итерационного процесса уточнялись из решения интегральных уравнений Фредгольма (ИУФ) 1-го рода. Данный подход позволял восстанавливать значения материальных характеристик в различных классах функций в точках сетки значений координаты.

В настоящем докладе представлен проекционно-итерационный подход к идентификации неоднородных свойств упругого стержня с пустыми порами по данным о торцевом смещении, измеренном в некотором временном диапазоне. Для этого на основе слабой постановки и метода линеаризации получены ИУФ 1-го рода для нахождения поправок модуля Юнга и плотности. Операторные уравнения решены с помощью проекционного метода, при котором поправки представлены в виде разложений по системе полиномов. Коэффициенты полиномиальных функций определялись из решения плохо обусловленной системы линейных алгебраических уравнений. Регуляризации этой системы произведена с помощью метода Тихонова А. Н.

Решение обратной задачи состояло из 4 этапов. Во-первых, по априорной информации задавалось начальное приближение как среднее значение минимального и максимального значений искомой функции. На втором этапе находились поправки среди констант, на третьем этапе – среди линейных функций, на четвертом этапе – среди квадратичных функций. При этом прямая задача пороупругости решалась с помощью метода конечных элементов, реализованного в пакете FlexPDE. Проведены вычислительные эксперименты по раздельному восстановлению степенных законов изменения модуля Юнга и плотности. Выявлены наиболее информативные интервалы съема дополнительной информации и количество точек измерения внутри них.

Предложенный подход обладает преимуществами по сравнению с подходом, предложенным в [3, 4], в виде меньших затрат машинного времени на решение прямой задачи, более быстрой сходимости итерационной схемы, а также более высокой точности реконструкции на последнем этапе.

## Литература

1. Нестеров С. А. О деформировании составных упругих тел с пустыми порами // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2025. Т. 22, № 1. С. 68–79. DOI: 10.31429/vestnik-22-1-68-79.
2. Ватульян А. О., Шведов Д. С. Колебания неоднородного пороупругого слоя с пустыми порами // Вестник ДГТУ. 2013. № 1–2(70–71). С. 49–57.
3. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Решение обратной задачи об идентификации двух термомеханических характеристик функционально-градиентного стержня // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, № 2. С. 180–195. DOI: 10.18500/1816-9791-2022-22-2-180-195.
4. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Исследование обратных задач термоупругости для неоднородных материалов // Владикавказский математический журнал. 2022. Т. 24, № 2. С. 75–84. DOI: 10.46698/v3482-0047-3223-0.
5. Ватульян А. О., Ляпин А. А. Об обратных коэффициентных задачах пороупругости // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 2. С. 114 –121.
6. Vatulyan A. O., Mnukhin R. M., Dudarev V. V., Nedin R. D., Gusakov D. V. On the Determination of the Biot Modulus of Poroelastic Cylinder // ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2019. Vol. 93, № 3. DOI: 10.1002/zamm.201800137.

## Сопряжение слабо искривленных включений в упругом теле с трещиной

© Николаева Наталья Афанасьевна

младший научный сотрудник

Научно-исследовательский институт

Россия, 677000, г. Якутск, ул. Кулаковского, 48

niknataf@mail.ru.

**Ключевые слова:** трещина, тонкое включение, тонкое упругое включение, отслоение, сопряжение, вариационная задача, условие непроникания, слабо искривленное включение.

### Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ, проект № 24-21-00081.

В современном мире разработка и анализ математических моделей, описывающих взаимодействие конструкций в условиях напряженно-деформированного состояния, а также материалов с неоднородностями, такими как включения и трещины, являются важными направлениями научных исследований. Это связано с широким использованием различных включений в производстве композитных материалов, что позволяет улучшить их механические характеристики. Особое значение в данном анализе имеет выбор краевых условий на берегах трещин. Здесь при исследовании для описания трещин применяются нелинейные краевые условия, которые исключают возможность взаимного проникания берегов трещин [1].

В данной работе рассматривается задача равновесия двумерного упругого тела с трещиной, пересекающей тонкое включение в определенной точке. Эта точка пересечения делит включение на две части, что приводит к сопряжению между этими частями. В этом контексте сопряжение тонких жестких и упругих включений Бернулли-Эйлера было изучено в работах [2]-[3], а сопряжение тонких упругих включений Тимошенко — в исследовании [4]. В представленной работе исследуется сопряжение слабо искривленных включений.

## Литература

1. Хлуднев А. М. Задачи теории упругости в негладких областях. Москва: Физматлит, 2010. 252 с.
2. Николаева Н. А. О равновесии упругих тел с трещинами, пересекающими тонкие включения // Сиб. журн. индустр. математики. 2019. Т. 22, № 4. С. 68–80. DOI: 10.33048/sibjim.2019.22.407
3. Николаева Н. А. Задача о равновесии упругого тела с трещиной и тонкими включениями, которые сопряжены между собой // Дальневосточный математический журнал. 2024. Т. 24, № 1. С. 73–95. DOI: 10.47910/FEMJ202408
4. Николаева Н. А. О сопряжении тонких включений Тимошенко в упругих телах при наличии трещины // Сиб. журн. индустр. математики. 2024. Т. 27, № 4. С. 68–83. DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.405



## Нелинейная обратная коэффициентная задача для квазипараболического уравнения

© Николаев Олег Юрьевич

старший преподаватель кафедры фундаментальной математики  
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова  
670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а  
nikolaev.oleg1@yandex.ru

**Ключевые слова:** обратная задача, псевдопараболическое уравнение, интегральное переопределение, существование.

Доклад посвящен исследованию разрешимости нелинейной обратной коэффициентной задачи для квазипараболического уравнения.

В обратных задачах для дифференциальных уравнений наряду с решением требуется определить и само уравнение, т.е. неизвестные коэффициенты уравнения или правую часть. Поэтому для разрешимости обратных коэффициентных задач, помимо естественных граничных условий, необходимых для корректности соответствующей краевой задачи, требуются дополнительные условия. Эти условия называются условиями переопределения.

В рассматриваемой нами задаче неизвестный коэффициент не будет зависеть от временной переменной, а будет зависеть только от пространственных переменных. Такие задачи обычно называются обратными задачами пространственного типа. Условие переопределения интегрального вида позволяет говорить о нашей задаче как о пространственно нелокальной задаче.

Обратные коэффициентные задачи возникают при исследовании физических, биологических и других процессов в средах с заранее неизвестными характеристиками.

### Постановка задачи.

Пусть  $Q$  - прямоугольник  $(0, 1) \times (0, T)$ ,  $f(x, t)$ ,  $N(t)$ ,  $\mu(x)$  - заданные функции.

Обратная задача: найти функции  $u(x, t)$ ,  $q(x)$ , связанные в области  $Q$  уравнением

$$u_{ttt}(x, t) + u_{xx}(x, t) - q(x)u(x, t) = f(x, t),$$

где  $u(x, t)$  удовлетворяет условиям

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x \in (0, 1),$$

$$u(x, T) = 0, \quad x \in (0, 1),$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = 0, \quad t \in (0, T),$$

$$\int_0^T N(t)u(x, t)dt = \mu(x), \quad x \in (0, 1).$$

## **Вырождающиеся гиперболические уравнения с неизвестным коэффициентом диссипации**

© **Павлов Степан Степанович**

кандидат физико-математических наук,

доцент кафедры технических направлений подготовки

Якутский институт водного транспорта - филиал ФГБОУ ВО "Сибирский государственный университет водного транспорта"

Россия, 677000, Город Якутск, ул. Водников, 1

ststepmath@mail.ru

© **Кожанов Александр Иванович**

доктор физико-математических наук,

ученое звание профессор,

главный научный сотрудник

Институт математики им. С.Л. Соболева

Россия, 630090, Город Новосибирск, пр. Коптюга, 4

kozhanov@math.nsc.ru

**Ключевые слова:** вырождающиеся гиперболические уравнения, неизвестный коэффициент, регулярные решения, существование, единственность.

В работе изучаются задачи определения функций  $u(x, t)$  и  $q(t)$ , связанных уравнением

$$\varphi(t)u_{tt} - \Delta u + q(t)u_t = f(x, t),$$

( $\Delta$  - оператор Лапласа по переменным  $x_1, \dots, x_n$ .)

Особенностью этого уравнения является то, что функция  $\varphi(t)$  в нем неотрицательна и может обращаться в нуль на своей области определения. Данные задачи относятся к классу обратных коэффициентных задач, для них в работе доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений – то есть решений, имеющих все обобщенные по С.Л.Соболеву производные, входящие в уравнение.

## Обратные задачи оптимального управления для описания социо-эпидемиологических процессов

© Петракова Виктория Сергеевна

кандидат физико-математических наук,

научный сотрудник

Институт вычислительного моделирования СО РАН

Россия, 660036, Красноярск, ул. Академгородок 50, 44

vika-svetlakova@yandex.ru

**Ключевые слова:** модель оптимального управления, компартментальные модели, обратные задачи.

### Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-71-10068).

Математические модели оптимального управления представляют собой эффективные инструменты для описания социально-экономических процессов (см., например, работы [1,2]. В 2020–2022 годах, в связи с развитием пандемии Covid-19, такие модели, включающие в себя как ограничения в форме системы обыкновенных дифференциальных уравнений, так и уравнения в частных производных, стали широко использоваться как для прогнозирования динамики заболеваемости, так и для анализа последствий введения изоляционных мер для населения, см., например, работы [3].

Ключевой задачей при использовании моделей оптимального управления для прогнозирования поведения динамических систем является определение функционала стоимости, который должен, с одной стороны, адекватно описывать систему, т.е. быть физически релевантным, а с другой стороны, удовлетворять условиям существования и единственности решения. В таких ограничениях правильный подбор функционала стоимости модели становится сложной задачей. Так, рассмотрим модель оптимального управления, применимую к задаче прогнозирования динамики эпидемии, в общем виде. Задача заключается в нахождении непрерывного управления  $r(t)$ , определенного на интервале  $t \in [t_0, t_T]$ , такого, что

$$r(t) = \operatorname{argmin} F(r(t), \vec{y}). \quad (1)$$

В данной формулировке  $F$  представляет собой функционал системы, который, в контексте вычислительной эпидемиологии, описывает поведение популяции;  $\vec{y} = (y_1(t), \dots, y_n(t))^T$  является вектором непрерывно-дифференцируемых функций  $y_i(t)$ , удовлетворяющих уравнениям

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{f} \quad (2)$$

с начальными условиями

$$\vec{y}(0) = \vec{y}_0. \quad (3)$$

Здесь  $\vec{f} = (f_1(t, r, y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(t, r, y_1, \dots, y_n))^T$ , а  $\vec{y}_0 = (y_{1,0}, \dots, y_{n,0})^T$ . Функции  $f_i(t)$  являются непрерывно-дифференцируемыми, при этом  $y_{i,0} \in \mathbb{R}$ . Указанная система (2), (3) описывает механизм передачи вируса и может быть интерпретирована в рамках эпидемиологической модели SIR [4].

Чтобы избежать трудностей описания функционала модели, описанных выше, предлагается рассматривать функционал системы  $F$  в виде линейной комбинации квадратичных функций  $F_1, F_2, \dots, F_K$ , с числовыми параметрами  $a_i \in \mathbb{R}$ , где  $i = 1, \dots, K$ :

$$F(t, r, y_1, \dots, y_n) = a_1 \cdot F_1(t, r, y_1, \dots, y_n) + \dots + a_K \cdot F_K(t, y_1, \dots, y_n). \quad (4)$$

В таком представлении каждая функция  $F_i$  описывает отдельный процесс в популяции, например, изоляцию, вакцинацию, карантинные ограничения, доступность койко-мест и пр. Обратная задача восстановления функционала в данном случае сводится к определению параметров  $a_i$  для представления (4) на основе реальных данных. В случае, если определенный процесс не оказал значительного влияния на поведение популяции, наблюдаемое в реальности, соответствующий весовой коэффициент будет находиться вблизи нуля.

В исследовании [4] была обозначена проблема, связанная с таким подходом в вычислительной эпидемиологии: числовые коэффициенты взаимосвязаны и итерационные методы их нахождения требуют адекватного начального приближения. Это создает необходимость в более углубленном изучении моделей оптимального управления, применяемых для описания распространения эпидемий.

В рамках доклада будут представлены результаты, полученные по оценке взаимосвязи параметров  $a_1, a_2, \dots, a_K$  для постановки задачи оптимального управления вида 1–4, а также результаты по решению обратной задачи описанного вида на реальных данных по заболеваемости Covid-19 в г. Новосибирске.

## Литература

1. Tang Zh., et al. A Two-layer Receding-horizon Optimal Control Strategy for Battery Energy Storage System Participating in Peak Load Shifting Considering Degradation Cost // 2021 IEEE Sustainable Power and Energy Conference (iSPEC) Conference Proceeding. 2021. С. 1189-1194. IEEE (2021)
2. Ibrahim O.M., Okuonghae D. & Ikhile M.N.O. Optimal control model for criminal gang population in a limited-resource setting // Int. J Dynam. Control. 2023. № 11. С. 835–850. DOI: 10.1007/s40435-022-00992-8
3. Li L., et al. Optimal control of vaccination for an epidemic model with standard incidence rate // Journal of Theoretical Biology. 2025. № 598. С. 111993. DOI: 10.1016/j.jtbi.2024.111993
4. Jain K., Anuradha B., and Srikumar K.: Mathematical analysis of COVID-19 and TB co-infection dynamics with optimal control // Modeling Earth Systems and Environment. 2025. № 11. С. 1–22. DOI: 10.1007/s40808-024-02197-8
5. Petrakova V. Inverse Coefficient Problem for Epidemiological Mean-Field Formulation // Mathematics. 2024. № 12. С. 3581.

## **Параболические уравнения с произвольным направлением эволюции и разрывным коэффициентом**

© Пинигина Нюргуяна Романовна

кандидат физико-математических наук,

ученое звание доцент,

ФГАОУ ВО "Северо-Восточный федеральный университет имени М.К.Аммосова"

Россия, 677000, Республика Саха (Якутия), г. Якутск, ул. Белинского, д. 58

nr.pinigina@svfu.ru

**Ключевые слова:** краевые задачи, меняющееся направление эволюции, параболические уравнения, пространства Соболева.

В теории краевых задач для параболических уравнений с меняющимся направлением эволюции можно выделить два направления. Первое из них связано с теорией уравнений с разрывным знакопеременным коэффициентом (М. Жевре, С.А. Терсенов, С.В. Попов, А. И. Кожанов), второе же – наоборот, связано с уравнениями, коэффициенты которых при производной по времени меняет знак произвольным образом и дифференцируем (О.А. Олейник, В.Н. Врагов, И.Е. Егоров, А.И. Кожанов). В настоящем докладе излагаются результаты исследований, в которых соединяются два названных направления – изучается разрешимость в пространствах С.Л. Соболева краевых задач для параболических уравнений с коэффициентами, один из которых непрерывно дифференцируем и меняет знак, второй же – меняет знак и является разрывным.

## Обратная задача с постоянным неизвестным коэффициентом с производной Джрбашяна — Нерсесяна

© Плеханова Марина Васильевна

доктор физико-математических наук,

ученое звание доцент,

ведущий научный сотрудник кафедры математического анализа

Челябинский государственный университет

Россия, 454001, Челябинск, ул. Бр.Кашириных, 129

mariner79@mail.ru

**Ключевые слова:** обратная задача, классическое решение, ограниченный оператор, производная Джрбашяна — Нерсесяна.

### Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и Правительства Челябинской области 24-11-20002, <https://rscf.ru/project/24-11-20002/>.

Одним из подходов к исследованию обратных задач для дифференциальных уравнений является рассмотрение задач соответствующего типа для уравнений в банаховых пространствах. Для случая постоянного неизвестного коэффициента в данной работе получен критерий корректности обратной задачи в терминах характеристической функции задачи.

Пусть  $D^\beta := J^{-\beta}$  — дробный интеграл Римана–Лиувилля порядка  $-\beta > 0$ , если  $\beta < 0$ ;  $D^0$  — тождественный оператор;  $D^\beta := D^m J^{m-\beta}$  — дробная производная Римана — Лиувилля порядка  $\beta \in (m-1, m]$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Определим дробные производные Джрбашяна — Нерсесяна

$$\mathcal{D}^{\sigma_0} z(t) := D^{\alpha_0-1} z(t), \quad \mathcal{D}^{\sigma_k} z(t) := D^{\alpha_k-1} D^{\alpha_{k-1}} D^{\alpha_{k-2}} \dots D^{\alpha_0} z(t), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

соответствующие последовательности  $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ ,  $0 < \alpha_k \leq 1$ ,  $k = 0, 1, \dots, n \in \mathbb{N}$ . Заметим, что их частными случаями являются: — дробная производная Римана — Лиувилля ( $\alpha_0 \in (0, 1)$ ,  $\alpha_k = 1$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ) и — дробная производная Герасимова — Капуто ( $\alpha_k = 1$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ ,  $\alpha_n \in (0, 1)$ ). Обозначим также

$$\sigma_k := \sum_{j=0}^k \alpha_j - 1, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Рассмотрим банахово пространство  $\mathcal{Z}$  и обозначим через  $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$  банахову алгебру всех линейных ограниченных операторов в  $\mathcal{Z}$ .

Для  $\alpha, \beta > 0$  будем использовать функцию Миттаг–Леффлера

$$E_{\alpha, \beta}(z) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + \beta)}, \quad z \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}).$$

Пусть  $\mathcal{Z}$  — банахово пространство,  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ ,  $g \in C([0, T]; \mathcal{Z})$ ,  $B \in C([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ ,  $u \in \mathcal{Z}$ ,  $z_k \in \mathcal{Z}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ ,  $z_T \in \mathcal{Z}$ ,  $\mu \in BV((0, T]; \mathbb{C})$ , т.е.  $\mu$  имеет ограниченную вариацию на  $(0, T]$ . Рассмотрим линейную обратную задачу

$$\mathcal{D}^{\sigma_n} z(t) = Az(t) + g(t) + B(t)u, \quad (1)$$

$$\mathcal{D}^{\sigma_k} z(0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (2)$$

$$\int_0^T z(t) d\mu(t) = z_T. \quad (3)$$

Решением задачи (1)–(3) называется пара  $(z, u) \in C((0, T]; \mathcal{Z}) \times \mathcal{Z}$ , такая что для всех  $k = 0, \dots, n-1$ :  $\mathcal{D}^{\sigma_k} z \in C([0, T]; \mathcal{Z})$ ,  $\mathcal{D}^{\sigma_n} z \in C((0, T]; \mathcal{Z})$ , и выполняются равенства (1) для всех  $t \in (0, T]$ , а также условия (2) и (3).

Задача (1)–(3) называется корректной, если для любых  $z_k \in \mathcal{Z}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ ,  $z_T \in \mathcal{Z}$  существует единственное решение  $(z, u)$  этой задачи, и выполняется неравенство

$$\|u\|_{\mathcal{Z}} \leq C \left( \sum_{k=0}^{n-1} \|z_k\|_{\mathcal{Z}} + \|z_T\|_{\mathcal{Z}} + \|g\|_{C([0, T]; \mathcal{Z})} \right), \quad (4)$$

где константа  $C$  не зависит от  $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_T, g$ .

Обозначим характеристическую функцию задачи (1)–(3) как

$$\chi_{\mu, B}(\lambda) := \int_0^T \int_0^t (t-s)^{\sigma_n-1} E_{\sigma_n, \sigma_n}((t-s)^{\sigma_n} \lambda) B(s) ds d\mu(t).$$

Если  $B$  постоянна, то

$$\chi_{\mu, B}(\lambda) = \int_0^T t^{\sigma_n} E_{\sigma_n, \sigma_n+1}(t^{\sigma_n} \lambda) d\mu(t) B.$$

Если  $\mu$  — функция с одним скачком в точке  $T$ , то

$$\chi_{\mu, B}(\lambda) := \int_0^T (T-s)^{\sigma_n-1} E_{\sigma_n, \sigma_n}((T-s)^{\sigma_n} \lambda) B(s) ds, \quad \text{или} \quad \chi_{\mu, B}(\lambda) = T^{\sigma_n} E_{\sigma_n, \sigma_n+1}(T^{\sigma_n} \lambda) B$$

для постоянной  $B$ .

**Теорема 4.** [1]. Пусть  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < \alpha_k \leq 1$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ ,  $\alpha_0 + \alpha_n > 1$ ,  $g \in C([0, T]; \mathcal{Z})$ ,  $B \in C([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ ,  $z_k \in \mathcal{Z}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ ,  $z_T \in \mathcal{Z}$ ,  $\mu \in BV((0, T]; \mathbb{C})$ ,  $\mu$  не является постоянной, ноль не является точкой роста меры  $d\mu(t)$ . Тогда обратная задача (1)–(3) корректна тогда и только тогда, когда  $\chi_{\mu, B}(\lambda) \neq 0$  для всех  $\lambda \in \sigma(A)$ .

## Литература

1. Plekhanova M. V., Melekhina D. V., Fedorov V. E. Linear Identification Problems for Equations with the Dzhrbashyan — Nersesyan Derivative // Journal of Mathematical Sciences. 2024. V. 281. № 6. P. 1–16 DOI:10.1007/s10958-024-07157-2

## Теоремы компактности для задач с неизвестными границами

© Подгаев Александр Григорьевич

доктор физико-математических наук,

ученое звание доцент,

профессор

Тихоокеанский государственный университет

Россия, 680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136

000210@togudv.ru

**Ключевые слова:** теоремы компактности, задачи с неизвестными границами, нецилиндрическая область, итерационный процесс, предельный переход.

## Благодарности

Работа выполнена в Дальневосточном центре математических исследований при финансовой поддержке Минобрнауки России, соглашение от 28 февраля 2024 г. № 075-02-2024-1432 по реализации программ развития региональных научно-образовательных математических центров.

В задачах с неизвестными границами вторые производные в окрестности смены фаз не могут быть суммируемыми функциями. При решении задачи итерационным процессом в последний часто вовлечена и неизвестная граница. Для предельного перехода, как и во многих нелинейных задачах, требуется сходимость в  $L_p$  первых производных. Поэтому основная цель исследования – доказать теорему компактности, позволяющую в задачах с неизвестными границами и с условием типа условия Стефана на границах фаз, совершить предельный переход в итерационном процессе. В [1] показано применение подобной теоремы для однофазной задачи Стефана в случае, когда область делится одной кривой (своей для каждого приближенного решения) так, что с одной стороны от этой кривой функции последовательности тождественно равны нулю. Здесь рассмотрен случай возникающий в двухфазных задачах, когда возникает две последовательности кривых, которые делят область на части. Конечно, теорема имеет и самостоятельный интерес и сформулирована независимо от возможных её применений.

Пусть для области  $Q \subset R^2$ ,  $Q = \{(x, t) : a < x < b, 0 < t < T\}$  имеется две последовательности кривых, заданных двумя последовательностями функций  $x = s_n^-(t)$ ,  $x = s_n^+(t)$ ;  $t \in [0, T]$ , для которых для всех  $t$  выполнено  $a \leq s_n^\pm(t) \leq b$ , и эти кривые определяют в области  $Q$  две последовательности подобластей  $Q_n^\pm = Q \cap \{(x, t) : \pm x < \pm s_n^\pm(t)\}$ . Отметим, что если, например,  $s_n^-(t)$  и  $s_n^+(t)$  не совпадают, то  $Q_n^+$  и  $Q_n^-$  могут как пересекаться, так и не пересекаться. Будем предполагать, что  $s_n^\pm(t)$  непрерывны, за исключением, быть может, зависящего от  $n$  конечного числа точек  $A_n \subset [0, T]$ , в которых разрывы первого рода. При этом  $\sup_{t \in [0, T] \setminus \bigcup_n A_n} |s_n^\pm(t) - s(t)| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Далее, пусть имеется последовательность определенных в  $Q$  функций  $w_n(x, t)$ . При указанных условиях на  $s_n^\pm(t)$  и  $w_n(x, t)$  справедлива



**Теорема 1.** Пусть для последовательности  $w_n(x, t)$  существует постоянная  $c$  такая, что для всех  $n$  выполнены неравенства

$$\|w_n\|_{L_\infty(0, T; W_2^1(a, b))} \leq c; \quad \|w_{nt}\|_{L_2(Q)} \leq c,$$

функции  $w_n$  имеют как в  $Q_n^+$ , так и в  $Q_n^-$  вторые обобщенные производные по  $x$ , причем

$$\int_0^T \int_a^{s_n^+(t)} |w_{nxx}|^2 dx d\tau + \int_0^T \int_{s_n^-(t)}^b |w_{nxx}|^2 dx d\tau \leq c.$$

Тогда для любого  $1 \leq q < 2$  последовательность  $w_n$  относительно компактна в  $L_q(0, T; W_q^1(a, b))$ .

Доказательство опубликовано в [2] и использует некоторые методы из [3] для функций из шкалы банаховых пространств.

**Теорема 2.** Если в условиях теоремы 1 оценку производной по  $t$  заменить на условие относительной компактности в  $L_2(Q)$  множества функций  $w_n(x, t)$ , то будет верно утверждение теоремы 1.

## Литература

1. Подгаев А.Г., Прудников В.Я., Кулеш Т.Д. Глобальная разрешимость трёхмерной осесимметричной задачи Стефана для квазилинейного уравнения // Дальневосточный математический журнал. 2022. № 1. С. 61–75. DOI: 10.47910/FEMJ202206
2. Подгаев А.Г., Подгаев А.А., Кулеш Т.Д. Теоремы компактности для исследования двухфазных задач типа Стефана // Дальневосточный математический журнал. 2025. № 1. С. 81–89. DOI: <https://doi.org/10.47910/FEMJ202507>
3. Подгаев А.Г. Об относительной компактности множества абстрактных функций из шкалы банаховых пространств // Сиб. матем. журн. 1993. Т. 34. 2. С. 135–145 DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00970957>

## Нелокальные интегро-дифференциальные краевые задачи многомерных уравнений третьего порядка

© Попов Николай Сергеевич

кандидат физико-математических наук,

доцент кафедры АГМАДУ ИМИ

Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова

Россия, 677000, г. Якутск, ул. Кулаковского, 48, ауд. 521

porovnsnserg@mail.ru

© Попов Сергей Вячеславович

доктор физико-математических наук,

ученое звание профессор,

профессор кафедры АГМАДУ ИМИ

Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова

Академия наук Республики Саха (Якутия)

Россия, 677007, г. Якутск, пр-т Ленина, 33

guspopov@mail.ru

**Ключевые слова:** интегро-дифференциальные уравнения, пространство С.Л. Соболева, начально-краевая задача, метод продолжения по параметру, априорные оценки, регулярное решение.

Изучается разрешимость начально-краевых задач для линейных интегро-дифференциальных уравнений с заданием на боковой границе условий, связывающих значения решения со значениями некоторого интегрального оператора от решения. Доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений. Начало систематических исследований нелокальных краевых задач нахождения периодических решений для эллиптических уравнений было положено в статье А.В. Бицадзе и А.А. Самарского (1969). Большой вклад в развитие теории нелокальных задач для дифференциальных уравнений различных классов внесли монографии А.Л. Скубачевского (1997), А.М. Нахушева (2006, 2012) и А.И. Кожанова [1].

Исследования для параболических и гиперболических уравнений с интегральным условием на боковой границе проводились в [2]. В работе изучаются интегро-дифференциальные псевдопараболические и псевдогиперболические уравнения с интегральными условиями на боковой границе.

Пусть  $\Omega$  — ограниченная область пространства  $\mathbb{R}^n$  с гладкой (для простоты, бесконечно-дифференцируемой) границей  $\Gamma$ ,  $Q$  — цилиндр  $\Omega \times (0, T)$  ( $0 < T < +\infty$ ),  $S = \Gamma \times (0, T)$  его боковая граница,  $a(x, t)$ ,  $c(x, t)$  и  $f(x, t)$  функции, заданные в цилиндре  $Q$ ,  $u_0(x)$ ,  $u_1(x)$  — на множестве  $\bar{\Omega}$ ,  $N(t)$  — на множестве  $[0, T]$  и  $K_1(x, y, t)$ ,  $K_2(x, y, t)$  — на множестве  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $y \in \bar{\Omega}$ ,  $t \in [0, T]$ .

В цилиндре  $Q$  рассматриваются уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} (Au - \Delta u) - a(x, t)\Delta u + c(x, t)u = f(x, t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( (Au)_t - \Delta u \right) - a(x, t) \Delta u + c(x, t) u = f(x, t), \quad (2)$$

где

$$Au = \int_0^t N(t - \tau) u(x, \tau) d\tau. \quad (3)$$

Для уравнения (1) выполняются условия

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (4)$$

$$u(x, t)|_{(x,t) \in S} = \int_{\Omega} K_1(x, y, t) u(y, t) dy|_{(x,t) \in S}, \quad (5)$$

а для уравнения (2) выполняются условия (5) и

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega. \quad (6)$$

Доказательство теорем существования и единственности регулярных решений краевых задач для уравнений (1), (2) проводятся методами перехода к нагруженному уравнению с однородными краевыми условиями, продолжения по параметру, априорных оценок [1]–[3].

## Литература

1. Кожанов А.И. Нелокальные задачи и задачи с интегральными условиями для дифференциальных уравнений в частных производных: сводка результатов, нерешенные задачи. Новосибирск: Наука, 2024. ISBN 978-5-02-041543-0.
2. Кожанов А.И. Дюжева А.В. Вторая начально-краевая задача с интегральным смещением для гиперболических и параболических уравнений второго порядка // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2021, Т. 25, № 3. С. 423–434. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1859>.
3. Попов Н.С. О нелокальных интегро-дифференциальных краевых задачах многомерных псевдопараболических уравнений // Математические заметки СВФУ. 2024. Т.31, № 3. С.39–52. DOI: 10.25587/2411-9326-2024-3-39-52.

## Задача определения порядка для диффузионно-волнового уравнения с оператором Джрбашяна–Нерсесяна

© Псху Арсен Владимирович

доктор физико-математических наук,

ученое звание доцент,

главный научный сотрудник

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН

Россия, 360017, Нальчик, ул. Шортанова, 89-А

pskhu@list.ru

**Ключевые слова:** диффузионно-волновое уравнение, дробная производная, оператор Джрбашяна–Нерсесяна, задача определения порядка, обратная задача, производная Римана–Лиувилля, производная Герасимова–Капуто, интегральное тождество, условие переопределения, уравнение Гельмгольца.

Рассмотрим уравнение

$$\left( \frac{\partial^\sigma}{\partial y^\sigma} - \Delta_x \right) u(x, y) = 0 \quad (1)$$

где  $\frac{\partial^\sigma}{\partial y^\sigma} = D_{0y}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m\}}$  — оператор Джрбашяна–Нерсесяна порядка  $\sigma$ ,  $\sigma \in (0, 2)$ , ассоциированный с последовательностью  $\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ ,  $\gamma_k \in (0, 1]$ ;

$$\Delta_x = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

— оператор Лапласа по  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ .

Оператор дробного дифференцирования Джрбашяна–Нерсесяна [1], ассоциированный с последовательностью  $\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m\}$  ( $\gamma_k \in (0, 1]$ ,  $k = 1, \dots, m$ ), порядка

$$\sigma = \sum_{k=0}^m \gamma_k - 1,$$

определяется соотношением

$$D_{0y}^{\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m\}} := D_{0y}^{\gamma_m-1} D_{0y}^{\gamma_{m-1}} \dots D_{0y}^{\gamma_1} D_{0y}^{\gamma_0},$$

где  $D_{0y}^\xi$  — дробная производная (интеграл) Римана–Лиувилля порядка  $\xi$  с началом в точке  $y = 0$  [2].

Уравнение (1) относится к классу дробных диффузионно-волновых уравнений. Оно совпадает с уравнением диффузии при  $\sigma = 1$  и превращается в волновое уравнение при  $\sigma \rightarrow 2$ .

Обратные задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка, в которых порядок дробного дифференцирования неизвестен и должен быть определен, в последние годы вызывают большой интерес. Обзор работ по задачам такого вида для диффузионно-волновых уравнений можно найти в [3].

Здесь мы рассматриваем задачу, в которой подлежит определению последовательность  $\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ . Эта последовательность задает порядок оператора дробного дифференцирования в уравнении (1), а также определяет форму дробного дифференцирования.

Как известно, оператор Джрбашьяна–Нерсесяна охватывает широкий класс операторов дробного дифференцирования. Так, например, соответствующий выбор последовательности  $\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m\}$  относит производную Римана-Лиувилля и производную Герасимова-Капуто к частным случаям оператора Джрбашьяна–Нерсесяна:

$$D_{0y}^{\{\zeta-m+1, 1, \dots, 1\}} = D_{0y}^{\zeta} \quad \text{и} \quad D_{0y}^{\{1, \dots, 1, \zeta-m+1\}} = \partial_{0y}^{\zeta}.$$

Здесь  $\partial_{0y}^{\zeta} := D_{0y}^{\zeta-m} \frac{d^m}{dy^m}$  — производная Герасимова-Капуто;  $\zeta \in (m-1, m]$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .

Таким образом, в рассматриваемой нами задаче наряду с порядком необходимо определить и вид дробного дифференцирования в уравнении (1).

Предлагаемые здесь условия переопределения объединяют начальные и асимптотические пространственно-ориентированные условия. Эти условия основаны на интегральных тождествах, связывающих решения задачи Коши для уравнения (1) с решениями уравнения Гельмгольца во всем пространстве и с целыми гармоническими функциями.

В частности, показано, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(x) u(x, y) dx = \sum_{k=0}^{m-1} y^{\mu_k-1} E_{\sigma, \mu_k}(\lambda y^{\sigma}) \int_{\mathbb{R}^n} v(x) \tau_k(x) dx, \quad (2)$$

где  $u(x, y)$  — решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\{\gamma_0, \dots, \gamma_k\}} u(x, y) = \tau_k(x) \quad (k = 0, 1, \dots, m-1; \quad x \in \mathbb{R}^n),$$

$v(x)$  — решение уравнения Гельмгольца  $\Delta_x v(x) = \lambda v(x)$  в  $\mathbb{R}^n$ ;  $E_{\sigma, \mu}(z)$  — функция Миттаг-Леффлера;  $\mu_k = \gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_k$ .

Из (2), в частности, следует, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} w(x) u(x, y) dx = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{y^{\mu_k-1}}{\Gamma(\mu_k)} \int_{\mathbb{R}^n} w(x) \tau_k(x) dx,$$

где  $w(x)$  — гармоническая в  $\mathbb{R}^n$  функция.

## Литература

1. Джрбашьян М. М., Нерсесян А. Б., Дробные производные и задачи Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. АН АрмССР. Матем. 1968. Т. 3, № 1. С. 3–28.
2. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. Москва: Физматлит, 2003. 299 с.
3. Alimov Sh., Ashurov R. On determining the fractional exponent of the subdiffusion equation // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. 2025. Vol. 33, № 2. С. 171–181. <https://doi.org/10.1515/jiip-2024-0019>

## **О проблеме стабилизации периодических возмущений положения равновесия для двумерного кинетического уравнения Бродвелла**

© **Радкевич Е. В.**

доктор физико-математических наук, профессор

МГУ им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра диф. уравнений  
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1,  
evrad07@gmail.com

© **Васильева О. А.**

кандидат физико-математических наук, доцент

Московский государственный строительный университет (национальный исследовательский университет), Институт цифровых технологий и моделирования в строительстве (ИЦТМС),  
Кафедра высшей математики  
Россия, 125993, Москва, ул. Тверская, 11  
vasiljeva.ovas@yandex.ru

© **Филиппов Г. А.**

аспирант

Московский государственный строительный университет (национальный исследовательский университет), Институт цифровых технологий и моделирования в строительстве (ИЦТМС),  
Кафедра высшей математики  
Россия, 125993, Москва, ул. Тверская, 11  
G.Philippov@yandex.ru

Хорошо известно, особенно при численных экспериментах рассогласование правой и левой частей кинетического уравнения Больцмана. В этом смысле интересны результаты, полученные К. С. Платоновой, А. В. Боровских [1]. Не совершенство кинетического уравнения Больцмана приводит к необходимости построения так называемых дискретных кинетических уравнений [2]-[3].

В докладе будет исследована проблема стабилизации периодических возмущений положения равновесия для двумерного кинетического уравнения Бродвелла:

$$\begin{aligned}\partial_t n_1 + \partial_x n_1 &= \frac{1}{\varepsilon}(n_3 n_4 - n_1 n_2), \\ \partial_t n_2 - \partial_x n_2 &= \frac{1}{\varepsilon}(n_3 n_4 - n_1 n_2), \\ \partial_t n_3 + \partial_y n_3 &= \frac{1}{\varepsilon}(n_1 n_2 - n_3 n_4), \\ \partial_t n_4 - \partial_y n_4 &= \frac{1}{\varepsilon}(n_1 n_2 - n_3 n_4),\end{aligned}\tag{1}$$

Метод Фурье решений приводит к препятствиям к доказательству стабилизации коэффициентов Фурье на кресте  $(k^2 - l^2)l = 0$ .

Система уравнений для коэффициентов Фурье на кресте одинакова с системой для одномерной модели Бродвелла

$$\begin{aligned}
\partial_t f_1 + \partial_x f_1 &= \frac{1}{\varepsilon}(f_3 f_4 - f_1 f_2), \\
\partial_t f_2 - \partial_x f_2 &= \frac{1}{\varepsilon}(f_3 f_4 - f_1 f_2), \\
\partial_t f_3 + \partial_x f_3 &= \frac{1}{\varepsilon}(f_1 f_2 - f_3 f_4), \\
\partial_t f_4 - \partial_x f_4 &= \frac{1}{\varepsilon}(f_1 f_2 - f_3 f_4),
\end{aligned} \tag{2}$$

В чем проблематичность этой модели. Для одномерной модели частицы с равными скоростями разнесены по разным группам (пары  $f_1, f_3$  и  $f_2, f_4$ ). Правая же часть моделирует интеграл столкновений, построенный для четырех групп частиц с жестким условием РАЗНОСТИ ИХ ГРУППОВЫХ СКОРОСТЕЙ. Таким образом, мы имеем РАССОГЛАСОВАНИЕ правой и левой частей модели (2). Но это справедливо и для многоскоростных многомерных дискретных моделей кинетики, правая часть которых построена на основе разбиения частиц по группам с различными групповыми скоростями. Как мы показали выше, для двумерной модели Бродвелла проблема РАССОГЛАСОВАНИЯ правой и левой частей возникает на "кресте". Естественно, та же проблема РАССОГЛАСОВАНИЯ правой и левой частей возникнет для многоскоростных многомерных дискретных моделей кинетики на аналоге "креста" модели Бродвелла, который назовем "обобщенным крестом". Отметим, что Уравнение Больцмана можно рассматривать как "континуальную сумму" моделей типа Бродвелла. Рассогласование правой и левой частей уравнения Больцмана отмечено в [1].

Рассогласование правой и левой частей в (2) приводит в методе Фурье к препятствиям построения ануляторов секулярных членов соответствующей проекции.

Для одномерной модели (2) препятствия (например и проекции):

$$\sqrt{v_e} v_k^0 + \sqrt{z_e} z_k^0 = 0, \quad \sqrt{w_e} w_k^0 + \sqrt{u_e} u_k^0 = 0, \quad k \in \mathbb{Z}_0.$$

Такие препятствия не позволяют построить решение задачи для любых начальных данных, периодических возмущений положения равновесия (включая распределения Максвелла — бегущие волны):

$$f_1 = f_3 = 1 + \varepsilon^2 \phi(t - x), \quad f_2 = f_4 = 1 + \varepsilon^2 \phi(t + x).$$

Отметим, что у модели Карлемана [7] (так же и для моделей Годунова-Султангазина [2],[3])

$$\begin{aligned}
\partial_t f_1 + \partial_x f_1 &= \frac{1}{\varepsilon}(f_2^2 - f_1^2), \\
\partial_t f_2 - \partial_x f_2 &= -\frac{1}{\varepsilon}(f_2^2 - f_1^2),
\end{aligned} \tag{3}$$

нет распределений Максвелла:  $(f_1(t - x), f_2(t + x))$ , поэтому периодические возмущения любых положений равновесия стабилизируются экспоненциально быстро [8]-[10].

Доклад будет посвящен исследованию природы стабилизации периодических возмущений положения равновесия к распределению Максвелла (бегущим волнам).

## Литература

1. К. С. Платонова, А. В. Боровских, Групповой анализ одномерного уравнения Больцмана. Инварианты и проблема замыкания моментной системы // ТМФ, 2021, том 208, номер 3, 367–386.
2. С. К. Годунов, У. М. Султангазин О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана // Успехи МН(1974), т. XXVI, в. 3(159), стр. 3–51.
3. Султангазин У.М. Дискретные нелинейные модели уравнения Больцмана. Алма-Ата: Наука, 1985.
4. N. Euler, W.-H. Steeb, Painleve Test and Discrete Boltzmann Equations // Aust. J. Phys., 42, 1989, P.1–10.
5. T. E. Broadwell Study of rarified shear flow by the discrete velocity method // J. of Fluid Mechanics 19:3(1964)
6. Веденяпин В. В. Кинетические уравнения Больцмана и Власова // М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
7. Т. Карлеман, Математические задачи кинетической теории газов // М., ИЛ, 1960.
8. E. V. Radkevich, O. A. Vasil'eva, S. A. Dukhnovskii, Local equilibrium of the Carleman equation // Journal of Mathematical Sciences, Vol. 207, No. 2, May, 2015.
9. О.В. Ильин, Изучение существования решений и устойчивости кинетической системы Карлемана // Журнал вычислительной математики и математической физики, (2007) вып. 47, N 12, стр. 2076–2087.
10. Е.В. Радкевич, О. А. Васильева, С. А. Духновский, О природе локального равновесия уравнений Карлемана и Годунова-Султангазина // Современная математика. Фундаментальные направления. Том 60(2016). С. 1–58(2016).
11. E. V. Radkevich, O. A. Vasil'eva, G. A. Filippov On stabilization rate of solutions of the Cauchy problem for the two-dimensional kinetic Broadwell equation with periodic initial data (a regular process) // Eurasian J. of mathematical and computer applications, 2025.
12. Е.В. Радкевич, О.А. Васильева О скорости максвеллизации процесса, моделируемого одномерной кинетической моделью Бродвелла (принята к публикации), 2025.



## Классы единственности вырождающихся параболических уравнений и оценка стоимости опционов

© Розанова Ольга Сергеевна

доктор физико-математических наук,  
профессор,

Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова

Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, 1

olga.rozanova@math.msu.ru

**Ключевые слова:** стоимость опциона, неединственность, уравнение Блэка-Шоулса, процесс с постоянной эластичностью, вырождающиеся параболические уравнения, краевые условия, классы Тэклинда.

Цена опциона с функцией исполнения  $\Phi(x)$  в случае, когда случайный процесс, определяющий динамику рискованного актива, является процессом с постоянной эластичностью (CEV), определяется как решение следующей краевой задачи с терминальным условием: [1]:

$$U_\tau + rxU_x + \frac{1}{2}\sigma^2 x^{2\alpha} U_{xx} - rU = 0, \quad x > 0, \quad 0 \leq \tau \leq T, \quad (1)$$

$$U(T, x) = \Phi(x). \quad (2)$$

Здесь  $\alpha > 0$ ,  $r \geq 0$ ,  $\sigma > 0$  – константы, отвечающие показателю процесса CEV, тренду безрискового актива и характеристике волатильности, соответственно. В случае самого популярного опциона “колл” (опциона на покупку) функция исполнения имеет вид

$$\Phi(x) = \max(0, x - K), \quad K > 0. \quad (3)$$

Уравнение (1) наиболее известно в случае  $\alpha = 1$ , когда случайный процесс совпадает с геометрическим броуновским движением, уравнение в этом случае носит имя Блэка и Шоулса, а формула, дающая решение задачи (1), (2) называется формулой Блэка-Шоулса. Она является одним из самых используемых достижений финансовой математики (например, [1]). Простота этой формулы обусловливается тем, что заменой независимой переменной  $x = \ln y$  в качестве первого шага уравнение (1) сводится к уравнению теплопроводности.

Однако в процессе исследования реальных рынков выяснилось, что необходимо рассмотрение более широкого класса случайных процессов, чем геометрическое броуновское движение, с этим связан интерес к рассмотрению процессов CEV с отличными от единицы показателями. Формулы для цены опциона давно известны. Они были выведены для всех случаев показателя  $\alpha$  путем сведения к уравнению Феллера, для которого известно фундаментальное решение. Формулы являются весьма громоздкими и содержат так называемое  $\chi^2$ -распределение, они вошли в классические учебники [1].

Однако спустя 25 лет после опубликования формулы для цены опциона для модели CEV в [2] было показано, что при  $\alpha > 1$  решение для цены опциона неединственно,

что интерпретировалось как возможность появления финансовых пузырей. Это вызвало вспышку интереса к задаче среди специалистов по финансовой математике, которые ориентируются на вероятностные методы. Неединственность объясняется тем, что процесс CEV при  $\alpha > 1$  является строгим локальным мартингалом, что приводит к нарушению многих привычных результатов теории опционов. Компактное и аккуратное изложение результатов этих многолетних исследований с выводом формул, а также исправлением неточностей и опечаток может быть найдено в [3], однако теория не является завершённой.

Нас будет интересовать объяснение явления неединственности с точки зрения теории линейных вырожденных уравнений в частных производных.

Отметим, что традиционно к задаче (1), (2), (3) приписываются ещё и граничные условия  $U|_{x=0} = 0$ ,  $U|_{x=+\infty} = +\infty$ , естественные для стоимости опциона, тогда как согласно теории Фикеры задача требует постановки краевых условий в зависимости от  $\alpha$ . А именно, при  $\alpha < \frac{1}{2}$  краевое условие нужно только в нуле, при  $\alpha > \frac{3}{2}$  краевое условие нужно только на бесконечности, при остальных  $\alpha$ , в том числе и для уравнения Блэка-Шоулса, краевые условия не нужны, они наследуются из финального условия.

Таким образом, в свете результатов о правилах постановки граничных условий в соответствии с теорией Фикеры появляются следующие задачи:

1. О классе единственности при  $\alpha < \frac{1}{2}$  с ограничением роста на бесконечности (классе Тэклинда);
2. О классе единственности при  $\alpha > \frac{3}{2}$  с ограничением роста в нуле;
3. О классе единственности при  $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{3}{2}$  с ограничением роста в нуле и на бесконечности.

В частности, мы покажем, что неединственность решения в задаче о цене опциона при  $\alpha > 1$  происходит от разных причин: при  $1 < \alpha \leq \frac{3}{2}$  начальные данные линейного роста не принадлежат классу Тэклинда, а при  $\alpha > \frac{3}{2}$  в задаче отсутствует краевое условие на бесконечности. По всей видимости, такая разделяющая роль показателя  $\alpha = \frac{3}{2}$  в этом контексте не была известна.

Результаты этого доклада подробно изложены в [4]. Заметим, что аналогичная проблема неединственности возникает также для оценки опциона в случае стохастической волатильности [2], она решается теми же методами.

## Литература

1. Халл Д. К. Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты. 8-е изд., Диалектика (Вильямс). 2019.
2. Heston S. L., Loewenstein M., Willard G. A. Options and bubbles// Review of Financial Studies. 2007. **20**. 359–390. DOI: 10.1093/rfs/hhl005.
3. Lindsay A., Brecher D. Results on the CEV process, past and present// URL: <https://ssrn.com/abstract=1567864>
4. Ladykova E.A., Rozanova O.S. On non-uniqueness in the option valuation problem// URL: <https://arxiv.org/abs/2501.18721>

# Нелинейная обратная задача с секториальным оператором и производными Джрбашяна — Нерсисяна

© Сагимбаева Ангелина Олеговна

студентка

Челябинский государственный университет

Россия, 454001, Челябинск, ул. Бр.Кашириных, 129

angsag@mail.ru

© Плеханова Марина Васильевна

доктор физико-математических наук,

ученое звание доцент,

заведующий кафедрой вычислительной механики и информационных технологий

Челябинский государственный университет

Россия, 454001, Челябинск, ул. Бр.Кашириных, 129

mariner79@mail.ru

© Федоров Владимир Евгеньевич

доктор физико-математических наук,

ученое звание профессор,

заведующий кафедрой математического анализа

Челябинский государственный университет

Россия, 454001, Челябинск, ул. Бр.Кашириных, 129

kar@csu.ru

## Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и Правительства Челябинской области № 24-21-20015, <https://rscf.ru/project/24-21-20015/>.

Пусть  $\mathcal{Z}$  — банахово пространство,  $\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})\}$ ,  $R_\lambda(A) := (\lambda I - A)^{-1}$ . При  $\alpha_k \in (0, 1]$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , определим  $\sigma_k = \sum_{j=0}^k \alpha_j - 1$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

Линейный замкнутый плотно определенный в пространстве  $\mathcal{Z}$  оператор  $A$  с областью определения  $D_A$  принадлежит классу  $\mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$  для некоторых  $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$ ,  $a_0 \geq 0$ ,  $\alpha_k \in (0, 1]$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , если

- (i) для всех  $\lambda \in S_{\theta_0, a_0} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a_0)| < \theta_0, \mu \neq a_0\}$  имеем  $\lambda^{\sigma_n} \in \rho(A)$ ;
- (ii) для каждого  $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$ ,  $a > a_0$ , существует такое  $K = K(\theta, a) > 0$ , что для всех  $\lambda \in S_{\theta, a}$   $\|R_{\lambda^{\sigma_n}}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq K(\theta, a)|\lambda|^{-\sigma_n}$ .

Если  $A \in \mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$ , то определены операторы

$$Y_\beta(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^\beta R_{\lambda^{\sigma_n}}(A) e^{\lambda t} d\lambda, \quad t > 0, \quad \beta \in \mathbb{R},$$

где  $\Gamma := \Gamma_+ \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_-$ ,  $\Gamma_\pm := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = a + re^{\pm i\theta}, r \in (\delta, \infty)\}$ ,  $\Gamma_0 := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = a + \delta e^{i\varphi}, \varphi \in [-\theta, \theta]\}$ ,  $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$ ,  $a > a_0$ ,  $\delta > 0$ . Мы будем использовать обозначения  $Z_k(t) := Y_{\sigma_n - \sigma_{k-1}}(t)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

Рассмотрим обратную задачу [1]

$$\mathcal{D}^{\sigma_n} z(t) = Az(t) + B(t, \mathcal{D}^{\sigma_0} z(t), \mathcal{D}^{\sigma_1} z(t), \dots, \mathcal{D}^{\sigma_{n-2}} z(t)) + b(t)u, \quad (1)$$

$$\mathcal{D}^{\sigma_k} z(0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (2)$$

$$\int_0^T z(t) d\mu(t) = z_T, \quad (3)$$

где  $\mathcal{D}^{\sigma_k}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , — дробные производные Джрбашяна — Нерсесяна, соответствующие набору чисел  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in (0, 1]$ ,  $B \in C([0, T] \times \mathcal{Z}^{n-1}; \mathcal{Z})$  — нелинейный оператор,  $b \in ([0, T]; \mathbb{C})$ ,  $\mu : (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  — функция ограниченной вариации. Неизвестными являются функция  $z : [0, T] \rightarrow \mathcal{Z}$  и вектор  $u \in \mathcal{Z}$ . Условие переопределения (3) задано интегралом Стильбеса.

Обобщенным решением задачи (1)–(3) в случае  $A \in \mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$  будем называть пару  $(z, u) \in [C((0, T]; \mathcal{Z}) \cap L_1(0, T; \mathcal{Z})] \times \mathcal{Z}$ , для которой  $\mathcal{D}^{\sigma_k} z \in C([0, T]; \mathcal{Z})$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , при всех  $t \in (0, T]$   $z(t) = \sum_{k=0}^{n-1} Z_k(t) z_k + \int_0^t Y_0(t-s)(B^z(s) + b(s)u)ds$ , где  $B^z(s) = B(s, \mathcal{D}^{\sigma_0} z(s), \mathcal{D}^{\sigma_1} z(s), \dots, \mathcal{D}^{\sigma_{n-2}} z(s))$ , и выполнены условия (2), (3). Если, кроме того,  $z \in C((0, T]; D_A)$ ,  $\mathcal{D}^{\sigma_k} z \in AC([0, T]; \mathcal{Z})$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , существует  $\mathcal{D}^{\sigma_n} z \in C((0, T]; \mathcal{Z})$  и выполняется равенство (1) при всех  $t \in (0, T]$ , то пара  $(z, u)$  называется *классическим решением* задачи (1)–(3).

Пусть для любых  $x_0, x_1, \dots, x_{n-2}$ ,  $y_0, y_1, \dots, y_{n-2} \in \mathcal{Z}$ ,  $s, t \in [0, T]$  выполняется

$$\|B(s, x_0, x_1, \dots, x_{n-2}) - B(t, y_0, y_1, \dots, y_{n-2})\|_{\mathcal{Z}} \leq L \left( |s-t|^\gamma + \sum_{k=0}^{n-2} \|x_k - y_k\|_{\mathcal{Z}} \right). \quad (4)$$

**Теорема 4.** [1]. Пусть  $0 < \alpha_k \leq 1$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ ,  $\alpha_0 + \alpha_n > 1$ ,  $\alpha_{n-1} + \alpha_n > 1$ ,  $A \in \mathcal{A}_{\{\alpha_k\}}(\theta_0, a_0)$ ,  $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$ ,  $a_0 \geq 0$ ,  $B \in C([0, T] \times \mathcal{Z}^{n-1}; \mathcal{Z})$  удовлетворяет условию (4),  $b \in C^\gamma([0, T]; \mathbb{C})$ ,  $z_k \in D_A$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ ,  $z_T \in D_A$ ,  $\mu \in BV((0, T]; \mathbb{C})$ , существует обратный оператор  $\Phi := \left( \int_0^T \int_0^t Y_0(t-s)b(s)dsd\mu(t) \right)^{-1} \in \mathcal{L}(D_A; \mathcal{Z})$ ,

$$LT^{\sigma_n} \max \left\{ \frac{C_0}{\sigma_n} V_0^T \mu \|\Phi\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}, \frac{2C_{\sigma_k} T^{-\sigma_k}}{\sigma_n - \sigma_k}, \frac{2C_{\sigma_k} T^{-\sigma_k}}{\sigma_n - \sigma_k} \|b\|_{C([0, T]; \mathbb{C})}, k = 0, \dots, n-1 \right\} < 1.$$

Тогда обратная задача (1)–(3) имеет единственное обобщенное решение. Если к тому же  $\alpha_n = 1$ , то задача (1)–(3) имеет единственное классическое решение.

**Ключевые слова:** нелинейная обратная задача, обобщенное решение, классическое решение, секториальный оператор, производная Джрбашяна — Нерсесяна.

## Литература

1. Федоров В. Е., Плеханова М. В., Сагимбаева А. О. Нелинейные обратные задачи со стационарным неизвестным элементом для уравнений с производными Джрбашяна — Нерсесяна // Мат. заметки СВФУ. 2024. Т. 31. № 3. С. 53–72. DOI: 10.25587/2411-9326-2024-3-53-72.

## Математическое и имитационное моделирование при изучении электропластического эффекта в металлах

© Семёнов Александр Сергеевич

доктор физико-математических наук,  
ученое звание доцент,  
директор МПТИ (ф) СВФУ,  
Россия, 678170, Мирный, ул. Ойунского, 14.  
sash-alex@yandex.ru

© Бебихов Юрий Владимирович

доктор физико-математических наук,  
ученое звание доцент,  
зав. кафедрой ЭиАПП МПТИ (ф) СВФУ  
Россия, 678170, Мирный, ул. Ойунского, 14  
bebikhov.yura@mail.ru

© Семёнова Мария Николаевна

кандидат физико-математических наук,  
доцент кафедры ФиПМ МПТИ (ф) СВФУ  
Россия, 678170, Мирный, ул. Ойунского, 14  
mariya\_semyonova86@mail.ru

© Якушев Илья Анатольевич

кандидат физико-математических наук,  
ученое звание доцент,  
доцент кафедры ФиПМ МПТИ (ф) СВФУ  
Россия, 678170, Мирный, ул. Ойунского, 14  
yakushevilya@mail.ru

**Ключевые слова:** электропластический эффект, моделирование, SimInTech, ток, сопротивление, индуктивность, ёмкость, конденсаторные батареи, экспериментальная установка, медная проволока, металлы.

**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ 24-22-00092.

Электропластический эффект (ЭЭ) – явление, при котором происходит снижение предела текучести под воздействием электрического тока. В 1969 году Троицкий [1] обнаружил, что импульсы электрического тока уменьшают напряжение, необходимое для инициирования деформации в металлах. В настоящее время ЭЭ является одним из наиболее эффективных способов упрощения различных производственных процессов в обработке металлов.

Работа по изучению ЭЭ в нашем институте началась с разработки и сборки первой лабораторной установки [2]. Первые опыты, проведенные на данной установке, относились к сравнению степени влияния эффекта электропластичности на образцы

из меди и алюминия [3], в результате чего было принято решение начать более детальные исследования именно медных образцов. В дальнейшем в ходе экспериментального исследования ЭЭ появилась необходимость измерения импульсных токов большой величины, не только по амплитуде, но и по форме импульса [4].

Для описания токовых кривых, получающихся при разряде заряженной батареи конденсаторов через образец в виде медной проволоки без учета изменений внутренней структуры образцов, можно записать дифференциальное уравнение:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0, \quad (1)$$

где необходимо знать значения  $L$ ,  $R$  и  $C$  (индуктивность, сопротивление и емкость соответственно), чтобы найти функцию  $q(t)$  при известном значении  $q(0)$ .

В самом начале токовой кривой сопротивлением всей системы можно пренебречь. Большая часть напряжения будет вызвана большой производной тока. Считая, что:

$$L \frac{dI}{dt} = U, \quad (2)$$

индуктивность всей системы была оценена в  $L = (4,60 \pm 0,03)10^{-6}$  (Гн) при помощи метода наименьших квадратов с коэффициентом корреляции 0,99994. Оценив индуцированное всей системой напряжение на всем протяжении импульса, благодаря величине  $L$ , получили зависимость сопротивления от времени:

$$R(t) = \frac{U(t) - L dI(t)/dt}{I(t)}. \quad (3)$$

Произведя численное дифференцирование тока и фильтрацию его паразитных частотных составляющих при помощи дискретного преобразования Фурье, получили численное представление функции  $R(t)$ . Численное дифференцирование производилось при помощи свойства Фурье-преобразования:

$$F\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = i\omega F[f(t)]. \quad (4)$$

Таким образом, значение сопротивления всей системы (куда входит сопротивление образца, подводных проводов и контактов) было определено как  $R = 0,01181 \pm 0,00007$  (Ом). Пик в районе  $t = 0,6$  (мс) является следствием изменения внутренней структуры образца и на данный момент не является предметом нашего рассмотрения.

Поскольку в электрической части установки (в рабочей батарее) использованы 36 штук однотипных электролитических конденсаторов с емкостью 3300 мкФ и рабочим напряжением до 400 В каждый, то общая емкость рабочей батареи конденсаторов при последовательно-параллельном соединении и рабочем напряжении до 800 В составит 29 700 мкФ.

По итогам всех измерений, вычислений и математического моделирования для заданных параметров  $L = 4,610^{-6}$  (Гн),  $R = 11,810^{-3}$  (Ом),  $C = 29,710^{-3}$  (Ф) была создана имитационная модель в среде SimInTech версии 2.25.2.11. SimInTech (Simulation In Technic) – это среда динамического моделирования технических систем, предназначенная для расчётной проверки работы систем управления сложными техническими объектами. Блок-схема модели и результаты моделирования графика кривой тока при начальных условиях показаны на рис. 1. Если сравнивать

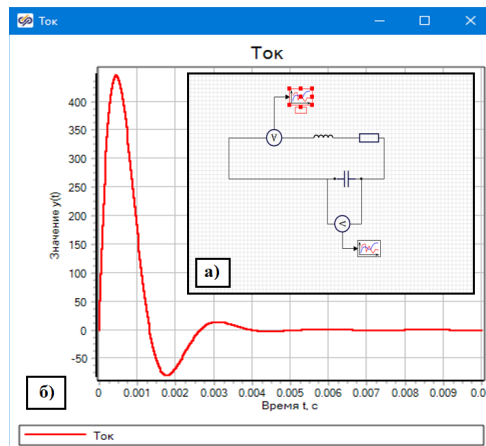


Рис. 1. Блок-схема модели в SimInTech (а) и график кривой тока при начальных условиях (б)

результаты моделирования с полученной токовой кривой в ходе натурных испытаний при тех же начальных условиях [4], то можно сделать вывод, что полученная численная модель полностью предсказывает такие параметры, как пиковое значение тока и длина импульса в пределах погрешности измерительного оборудования. Однако требуется дальнейшее изучение влияния изменения сопротивления образца в результате изменения его внутренней структуры на токовую кривую для получения более точной модели.

**Ключевые слова:** электропластический эффект, моделирование, SimInTech, ток, сопротивление, индуктивность, ёмкость, конденсаторные батареи, экспериментальная установка, медная проволока, металлы.

## Литература

1. Troitskii O. A. Electromechanical effect in metals // JETP Letters. 1969. V. 1. P. 18–22.
2. Dmitriev S. V., Morkina A. Y., Tarov D. V. et al. Effect of repetitive high-density current pulses on plastic deformation of copper wires under stepwise loading // Spectrum of Mechanical Engineering and Operational Research. 2024. V. 1. Is. 1. P. 27–43. DOI: 10.31181/smeor1120243.
3. Morkina A. Y., Tarov D. V., Khalikova G. R. et al. Comparison of the effect of electroplasticity in copper and aluminum // Facta Universitatis. Series: Mechanical Engineering. 2024. V. 22. Is. 4. P. 615–632. DOI: 10.22190/fume240920049m.
4. Татаринов В. П., Татаринов П. С., Бебихов Ю. В. и др. Разработка способа измерения импульсных токов большой величины // Вестник Северо-Восточного федерального университета имени М. К. Аммосова. 2024. Т. 21. № 1. С. 81–88. DOI: 10.25587/2222-5404-2024-21-1-81-88.

## Линейное уравнение на $\mathbb{R}$ с производной Лиувилля и двустороннее преобразование Лапласа

© Скрипка Надежда Михайловна

старший преподаватель

Челябинский государственный университет

Россия, 454001, г. Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129

vio.nadezhda@ya.ru

© Федоров Владимир Евгеньевич

доктор физико-математических наук,

ученое звание профессор,

заведующий кафедрой математического анализа

Челябинский государственный университет

Россия, 454001, г. Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129

kar@csu.ru

**Ключевые слова:** двустороннее преобразование Лапласа, уравнение на прямой, производная Лиувилля, функциональное пространство.

### Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Челябинской области (проект № 24-11-20002).

Рассматривается линейное уравнение

$$D^\alpha z(t) = Az(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

где  $D^\alpha$  — производная Лиувилля порядка  $\alpha > 0$ , искомая функция  $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{Z}$  имеет значения в банаховом пространстве  $\mathcal{Z}$ ,  $A$  — линейный ограниченный оператор в  $\mathcal{Z}$ .

Для  $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{Z}$  дробный интеграл Лиувилля порядка  $\beta \in (0, 1)$  определяется как [1]

$$J^\beta h(t) := \int_{-\infty}^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} h(s) ds, \quad t \in \mathbb{R}, \quad J^0 h(t) := h(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

дробная производная Лиувилля порядка  $\alpha \in (m-1, m]$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , имеет вид [1]

$$D^\alpha h(t) := D^m J^{m-\alpha} h(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Однозначная разрешимость уравнения (3) изучается с помощью методов теории двустороннего преобразования Лапласа в специально построенных пространствах  $C_{a,b}^l(\mathbb{R}; \mathcal{Z})$  непрерывно дифференцируемых экспоненциально ограниченных функций.

Для функции  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{Z}$  и некоторых  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,  $K > 0$  при условии

$$\begin{cases} \|g(t)\|_{\mathcal{Z}} \leq Ke^{at}, & t \geq 0, \\ \|g(t)\|_{\mathcal{Z}} \leq Ke^{bt}, & t < 0, \end{cases}$$



двустороннее преобразование Лапласа [2] для  $g$  имеет вид

$$\mathfrak{L}_2[g](\lambda) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda t} g(t) dt,$$

где  $\lambda \in \Pi_a^b := \{\mu \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \mu \in (a, b)\}$ .

Для  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , определим пространство  $C_{a,b}^l(\mathbb{R}; \mathcal{Z})$  как множество функций  $x \in C^l(\mathbb{R}; \mathcal{Z})$  таких, что для любого  $\varepsilon > 0$  выполнено:

- 1)  $e^{-(a+\varepsilon)t} x^{(k)}(t)$  ограничено при  $t > 0$ ,
- 2)  $e^{-(b+\varepsilon)t} x^{(k)}(t)$  ограничено при  $t < 0$ ,

при всех  $k = 0, 1, \dots, l$ . При этом  $C_{a,b}(\mathbb{R}; \mathcal{Z}) := C_{a,b}^0(\mathbb{R}; \mathcal{Z})$ .

Решением уравнения (3) будем называть функцию  $z \in C_{a,b}(\mathbb{R}; \mathcal{Z})$ , если  $J^{m-\alpha} z \in C_{a,b}^m(\mathbb{R}; \mathcal{Z})$  и равенство (3) верно на  $\mathbb{R}$ .

**Теорема.** Пусть  $\alpha > 0$ ,  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ ,  $a < b < -\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}^{1/\alpha}$  или  $\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}^{1/\alpha} < a < b$ ,  $f \in C_{a,b}(\mathbb{R}; \mathcal{Z})$ . Тогда уравнение (3) имеет единственное решение, представимое в виде свертки

$$z_f(t) := (Z_\alpha * f)(t) = \int_{\mathbb{R}} Z_\alpha(t-s) f(s) ds,$$

где

$$Z_\alpha(t) := \text{v.p.} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_c} (\lambda^\alpha - A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda, \quad t \in \mathbb{R},$$

$\Gamma_c := \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = c + i\omega, \omega \in \mathbb{R}\}$  для  $c \in (a, b)$ .

В работе [3] аналогичное уравнение исследовано с целочисленной производной  $m$ -го порядка вместо дробной производной Лиувилля.

## Литература

1. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения // С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. W. R. LePage. Complex Variables and the Laplace Transform for Engineers. New York : Dover Publications, 1961. – 476 p.
3. V. E. Fedorov, P. S. Shishatskaya, and N. M. Skripka. Study of a class of high-order equations on  $\mathbb{R}$  by two-sided Laplace transform. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2024. – No. 9, p. 4500-4507. DOI: 10.1134/S1995080224605095

## Уравнения нейтрального типа: приложения к моделям нейронных сетей

© Скворцова Мария Александровна

кандидат физико-математических наук

старший научный сотрудник

Новосибирский государственный университет

Россия, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 1

sm-18-nsu@yandex.ru

**Ключевые слова:** уравнения нейтрального типа, модели нейронных сетей, экспоненциальная устойчивость, оценки решений, функционал Ляпунова – Красовского.

### Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00367, <https://rscf.ru/project/24-21-00367/>.

В настоящее время активно развивающимся направлением является математическое моделирование нейронных сетей. Среди наиболее распространенных моделей можно выделить модель нейронной сети Хопфилда, модель нейронной сети Коэна – Гроссберга, модель нейронной сети Коско (двунаправленная ассоциативная память). В последние годы при моделировании нейронных сетей широко используются дифференциальные уравнения с запаздыванием. В частности, в недавних работах [1], [2], [3] рассматривались модели, которые описываются дифференциальными уравнениями нейтрального типа. Приведем некоторые из них.

1. Модель Хопфилда нейтрального типа [1]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_i(t) = & -a_i^0x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij}f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij}g_j(x_j(t - \tau_{ij}(t))) \\ & + \sum_{j=1}^n c_{ij}\frac{d}{dt}x_j(t - \xi_{ij}(t)) + u_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где функции  $\tau_{ij}(t), \xi_{ij}(t) \in C^1(\mathbb{R}_+)$ ,  $f_j(x), g_j(x) \in C(\mathbb{R})$  удовлетворяют условиям

$$0 \leq \tau_{ij}(t) \leq \tau, \quad 0 \leq \xi_{ij}(t) \leq \xi, \quad \frac{d}{dt}\tau_{ij}(t) \leq \bar{\tau} < 1, \quad \frac{d}{dt}\xi_{ij}(t) \leq \bar{\xi} < 1,$$

$$|f_j(x) - f_j(y)| \leq \mu_j|x - y|, \quad |g_j(x) - g_j(y)| \leq \nu_j|x - y|.$$

2. Модель Коэна – Гроссберга нейтрального типа [2]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_i(t) = & \beta_i(x_i(t)) \left\{ -\alpha_i(x_i(t)) + \sum_{j=1}^n a_{ij}f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij}g_j(x_j(t - \tau_{ij}(t))) + u_i \right\} \\ & + \sum_{j=1}^n c_{ij}\frac{d}{dt}x_j(t - \xi_{ij}(t)), \quad i = 1, \dots, n, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где функции  $\alpha_i(x), \beta_i(x) \in C(\mathbb{R})$  удовлетворяют условиям

$$0 < \underline{\alpha}_i \leq \frac{\alpha_i(x) - \alpha_i(y)}{x - y}, \quad 0 < \underline{\beta}_i \leq \beta_i(x) \leq \bar{\beta}_i.$$

**3. Модель Коско нейтрального типа [3]:**

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_i(t) &= -a_i^0 x_i(t) + \sum_{j=1}^m a_{ij} f_j(y_j(t)) + \sum_{j=1}^m b_{ij} f_j(y_j(t - \tau_{ij}(t))) \\ &+ \sum_{j=1}^m c_{ij} \int_{-\infty}^t M_j(t-s) f_j(y_j(s)) ds + \sum_{l=1}^n \varepsilon_{il} \frac{d}{dt} x_l(t - \xi_{il}(t)) + u_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ \frac{d}{dt}y_k(t) &= -\alpha_k^0 y_k(t) + \sum_{l=1}^n \alpha_{kl} g_l(x_l(t)) + \sum_{l=1}^n \beta_{kl} g_l(x_l(t - \sigma_{kl}(t))) \\ &+ \sum_{l=1}^n \gamma_{kl} \int_{-\infty}^t N_l(t-s) g_l(x_l(s)) ds + \sum_{j=1}^m \delta_{kj} \frac{d}{dt} y_j(t - \omega_{kj}(t)) + v_k, \quad k = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (3)$$

где функции  $\sigma_{kl}(t), \omega_{kj}(t) \in C^1(\mathbb{R}_+)$ ,  $M_j(s), N_l(s) \in C(\mathbb{R}_+)$  удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} 0 \leq \sigma_{kl}(t) \leq \sigma, \quad 0 \leq \omega_{kj}(t) \leq \omega, \quad \frac{d}{dt} \sigma_{kl}(t) \leq \bar{\sigma} < 1, \quad \frac{d}{dt} \omega_{kj}(t) \leq \bar{\omega} < 1, \\ \int_0^\infty M_j(s) ds = 1, \quad \int_0^\infty N_l(s) ds = 1. \end{aligned}$$

В настоящей работе рассмотрены вопросы устойчивости стационарных решений указанных выше систем. Найдены условия на параметры моделей, гарантирующие экспоненциальную устойчивость стационарных решений систем (1)–(3), и получены оценки, характеризующие скорость стабилизации решений на бесконечности. При исследовании моделей (1)–(3) мы использовали функционал Ляпунова – Красовского, предложенный в [4] для изучения асимптотического поведения решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с несколькими запаздываниями.

## Литература

1. Wan L., Zhou Q., Fu H., Zhang Q. Exponential stability of Hopfield neural networks of neutral type with multiple time-varying delays // AIMS Mathematics. 2021. V. 6, No. 8. P. 8030–8043. DOI: 10.3934/math.2021466.
2. Wan L., Zhou Q. Exponential stability of neutral-type Cohen–Grossberg neural networks with multiple time-varying delays // IEEE Access. 2021. V. 9. P. 48914–48922. DOI: 10.1109/ACCESS.2021.3068191.
3. Liu G.-Q., Zhou S.-M., Li Y.-Z., Cai T.-C. Stability conditions concerning neutral-type BAM neural networks with infinite distributed delay // International Journal of Computer Mathematics. 2020. V. 98, No. 3. P. 502–516. DOI: 10.1080/00207160.2020.1759043
4. Матвеева И. И. Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа с несколькими запаздываниями // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 6. С. 730–740. DOI: 10.1134/S0374064117060036.

**Обобщенная задача Дирихле–Неймана для эллиптического уравнения четвертого порядка.**

© Солдатов Александр Павлович

доктор физико-математических наук, профессор

ВЦ ФИЦ ИУ РАН

Россия, 119333, г. Москва, ул. Вавилова, 44/2

soldatov48@gmail.com

Для эллиптического уравнения четвертого порядка в области, ограниченной простым ляпуновским контуром, на плоскости рассматривается обобщенная задача Неймана, которая определяется заданием на ее границе двух нормальных производных  $r$ -го и  $s$ -го порядков, где  $0 \leq r < s \leq 3$ . При  $r = 0$  ее естественно назвать обобщенной задачей Дирихле, а при  $r > 0$  – обобщенной задачей Неймана. Показано, что при  $s - r \leq 2$  эта задача всегда фредгольмова и ее индекс равен нулю. В особом случае  $r = 0$ ,  $s = 3$  фредгольмовость задачи может нарушаться. В этом случае установлен критерий ее фредгольмовости и приведена явная формула индекса.

## Идентификация коэффициента теплообмена по граничным интегральным данным

© Солдатов Олег Альбертович

аспирант,

Югорский государственный университет

Россия, 628012, Ханты-Мансийск, ул. Чехова, 16

oleg.soldatov.97@bk.ru

**Ключевые слова:** параболическое уравнение, обратная задача, существование, единственность, коэффициент теплопередачи, корректность, тепломассоперенос, начально-краевая задача.

### Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда и правительства Ханты-Мансийского автономного округа-ЮГРЫ (грант № 25-11-20026)

Рассматривается параболическое уравнение второго порядка вида

$$Mu = u_t - Lu = f(x, t), \quad (x, t) \in Q = G \times (0, T), \quad (1)$$

где  $Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} - a_0 u$ ,  $G \in \mathbb{R}^n$  – ограниченная область с границей  $\Gamma$ ,  $S = (0, T) \times \Gamma$ . Уравнение (1) дополняется начально-краевыми условиями:

$$Ru|_S = g, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad (2)$$

где  $Ru = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \nu_i \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sigma_0(x, t)(u - \bar{u})$ ,  $\vec{\nu}$  есть единичный вектор внешней нормали и  $\bar{u}$  – заданная функция. Коэффициент  $\sigma_0$  в (2) имеет вид  $\sigma_0 = \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) \Phi_i(t, x)$ , где функции  $\alpha_i$  подлежат определению а функции  $\{\Phi_i\}$  известны и по сути это некоторый базис. Условия на них мы сформулируем ниже. Условия для определения этих функций имеют вид

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial N} \varphi_j(x) d\Gamma = \psi_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, r. \quad (3)$$

Задача состоит в нахождении решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям (2)-(3) и функций  $\{\alpha_i(t)\}$ . В данной работе при определенных условиях на данные мы покажем корректность задачи (1)-(3) в пространствах Соболева.

Наиболее часто в приложениях встречаются задачи с точечным условием переопределения, то есть с условием вида  $u(t, b_i) = \psi_j, i = 1, 2, \dots, r$  Теорема существования и единственности решений таких задач в классах Соболева была получена, например, в работе [1] и многих других работах. Следует отметить известные работы [2], [3], где в модельном случае была получена теорема единственности классических решений об определении коэффициента теплопередачи вида  $\sigma(t)$  как по точечному условию вида  $u(t, x_0) = \alpha(t)$  так и по интегральному условию вида  $\int_{\Gamma_0} u(t, x) \varphi_i(x) d\Gamma_0 = \psi_i(t), i = 1, 2, \dots, r$ .

## Литература

1. Пятков С. Г., Баранчук В. А. Определение коэффициента теплопередачи в математических моделях тепло- и массообмена // Математические заметки. 2023. № 1. С. 93–108. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm13573>
2. Kostin A. B., Prilepko A. I. On some problems of the reconstruction of a boundary condition for a parabolic equation, I // Differ. Equ. 1996. № 1. P. 113–122.
3. Kostin A. B., Prilepko A. I. On some problems of the reconstruction of a boundary condition for a parabolic equation, II // Differ. Equ. 1996. № 11. P. 1515–1525.

## **Краевые задачи для вырождающихся дифференциальных уравнений с кратными характеристиками**

© Спиридонова Нарыйа Руслановна

старший преподаватель

Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова

Россия, 677000, Город Якутск, ул. Кулаковского, 48

nariya@yandex.ru

**Ключевые слова:** дифференциальные уравнения с кратными характеристиками, краевые задачи, регулярные решения, существование, единственность.

В докладе рассказывается о разрешимости краевых задач для некоторых классов вырождающихся дифференциальных уравнений с кратными характеристиками.

Основным принципом результатов является доказательство существования и единственности регулярных решений изучаемых задач – решений, имеющих все обобщенные по С.Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.

## Моделирование тепломассопереноса в двухслойной системе на основе точных решений уравнений конвекции

© Степанова Ирина Владимировна

доктор физико-математических наук,

ученое звание доцент,

старший научный сотрудник

Институт вычислительного моделирования СО РАН

Россия, 660036, Красноярск, ул. Академгородок, 50/44

stepiv@icm.krasn.ru

**Ключевые слова:** уравнения Обербека – Буссинеска, точные решения, замыкающие соотношения, испарительная конвекция, фазовый переход, граница раздела, бинарная смесь, поверхностное натяжение, массовая скорость испарения, поверхностный температурный градиент.

В работе рассматривается двумерная стационарная задача о течении в узком горизонтальном канале, заполненном жидкой двухкомпонентной жидкостью и газопаровой смесью, контактирующими через недеформируемую границу раздела  $y = 0$  (см. Рис. 1).

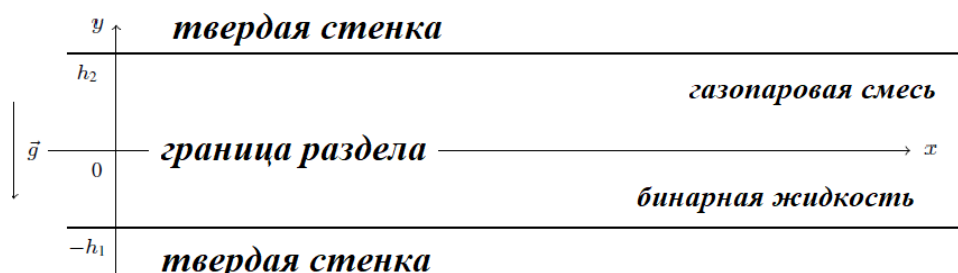


Рис. 1. Схема течения

Течение считается однонаправленным, только горизонтальная компонента скорости  $u(y)$  отлична от нуля. Уравнения конвекции в приближении Обербека – Буссинеска для каждого слоя имеют вид [1]

$$\begin{aligned} \nu u_{yy} &= \frac{1}{\rho_0} p_x, & g(\beta_1 \theta + \beta_2 c) &= \frac{1}{\rho_0} p_y, \\ u \theta_x &= \chi(\theta_{xx} + \theta_{yy}), & u c_x &= D(c_{xx} + c_{yy} + \alpha(\theta_{xx} + \theta_{yy})), \end{aligned} \quad (1)$$

здесь  $(x, y)$  – вектор координат; давление  $p(x, y)$  определено с точностью до гидростатического;  $\theta(x, y)$  и  $c(x, y)$  – малые отклонения температуры и массовой концентрации одного из компонентов от их средних равновесных значений. Коэффициенты кинематической вязкости  $\nu$ , температуропроводности  $\chi$ , диффузии  $D$ , параметр термодиффузии  $\alpha$ , теплового и концентрационного расширения  $\beta_1, \beta_2$ , средняя плотность смеси  $\rho_0$  и ускорение силы тяжести  $g$  постоянны.



Предполагается, что на границе раздела летучий компонент бинарной смеси, заполняющей нижний слой, слабо испаряется (без кипения) в верхний газопаровый слой. Интенсивность испарения с учетом эффекта термодиффузии пара в газе может быть вычислена с помощью найденных в ходе решения задачи характеристик течения, а также измерена в эксперименте [2]. Уравнения (1) замыкаются граничными условиями на твердых стенках  $y = -h_1, y = h_2$  и на границе раздела  $y = 0$ . Полученная математическая модель допускает точное решение типа Остроумова – Бириха. Подробный алгоритм построения решения задачи в случаях, когда поверхностное натяжение жидкой смеси зависит линейно и квадратично от концентрации испаряющегося компонента, приведен в работе [3].

Решение в конечных формулах позволяет провести многопараметрический анализ процесса тепломассообмена на границе раздела с учетом фазового перехода. В частности, исследовать влияние расхода газовой смеси

$$q = \int_0^{h_2} \rho_0^{gas} u^{gas} dy \quad (2)$$

на интенсивность испарения и другие характеристики течения. Необходимо отметить, что, в отличие от работы [4], здесь величина  $q$  не вычисляется, а задается из экспериментальных данных, при этом условие (2) используется как дополнительное к граничным. Установлено, что построенное решение корректно описывает рост скорости испарения при увеличении  $q$  и отвод тепла с границы раздела. При этом нельзя не отметить его дефект: величина поверхностного концентрационного градиента зависит только от значения градиента температуры на поверхности и физических характеристик смеси. Указанный недостаток не позволяет описать увеличение концентрации парогазовой смеси с ростом  $q$  вблизи поверхности раздела. Тем не менее возрастание градиента концентрации внутри верхнего слоя при увеличении расхода газа модель отражает корректно. Верификация точных решений выполнена на основе сравнения с данными экспериментов и результатами ранее проведенных теоретических исследований.

## Литература

1. Андреев В. К., Гапоненко Ю. А., Гончарова О. Н., Пухначев В. В. Современные математические модели конвекции. М.: Физматлит. 2008. 368 с.
2. Бекежанова В. Б., Гончарова О. Н. Задачи испарительной конвекции (обзор) // Прикладная математика и механика. 2018. Т. 82. № 2. С. 219–260. EDN: ORSKZP.
3. Степанова И. В. Влияние тепловой нагрузки на конвекцию в системе двух бинарных смесей с фазовым переходом // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 246–258. DOI: 10.18500/1816-9791-2025-25-2-246-258.
4. Bekezhanova V. B., Stepanova I. V. Mathematical modeling of concentration influence on evaporative convection in a bilayer system of binary mixtures // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2024. V. 107. P. 109358(1-13). DOI: 10.1016/j.ijheatfluidflow.2024.109385.

## О касательных преобразованиях Ли систем обыкновенных дифференциальных уравнений

© Талышев Александр Алексеевич

кандидат физико-математических наук, доцент

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет» (Новосибирский государственный университет),

Россия, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, д. 1,

tal@academ.org

**Ключевые слова:** обыкновенные дифференциальные уравнения, группы Ли точечных и касательных преобразований, алгебры Ли-Беклунда.

Если система обыкновенных дифференциальных уравнений инвариантна относительно однопараметрической группы преобразований Ли, то имеется несколько различных алгоритмов понижения порядка системы на единицу [1, §8], [2], [3], [4].

В работе [5] для вполне интегрируемых систем Пфаффа доказаны теоремы: о понижении порядка систем, допускающих симметрию Ли, о последовательном понижении порядка систем, допускающих более, чем однопараметрические симметрии Ли, и об интегрирующем множителе для одномерных систем. Первая и третья теоремы являются непосредственным обобщением соответствующих теорем для обыкновенных дифференциальных уравнений, описанных в [1, §8].

В случае обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, допускаемая основная алгебра Ли операторов для группы точечных преобразований бесконечномерна. Однако определяющая система сложнее исходной системы дифференциальных уравнений. Для уравнений более высокого порядка определяющая система переопределенная (в силу расщепления по производным более высокого порядка). И потому ее иногда можно проинтегрировать. Например, как в [1, §8] для уравнения второго порядка.

Любую систему обыкновенных дифференциальных уравнений можно преобразовать в систему первого порядка соответствующей размерности. Обратное тоже, как правило возможно, т.е. систему обыкновенных дифференциальных уравнений можно преобразовать к одному уравнению высокого порядка (см. например [6]).

Таким образом для обыкновенных дифференциальных уравнений касательные преобразования и высшие симметрии являются точечными преобразованиями при записи системы в виде системы первого порядка.

Итак, если потребовать чтобы коэффициенты инфинитезимального оператора для независимой переменной и первой компоненты зависимой переменной не зависели от остальных зависимых переменных, то такие преобразования будут точечными для одного уравнения высокого порядка. И определяющая система будет переопределенной.

Имеются примеры успешного применения этого алгоритма вычисления симметрий для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

## Литература

1. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1978. 400 с.
2. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. Пер. с англ. М.: Мир. 1989. 639 с.
3. Ибрагимов Н.Х. Азбука группового анализа. М.: Знание. 8. 1989.
4. Ибрагимов Н.Х. Опыт группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Знание. 7. 1991.
5. Талышев А.А. Об интегрировании автоморфных систем конечномерных групп Ли// Уфимский математический журнал. 2014. Т.6, № 1. С.108–114.
6. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа. 1967. 564 с.

**Нелокальные задачи с обобщенным условием Ионкина для некоторых классов уравнений соболевского типа высокого порядка**

© Тарасова Галина Ивановна

кандидат физико-математических наук,

доцент

Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова

Россия, 677000, Город Якутск, ул. Кулаковского, 48

gi-tarasova@mail.ru

**Ключевые слова:** дифференциальные уравнения соболевского типа высокого порядка, нелокальные задачи, регулярные решения, существование, единственность.

В докладе излагаются результаты исследования пространственно-нелокальные задачи для некоторых классов уравнений соболевского типа высокого порядка.

Суть полученных результатов заключается в получении достаточных условий, обеспечивающих существование и единственность регулярных решений – решений, имеющих все обобщенные по С.Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.

**К оптимизации нелинейных управляемых систем с ограничениями**

© Трунин Дмитрий Олегович

кандидат физико-математических наук,

ученое звание доцент,

доцент кафедры системного анализа и компьютерного моделирования

Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова

Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а

tdobsu@yandex.ru

**Ключевые слова:** нелинейная задача оптимального управления с ограничениями, нелокальное улучшение управления, задача о неподвижной точке, итерационный процесс.

Большинство численных методов решения разработаны для задачи оптимального управления со свободным правым концом (основная задача оптимального управления), при этом наиболее трудоемкой операцией в стандартных численных методах является процедура варьирования управления с использованием малого параметра для обеспечения улучшения управления. В отдельных классах задач оптимального управления от операции варьирования можно освободиться, если в данном классе задач возможно построение точных формул приращения функционала, не содержащих остаточных членов разложений.

Такие методы разработаны в [1] для класса линейных по состоянию задач оптимального управления со свободным правым концом, при этом нелокальность улучшения управления достигается за счет решения двух задач Коши.

В работе [2] методы нелокального улучшения обобщаются на класс полиномиальных по состоянию задач оптимального управления, при этом улучшение управления достигается за счет решения специальной краевой задачи, которая существенно проще, чем краевая задача принципа максимума. К решению возникающих краевых задач улучшения в [2] применяется подход возмущений.

В данной работе предлагается процедура нелокального улучшения допустимых управлений для нелинейных по состоянию и управлению задач оптимального управления с ограничениями. Условия нелокального улучшения формулируются в виде специальной системы функциональных уравнений в пространстве управлений. Специфика данной системы позволяет интерпретировать ее как задачу о неподвижной точке, к решению которой применяется аппарат теории и методов неподвижных точек [3].

Рассматривается нелинейная по состоянию и управлению задача оптимального управления с одним терминальным ограничением-равенством

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x^0, \quad u = u(t) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (1)$$

$$\Phi_0(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_T F(x, u, t) dt \rightarrow \min, \quad (2)$$

$$\Phi_1(u) = \chi(x(t_1)) = 0. \quad (3)$$

Здесь  $x = x(t) \in R^n$  — вектор состояния,  $u = u(t) \in R^r$  — вектор управления (кусочно-непрерывная вектор-функция), интервал времени  $T$  фиксирован, заданные

функции  $f(x, u, t)$  и  $F(x, u, t)$  нелинейны и дифференцируемы по  $(x, u)$  и непрерывны по  $t$  на множестве  $R^n \times U \times T$ , заданные функции  $\varphi(x)$  и  $\chi(x)$  нелинейны и дифференцируемы по  $x$  на  $R^n$ ,  $U$  — замкнутое выпуклое множество в  $R^r$ .

К задаче вида (3)–(3) с помощью стандартных приемов сводятся задачи с несколькими функциональными ограничениями, а также с поточечными фазовыми ограничениями на траекторию.

Пусть  $u^0$  — допустимое управление в задаче (3)–(3). Поставим задачу улучшения допустимого управления  $u^0$ : найти допустимое управление  $v$  со свойством:

$$\Phi_0(v) \leq \Phi_0(u^0).$$

Для решения задачи улучшения допустимого управления в аналогии с [4] можно построить систему функциональных уравнений на основе операции проектирования на множество  $U$ . При этом специфика этой системы позволяет интерпретировать ее как задачу о неподвижной точке, к решению которой применяется модификация метода простой итерации [3], при этом в качестве начального приближения итерационного процесса может выбираться некоторое доступное управление. Итерационный процесс продолжается до первого улучшения исходного управления  $u^0$ . Далее для полученного управления строится новая задача улучшения и процесс повторяется. Таким образом, строится метод последовательных улучшений допустимых управлений в рассматриваемом классе задач.

## Литература

1. Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. Москва: Физматлит, 2000. 160 с.
2. Булдаев А. С. Методы возмущений в задачах оптимизации управляемых систем. Улан-Удэ: Изд-во БГУ, 2008. 208 с.
3. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. Москва: Наука, 1989. 432 с.
4. Трунин Д. О., Мантатов В. В. Об одном подходе к оптимизации нелинейных по управлению систем с ограничениями // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. 2025. № 1. С. 57–64.

## О некоторых классах обратных задач по определению коэффициента поглощения

© Тукмачева Юлия Андреевна

аспирант Инженерной школы цифровых технологий,  
Югорский государственный университет, Россия,  
628012, Ханты-Мансийск, ул. Чехова 16  
y\_tukmacheva@ugrasu.ru

**Keywords:** обратная задача, условие переопределения, параболическое уравнение, теорема существования, начально-краевая задача, определение младшего коэффициента, тепломассоперенос

### Благодарность

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда и правительства Ханты-Мансийского автономного округа-ЮГРЫ (грант № 25-11-20026).

Мы рассматриваем задачу определения младшего коэффициента в параболическом уравнении. Уравнение имеет вид

$$Mu = u_t + Au + \beta(t, x)u = f(t, x), \quad (t, x) \in Q = (0, T) \times G, \quad (1)$$

где  $G \in \mathbb{R}^n$  ограниченная область с границей  $\Gamma \in C^2$ . Пусть  $S = (0, T) \times \Gamma$ . Функция  $\beta$  здесь неизвестна и ищется в виде  $\beta(t, x) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \Phi_i(t, x)$ . Определению подлежат постоянные  $\alpha_i$  а  $\Phi_i$  – некоторый набор данных линейно независимых функций. Оператор  $A$  имеет вид

$$A(t, x, D)u = - \sum_{k,l=1}^n a_{kl}(t, x)u_{x_k x_l} + \sum_{k=1}^n a_k(t, x)u_{x_k} + a_0 u.$$

Уравнение дополняется начально-краевыми условиями

$$u|_{t=0} = u_0, \quad Bu|_S = g(t, x), \quad Bu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}u_{x_j} + \sigma u \text{ или } Bu = u, \quad (2)$$

где  $\vec{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_n)$  – единичный вектор внешней нормали к  $\Gamma$ . Условия переопределения имеют вид

$$u(t_i, y_i) = \psi_i, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (t_i, y_i) \in Q = (0, T) \times G. \quad (3)$$

Проблемы (1)-(3), (1) возникают при описании тепломассопереноса, в теории фильтрации, в экологии и многих других областях. На основе монографии [1], посвященной обратным параболическим задачам и монографии [3, 4] содержащей основные постановки обратных задач. Условия переопределения вида (3) возникают не так часто, например, в работе [4], где встречается такая постановка.

Мы рассматриваем вопросы корректности задачи (1)-(3). Пусть  $\Phi$  - решение задачи (1), (2), где  $\beta \equiv 0$ . Построим матрицу  $B$  с элементами  $b_{ij} = L^{-1}(\Phi_j \Phi)(t_i, y_i)$ , где

$v_{ij} = L^{-1}(\Phi_j \Phi)(t, x)$  есть решение задачи  $v_{ij,t} + Av_{ij} = \Phi_j \Phi$ ,  $Bv_{ij}|_S = 0$ ,  $v(0, x) = 0$ . Основное условие, на данные при выполнении которых получена теорема существования и единственности решений есть условие  $\det B \neq 0$ . Сама теорема носит локальный характер: накладываются некоторые условия малости на нормы данных или на величину  $T$ .

## Литература

1. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., and Vasin I.A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York: Marcel Dekker, Inc., 1999.
2. Isakov V. Inverse Problems for Partial Differential Equations. Berlin: Springer, 2006.
3. Kabanikhin S.I. Inverse and Ill-Posed Problems. Theory and Applications. Boston/Berlin: Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, 2012
4. Mamonov A. V., Tsai Y.-H. R. Point source identification in nonlinear advection-diffusion-reaction systems // *Inverse Problems*. 2013. V.29, N3. 26 p.



## Метод Зоммерфельда решения динамической смешанной задачи для жесткого штампа

© Фатьянов Алексей Геннадьевич

доктор физико-математических наук,

главный научный сотрудник

ИБМиМГ СО РАН

Россия, 630090, Новосибирск, пр. ак. Лаврентьева, 6

fat@nmsf.sscs.ru

**Ключевые слова:** Метод Зоммерфельда, смешанная задача, жесткий штамп, минимизация функционала, выравнивание размерностей, сейсмические волны

### Благодарности

Работа выполнена по госзаданию ИБМиМГ № FWNM-2025-0004.

В работе рассматривается задача определения вектора упругого смещения  $V = (u_r(r, z, t), u_z(r, z, t))'$  в цилиндрической системе координат [1]:

$$LV = \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad (1)$$

Начальные данные:

$$V = \frac{\partial V}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad (2)$$

Краевые условия:

$$u_z|_{z=0} = f(t) \text{ при } r \leq r_0, \quad \sigma_{zz}/z=0 = 0 \text{ при } r > r_0 \quad (3)$$

$$\tau_{rz}/z=0 = 0 \quad (4)$$

В (3,4)  $L$  - матричный дифференциальный оператор Ламе для однородной осесимметричной среды в цилиндрической системе координат.  $r_0 \neq 0$  - радиус жесткого штампа.  $f(t)$  - входной импульс и  $F(\omega)$  его спектр.  $\sigma_{zz}, \tau_{rz}$  - нормальные и касательные напряжения. Единственное физически верное решение (3)-(4) выделяется на основе [2,3].

Решение (3)-(4) на первом этапе для  $u_z$  и  $u_r$  компоненты строится с помощью преобразований Фурье-Бесселя:

$$\begin{aligned} u_z(z, r, t) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_z(z, k_m, \omega_n) J_0(k_m r) \beta_m e^{i\omega_n t} \\ u_r(z, r, t) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_r(z, k_m, \omega_n) J_1(k_m r) \beta_m e^{i\omega_n t} \end{aligned} \quad (5)$$

В (5)  $k_m, \omega_n$  - пространственные и временные частоты, а и Т - границы расчетной области по  $r$  и  $t$ .  $J_0(x), J_1(x)$  - функции Бесселя.  $k_m$ - корни уравнения  $J_0(ax) = 0$ .  $\beta_m = 2/a^2 J_1^2(k_m a)$ .

Далее осуществляется переход к потенциалам продольных  $\phi$  и поперечных  $\psi$  волн известным образом. С учетом (5) краевые условия (3) и (4) после преобразований примут вид:

$$\sum_m q_m \phi_m J_0(k_m r) \beta_m = F(\omega), \quad \sum_m p_m \cdot \phi_m J_0(k_m r) \beta_m = 0 \quad (6)$$

Следуя [2] решение (6) (вектор  $\phi_m$ ) находим методом наименьших квадратов с известными коэффициентами  $p_m, q_m$ .

$$\int_0^{r_0} \left| F(\omega) - \sum_m q_m \phi_m J_0(k_m r) \beta_m \right|^2 r dr + \int_{r_0}^a \left| \sum_m p_m \cdot \phi_m J_0(k_m r) \beta_m \right|^2 r dr \quad (7)$$

Для минимизации целевого функционала (7) продифференцируем его по  $\phi_n^*$ . В итоге получим СЛАУ для определения  $\phi_m$ :

$$\sum_m (q_n^* q_m a_{nm} + p_n^* p_m b_{nm}) \beta_m \phi_m = q_n^* \cdot F(\omega) \cdot J_1(k_n r_0) / k_n \quad (8)$$

Второе уравнение в (6) можно умножить на произвольное число  $X \neq 0$ . В этом случае вместо (8) получим СЛАУ

$$\sum_m (q_n^* q_m a_{nm} + X^2 p_n^* p_m b_{nm}) \beta_m \phi_m = q_n^* \cdot F(\omega) \cdot J_1(k_n r_0) / k_n \quad (9)$$

СЛАУ (9) допускает бесконечное количество решений при изменении  $X$ . При этом каждое математически корректно.

Для выбора единственного физически верного решения смешанной краевой задачи в настоящее время часто используется поведение решения в окрестности точки разрыва краевых условий (условие на ребре) [1].

В [2] для выбора единственного решения в минимизируемом (целевом) функционале выражения приводятся к безразмерному виду. В [3] на этой основе решена смешанная задача для акустики в случае жесткого штампа. Следуя [3] получено, что для выравнивания размерностей в (9) должно быть  $X = r_0 / \sqrt{2}$ .

Расчеты по (9) проводились с помощью открытого программного кода МГУ. Для этого СЛАУ (9) приводилась к эрмитову виду путем преобразования  $u_n = \phi_n \beta_n$ .

В случае дифракции на сегменте зеркала с узкой щелью Зоммерфельд получает приближенное решение и физически обосновывает его сходимость [2]. Аналогично, следуя [2], в случае штампа малых размеров (вибратора) в работе получено приближенное решение. Показано, что это есть не что иное как метод последовательных приближений. И тем самым, с учетом [2] получено на физическом уровне строгости доказательство сходимости метода последовательных приближений.

Это дало возможность устойчивого вычисления вибрационных волновых полей на телесейсмические расстояния. Созданная программа позволяет проводить расчеты даже на персональных компьютерах с распараллеливанием OpenMP. Приведены расчеты волновых полей для жесткого штампа.

## Литература

1. Бабешко В.А., Глушков В.Е., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука. 1989. 344с.
2. Зоммерфельд А. Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики. М.: ИЛ. 1950. 456 с.
3. Fatyanov A.G. Sommerfeld's method for solving the dynamic rigid stamp indentation problem. Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2025, 18(3), 300–308.

## Нелокальная краевая задача для уравнения смешанно-составного типа

© Федоров Валерий Евстафьевич

кандидат физико-математических наук,

доцент,

ведущий научный сотрудник

Научно-исследовательский институт Математики СВФУ

Россия, 677000, г. Якутск, ул. Кулаковского, д. 48

vefedorov58@mail.ru

**Ключевые слова:** краевая задача, разрешимость, оценка погрешности, неклассическое уравнение, смешанно-составной тип, нелокальное условие, регулярная разрешимость, метод регуляризации, метод Галеркина, априорные оценки

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания проект №FSRG-2023-0025

Пусть  $\Omega$  – ограниченная область в  $R^n$  с гладкой границей  $S$ ,  $Q_T = \Omega \times (0, T)$ ,  $S_T = S \times (0, T)$ ,  $\Omega_t = \Omega \times \{t\}$ ,  $0 \leq t \leq T$ ,  $T = \text{const} > 0$ .

**Краевая задача.** Найти в области  $Q$  решение уравнения

$$k(x, t)u_{tt} - \left(\alpha \frac{\partial}{\partial t} + \beta\right)\Delta u + a(x, t)u_t + c(x)u = f(x, t) \quad (1)$$

такое, что выполнены краевые условия

$$u|_{S_T} = 0, \quad u(x, 0) = \gamma u(x, T), \quad u_t|_{\Omega_0^+} = 0, \quad u_t|_{\Omega_T^-} = 0 \quad (2)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  – постоянные числа.

При определенных условиях на входные данные задачи методом Галеркина в сочетании с методом регуляризации доказана однозначная регулярная разрешимость краевой задачи (1), (2). Получена оценка погрешности ее приближенных решений относительно точного решения через параметр регуляризации и собственные значения спектральной задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Отметим, что различные краевые задачи для некоторых частных случаев уравнения (1) рассматривались в работах [1, 2, 3].

## Литература

1. Egorov I.E. Vragov's boundary value problem for an implicit equation of mixed type. Journal of Physics: Conference Series, **894** (2017), 012028.
2. Джамалов С. З. О корректности одной нелокальной краевой задачи с постоянным коэффициентом для многомерного уравнения смешанного типа второго порядка // Мат. заметки СВФУ, **24:4** (2017), 17-27.

3. Кожанов А. И., Дюжева А. В. Разрешимость нелокальной задачи с интегральными условиями для дифференциальных уравнений соболевского типа третьего порядка // Мат. заметки СВФУ, **27**:4 (2020), 30-42.

## Численное моделирование дробеструйной обработки с использованием бессеточного метода Галеркина

© Федоров Евгений Владимирович

магистрант

Челябинский государственный университет

Россия, 454001, Челябинск, ул. Бр.Кашириных, 129

fedorov.e.v@csu.ru

© Майер Александр Евгеньевич

доктор физико-математических наук,

ученое звание профессор,

заведующий кафедрой общей и теоретической физики

Челябинский государственный университет

Россия, 454001, Челябинск, ул. Бр.Кашириных, 129

mayer@csu.ru

**Ключевые слова:** дислокационная пластичность, дробеструйная обработка, бессеточный метод Галеркина.

### Благодарности

Исследование выполнено при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 075-00186-25-00 а также гранта Российского научного фонда № 24-19- 00684.

Идеальное описание процесса взаимодействия дробинки с поверхностью металла достигается через дислокационную модель пластичности, основанную на балансе плотностей мобильных ( $\rho_D^\delta$ ) и неподвижных ( $\rho_I^\delta$ ) дислокаций в каждой системе скольжения:

$$\frac{d\rho_D^\delta}{dt} = Q_D^\delta - Q_I^\delta - Q_A^\delta - Q_{AI}^\delta - \rho_D^\delta(\nabla \cdot \mathbf{v}),$$

где  $Q_D^\delta, Q_I^\delta$  — скорости генерации и иммобилизации дислокаций,  $Q_A^\delta, Q_{AI}^\delta$  — скорости аннигиляции. Пластическая деформация определяется законом Орована:

$$\dot{w} = \sum_{\delta} b M_{\delta} \rho_D^{\delta} V_D^{\delta},$$

а предел текучести  $Y_s$  зависит от плотности неподвижных дислокаций  $\rho_I$  по закону Тейлора:

$$Y_s = Y_{s0} + A_I G b \sqrt{\rho_I}.$$

Для численного решения задачи в трехмерной геометрии эффективны методы сглаженных частиц (МСЧ), однако более высокую точность вычисления производных обеспечивает бессеточный метод Галеркина (БМГ). Отличия в точности особенно значительны вблизи границы расчетной области. Реализация метода БМГ включает аппроксимацию через скользящие наименьшие квадраты и параллельные вычисления с использованием OpenMP, что позволяет ускорить расчеты для сложных контактных взаимодействий.

Разработка модели направлена на адаптацию дислокационного подхода для высокоскоростных ударных нагрузок, характерных для дробеструйной обработки. Предполагается, что использование дислокационной модели повысит точность описания пластической деформации и полей напряжений.

## Сильно непрерывные разрешающие семейства операторов для уравнений с производной Хилфера

© Федоров Владимир Евгеньевич

доктор физико-математических наук,

ученое звание профессор,

заведующий кафедрой математического анализа

Челябинский государственный университет

Россия, 454001, Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129

kar@csu.ru

© Плеханова Марина Васильевна

доктор физико-математических наук,

ученое звание доцент,

заведующий кафедрой вычислительной механики и информационных технологий

Челябинский государственный университет

Россия, 454001, Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129

mariner79@mail.ru

© Скорынин Антон Сергеевич

заведующий учебно-вычислительной лабораторией

Челябинский государственный университет

Россия, 454001, Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129

skorynin@csu.ru

**Ключевые слова:** дробное дифференциальное уравнение, дробная производная Хилфера, разрешающее семейство операторов, задача типа Коши.

### Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда и Правительства Челябинской области, проект № 24-11-20002, <https://rscf.ru/project/24-11-20002/>.

Пусть  $\mathcal{Z}$  — банахово пространство. Для  $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{Z}$  дробный интеграл Римана — Лиувилля порядка  $\beta > 0$  имеет вид

$$J^\beta h(t) := \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} h(s) ds, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

$J^0 h(t) := h(t)$ ,  $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$ ,  $D^m$  — производная  $m$ -го порядка,  $D^\alpha h(t) := D^m J^{m-\alpha} h(t)$  — дробная производная Римана — Лиувилля. При  $\alpha \leq 0$  будем использовать обозначение  $D^\alpha h(t) := J^{-\alpha} h(t)$ .

Обозначим  $D^\gamma h(0) := \lim_{t \rightarrow 0+} D^\gamma h(t)$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Производную Хилфера порядка  $\alpha \in (m-1, m]$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , и рода  $\beta \in [0, 1]$  определим как

$$D^{\alpha, \beta} h(t) = D^m \left( J^{m-\alpha} h(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)} h(0) t^{k+\beta(m-\alpha)}}{\Gamma(k+\beta(m-\alpha)+1)} \right).$$



Для достаточно гладкого  $h$  получим  $D^{\alpha,\beta}h(t) := J^{\beta(m-\alpha)}D^m J^{(1-\beta)(m-\alpha)}h(t)$ .

Рассмотрим задачу типа Коши

$$D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)}z(0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (1)$$

для линейного уравнения

$$D^{\alpha,\beta}z(t) = Az(t), \quad t > 0, \quad (2)$$

где  $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$ ,  $A$  — линейный замкнутый оператор с плотной в  $\mathcal{Z}$  областью определения. Решением задачи (1), (2) будем называть функцию  $z \in C(\mathbb{R}_+; D_A) \cap L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathcal{Z})$ , для которой  $J^{(1-\beta)(m-\alpha)}z \in C^{m-1}(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathcal{Z}) \cap AC^m(\mathbb{R}_+; \mathcal{Z})$ ,  $D^{\alpha,\beta}z \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{Z})$ , выполняются условия (1) и равенство (2) при  $t > 0$ . Здесь  $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ .

Пусть  $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{Z}$ ,  $\beta \in [0, 1]$ . Семейство операторов  $\{S(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t \in \mathbb{R}_+\}$  называется разрешающим для уравнения (2), если выполняются следующие условия:

- (i) существуют такие  $K \in \mathbb{R}_+$ ,  $\omega \in \overline{\mathbb{R}}_+$ , что  $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq Ke^{\omega t}t^{(1-\beta)(\alpha-m)}$  при всех  $t \in \mathbb{R}_+$ ;
- (ii) при любом  $z_0 \in \mathcal{Z}$   $S(t)z_0 \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{Z})$ ,  $s\text{-}\lim_{t \rightarrow 0+} J^{(1-\beta)(m-\alpha)}S(t) = I$ ;
- (iii)  $S(t)[D_A] \subset D_A$ ,  $S(t)Az_0 = AS(t)z_0$  для всех  $z_0 \in D_A$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ ;
- (iv) для любого  $z_0 \in D_A$  функция  $S(t)z_0$  является решением задачи типа Коши  $D^{(1-\beta)(\alpha-m)}z(0) = z_0$ ,  $D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)}z(0) = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, m-1$ , для уравнения (2).

**Теорема 1.** Пусть  $m-1 < \alpha \leq m \in \{1, 2\}$ ,  $\beta \in [0, 1]$ . Разрешающее семейство операторов уравнения (2) существует в том и только в том случае, когда при некотором  $\omega \geq 0$  линейный замкнутый оператор  $A$  удовлетворяет условиям:

- (i) если  $\text{Re} \lambda > \omega$ , то  $\lambda^\alpha \in \rho(A) := \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})\}$ ;
- (ii) существует такое  $K > 0$ , что для всех  $\mu \in \mathbb{C}$ , для которых  $\text{Re} \lambda > \omega$ , и для всех  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\left\| \frac{d^n}{d\lambda^n} (\lambda^{m-1-\beta(m-\alpha)}(\lambda^\alpha - A)^{-1}) \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K\Gamma((1-\beta)(\alpha-m) + n + 1)}{(\text{Re} \lambda - \omega)^{(1-\beta)(\alpha-m) + n + 1}}.$$

При этом операторы разрешающего семейства имеют вид

$$S(t) = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-nt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (n(n+\omega)t)^{k+1}}{k!(k+1)!} H_\beta^{(k)}(n+\omega),$$

где  $H_\beta(\lambda) := \lambda^{m-1-\beta(m-\alpha)}(\lambda^\alpha - A)^{-1}$ .

Таким образом, получено обобщение теоремы Хилле — Йосиды о порождении  $C_0$ -непрерывных полугрупп операторов на случай уравнений с производной Хилфера.

## Литература

1. Fedorov V. E., Du W.-S., Kostić M., Plekhanova M. V., Skorynin A. S. Criterion of the existence of a strongly continuous resolving family for a fractional differential equation with the Hilfer derivative // Fractal and Fractional. 2025. Vol. 9. AN. 81. DOI: 10.3390/fractalfract9020081.

## Задачи о равновесии нелинейно упругих тел с жесткими включениями и трещинами с условиями непроникания

© Фурцев Алексей Игоревич

кандидат физико-математических наук,

научный сотрудник

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН

Россия, 630090, г. Новосибирск, просп. Академика Лаврентьева, 15

furtsev@hydro.nsc.ru

**Ключевые слова:** гиперупругое тело, трещина, жесткое включение, условия контакта, условия непроникания, условия глобальной инъективности, вариационная задача.

Рассматриваются задачи равновесия, которые описывают деформируемые тела, содержащие жесткие включения различной природы: объемные и тонкие, дополнительно характеризующиеся наличием трещин между включениями и окружающей средой. Предполагается, что деформации тел могут быть большими и в связи с этим задачи формулируются в рамках модели нелинейной теории упругости (физически и геометрически нелинейной). При постановке задач применяются условия взаимного непроникания, которые предотвращают нежелательный эффект взаимного проникновения материи. Рассматриваются условия непроникания двух видов: во-первых, задаваемые на краю включений и среды невыпуклые ограничения на заранее неизвестные перемещения [1], а во-вторых – глобальные условия инъективности деформаций [2].

Для описанных тел исследуются задачи минимизации потенциальной энергии и доказывается, что задачи равновесия имеют вариационные решения. Также обсуждаются постановки сопутствующих краевых задач и устанавливается, что вариационные решения являются слабыми по отношению к краевым задачам.

## Литература

1. Фурцев А. И. Задача о равновесии гиперупругого тела с жестким включением и трещиной с условиями непроникания // Сибирские электронные математические известия. 2024. Т. 21. № 1. С. 17–40. DOI: 10.33048/semi.2024.21.002
2. Furtsev A., Rudoy E., Sazhenkov S. On hyperelastic solid with thin rigid inclusion and crack subjected to global injectivity condition // Philosophical Transactions of the Royal Society A. 2024. V. 382. Art. ID 20240115. DOI: 10.1098/rsta.2024.0115

## Четвертая краевая задача для нелинейного смешанного уравнения теплопроводности с учетом закона Аррениуса

© Ханхасаев Владислав Николаевич

кандидат физико-математических наук,

ученое звание доцент,

доцент кафедры Математики им. Ц.Б. Шойнжурова

Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления

Россия, 670033, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40В, стр. 1

доцент кафедры Фундаментальной математики

Бурятский государственный университет им. Д. Банзарова

Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а

hanhvladnick@mail.ru

© Муняев Сергей Иннокентьевич

соискатель кафедры Математики им. Ц.Б. Шойнжурова,

Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления

Россия, 670033, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40В, стр. 1

SergMoon1986@mail.ru

**Ключевые слова:** гиперболическое уравнение теплопроводности, нелинейные уравнения смешанного типа, четвертое краевое условие, тепловой баланс, уравнение Аррениуса.

Классическая теория теплопроводности или теория переноса (основанная на градиентных законах) справедлива, если характерная скорость физического процесса много меньше скорости распространения возмущений в среде. При кратковременных переходных процессах, например, при коротких замыканиях в высоковольтных электрических сетях, при явной нестационарности классические параболические модели теплопроводности, основанные на обычной теории Фурье, создают грубые искажения температурных полей. Следовательно, для высокоинтенсивных коммутационных процессов классическая теория переноса становится недействительной и для описания таких систем следует использовать локально неравновесные методы.

Некоторые из этих методов: в теории газовой динамики - Дж. Максвелл [1], тепло-массопереноса - А. В. Лыков [2], теплопроводности - К. Каттанео [3] и П. Вернотт [4] - из молекулярно-кинетических представлений, используя гипотезу о конечности времени соударения молекул и понятие длины их свободного пробега, получили новый обобщенный закон тепло-массопереноса, включающий дополнительный элемент, так называемое время релаксации, т. е. время установления термодинамического равновесия между потоком и градиентом потенциала. В этом случае выводится гиперболическое уравнение тепло-массопереноса [1] - [5].

Продолжая исследования Ханхасаева В.Н. [6], в работе рассматривается нелинейное уравнение смешанного типа в частных производных второго порядка:

$$\begin{aligned} k(x, t) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + a(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] + q_{ch} k_{ch} \rho \exp \left[ -\frac{E}{Ru(x, t)} \right] + f(x, t), \end{aligned} \quad (1)$$

в области  $G = [0, L] \times [-T_1, T_2]$ . Здесь, при  $t \leq 0$   $k(x, t) = 0$ , а для  $t > 0$   $k(x, t) > 0$ ,  $k(x, t)$  - коэффициент тепловой релаксации,  $a = c_v \rho$  - произведение коэффициента удельной теплоемкости при постоянном объеме на коэффициент удельной плотности,  $\lambda(x, t)$  - переменный коэффициент теплопроводности,  $f(x, t)$  - внутренний источник тепла,  $q_{ch}$  - тепловой эффект химической реакции,  $k_{ch}$  - предэкспонент химической реакции,  $E$  - энергия активации химической реакции,  $R = 8,31 \cdot J/mol \cdot K$  - универсальная газовая постоянная.

Начально-краевая задача: определить решение уравнения (1) при выполнении следующих краевых условий четвертого рода и начального условия  $t = -T_1$ :

$$\left[ \mp \lambda(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \alpha_{0,L} u(x, t) + \epsilon_{0,L} \sigma u^4(x, t) \right]_{x=0,L} = q_{0,L}(t) + \epsilon_{0,L} \sigma q_{0,L}^4(t), \quad (2)$$

$$u(x, -T_1) = u_0(x), \quad (3)$$

где  $\alpha_{0,L}$  and  $q_{0,L}$  - коэффициенты теплоотдачи и плотности теплового потока поверхностных источников на левом и правом концах стержня,  $\epsilon_{0,L}$  - приведенная степень черноты,  $\sigma = 5,669 \cdot 10^{-8} \cdot W/m^2 \cdot K^2$  - постоянная Стефана-Больцмана.

Проведены численные расчеты по алгоритмам, подобным прошлым результатам [7], хорошо согласующиеся с имеющимися экспериментальными данными.

## Литература

1. Maxwell J. C. On the dynamical theory of gases // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 1867. Vol. 157. P. 49. URL: <https://doi.org/10.1098/rstl.1867.0004>
2. Лыков А. В. Теория теплопроводности. Москва: Высш. школа, 1967. 599 с.
3. Cattaneo C. A form of heat conduction equation which eliminates the paradox of instantaneous propagation // Comptes Rendus. 1958. Vol. 247(4). P. 431 – 433.
4. Vernotte P. Les paradoxes de la theorie continue de l'equation de la chaleur // Comptes Rendus. 1958. Vol. 254(22). P. 3154 – 3155.
5. Соболев С. Л. Локально-неравновесные модели процессов переноса // Успехи физических наук. 1997. № 10. С. 1095 – 1106. URL: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0167.199710f.1095>.
6. Ханхасаев В.Н., Муняев С.И. Численное решение третьей краевой задачи для нелинейного смешанного уравнения теплопроводности // Вестник Бурятского государственного университета: Математика, информатика. 2023. № 4. С. 14 – 21.
7. Ханхасаев В.Н., Муняев С.И. Программа расчета нелинейного смешанного уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности и третьими краевыми условиями // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. 2024. № 2024664963.

## Смешанная начально-краевая задача для трехмерного по пространству нелинейного гиперболо-параболического уравнения

© Ханхасаев Владислав Николаевич

кандидат физико-математических наук,

ученое звание доцент,

доцент кафедры Математики им. Ц.Б. Шойнжурова

Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления,

Россия, Улан-Удэ, 670033 ул. Ключевская, д. 40В, стр. 1

доцент кафедры Фундаментальной Математики

Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова,

Россия, Улан-Удэ, 670000, ул. Смолина, д. 24а

hanhvladnick@mail.ru.

© Баиров Сафрон Анатольевич

соискатель кафедры Математики им. Ц.Б. Шойнжурова,

Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления,

Россия, Улан-Удэ, 670033 ул. Ключевская, д. 40В, стр. 1

bairov.sofron@gmail.com.

**Ключевые слова:** гиперболическое уравнение теплопроводности, нелинейные смешанные уравнения, смешанные краевые условия, тепловой баланс, локально - одномерный метод.

Известно, что гиперболическое уравнение теплопроводности включает в себя как диффузионный, так и волновой характеры, что позволяет учесть скорость тепловой волны. Этот подход позволяет учесть явление теплопроводности более точно и обойти парадокс бесконечной скорости тепла, который возникает при использовании классического уравнения теплопроводности.

В работе рассматривается математическая модель гиперболо-параболического уравнения с нелинейным коэффициентом теплопроводности и со смешанными краевыми условиями для трехмерного тела, неограниченного по переменной  $z$ , которая входит в уравнение как параметр.

Заданы теплофизические характеристики:  $c_v, \lambda, \rho, \alpha_d$  и  $\alpha_u$  -соответственно, удельная теплоемкость при постоянном объеме, коэффициент теплопроводности, удельная плотность и коэффициенты теплопередачи в законе Ньютона снизу и сверху пластины. Тогда уравнение, краевые условия и начальное условие запишутся в виде:

$$k(x, y, z, t)u_{tt} + c_v(x, y, z, t) \cdot \rho(x, y, z, t)u_t = \\ = (\lambda(u, x, y, z, t)u_x)_x + (\lambda(u, x, y, z, t)u_y)_y + c(x, y, z, t)u + f(x, y, z, t),$$

$$x = 0 : u(0, y, z, t) = u_l(y, z, t), \quad x = X : u(X, y, z, t) = u_r(y, z, t),$$

$$y = 0 : -\lambda(u, x, 0, z, t) \frac{\partial u(x, 0, z, t)}{\partial y} + \alpha_d u(x, 0, z, t) = u_d(x, z, t),$$

$$y = Y : \lambda(u, x, Y, z, t) \frac{\partial u(x, Y, z, t)}{\partial x} + \alpha_u u(x, Y, z, t) = u_u(x, z, t),$$

$$u(x, y, z, t)|_{t=T_1} = u_0(x, y, z).$$

Корректно поставленная смешанная начально-краевая задача численно решена в пакете Mathcad-15 по неявной конечно-разностной схеме с использованием интегро-интерполяционного и локально-одномерного методов [1]. Более ранние результаты приводятся в виде графиков и анимаций в работах [2, 3, 4, 5], для которых получены свидетельства на государственную регистрацию программ [6, 7].

## Литература

1. Формалев, В. Ф., Ревизников Д. Л. Численные методы. М.: 2006. – 400 с. ISBN 978-5-9221-0737-2. – EDN MVANSP.
2. Ханхасаев В. Н., Баиров С. А. Решение нелинейного по коэффициенту теплопроводности смешанного уравнения интегро-интерполяционным методом с третьим краевым условием // Материалы VIII Международной конференции «Математика, ее приложения и математическое образование (МПМО23)», Улан-Удэ: ВСГУТУ, 2023. – С. 224-227. – DOI 10.53980/9785907599970-224.
3. Ханхасаев, В. Н., Баиров С.А. Моделирование распределения температуры при нагреве пластины с применением смешанного уравнения теплопроводности // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. – 2024. – № 1. – С. 37-45. – DOI 10.18101/2304-5728-2024-1-37-45. – EDN IECYEU.
4. Khankhasaev, V. N., Bairov S. A. The numerical solution of the nonlinear hyperbolic-parabolic heat equation // Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science. – 2024. – Vol. 32, No. 1. – P. 112-121. – DOI 10.22363/2658-4670-2024-32-1-112-121. – EDN BSGQHY.
5. Ханхасаев, В. Н., Баиров С.А. Математическая модель нелинейного по коэффициенту теплопроводности гипербола-параболического уравнения для ограниченных пластин // Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения : материалы 6-й Международной конференции, Иркутск, 16–20 сентября 2024 года. – Иркутск: Иркутский государственный университет, 2024. – С. 79-81. – EDN BVUXMY.
6. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024664790 Российская Федерация. Программа численного решения второй краевой задачи для гипербола-параболического уравнения теплопроводности для неограниченной пластины : № 2024663079 : заявл. 10.06.2024 : опубл. 25.06.2024 / В. Н. Ханхасаев, С. А. Баиров ; заявитель ВСГУТУ. – EDN MQOKCR.
7. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024666311 Российская Федерация. Программа численного решения третьей краевой задачи для гипербола-параболического уравнения для неограниченной пластины с нелинейным коэффициентом теплопроводности : № 2024665453 : заявл. 05.07.2024 : опубл. 11.07.2024 / В. Н. Ханхасаев, С. А. Баиров ; заявитель ВСГУТУ. – EDN OPSIRF.

## Осесимметрический случай для парабола-гиперболического уравнения теплопроводности

© Ханхасаев Владислав Николаевич

кандидат физико-математических наук,

ученое звание доцент,

доцент кафедры Математики им. Ц.Б. Шойнжурова,

Восточный-Сибирский государственный университет технологий и управления

Россия, 670033, Улан-Удэ, ул. Ключевская, д. 40В, стр. 1,

доцент кафедры Фундаментальная математика

Бурятский государственный университет

Россия, Улан-Удэ, 670000, ул. Смолина, д. 26

hanhvladnick@mail.ru

© Пластинина Валентина Михайловна

старший преподаватель

Восточный-Сибирский государственный университет технологий и управления

Россия, 670033, Улан-Удэ, ул. Ключевская, д. 40В, стр. 1

plastininav@yandex.ru

**Ключевые слова:** гиперболическое уравнение теплопроводности, вырождающиеся уравнения смешанного типа, локально-одномерный метод, краевые условия первого рода.

Исследуется вычислительная модель решения первой краевой задачи для парабола-гиперболического уравнения в двумерном пространственном случае по неявной разностной схеме. Математическая модель для осесимметрического случая и соответствующие ей конечно-разностные схемы разработаны для исследования высокоинтенсивных тепловых процессов при движении газов в трубах. Созданные по методу локально-одномерных схем алгоритмы реализованы в среде программирования MathCad-15 в цилиндрической области по пространственным переменным с учетом бокового теплоотвода и внутреннего источника тепла.

В работах [1-6] мы исследовали математическую модель парабола-гиперболического уравнения с постоянным коэффициентом теплопроводности:

$$b(x, y, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a(x, y, t) \frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + c(x, y, t)u + f(x, y, t), \quad (1)$$

в области  $G = [0, X] \times [0, Y] \times [-T, T]$ ,  $T > 0$ . При этом,  $b(x, y, t) = 0$  при  $t \leq 0$ ;  $b(x, y, t) > 0$  при  $t > 0$ ;  $a(x, y, t) > 0$  для всех  $(x, y, t)$  из области  $G$ , т.е. при  $t \leq 0$  – уравнение (1) – параболическое, а при  $t > 0$  – гиперболическое.

Для определения температурного поля в телах цилиндрической формы переходим к цилиндрическим координатам  $r, \varphi, z$  по формулам:  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z$ .

Рассматриваем прямой цилиндр радиуса  $r$ , высотой  $h$  (ось цилиндра) и полярным углом  $\varphi$ . В осесимметрическом случае уравнение (1) с переменным коэффициентом теплопроводности запишем в виде:

$$b(r, z, \tau) \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} + a(r, z, \tau) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda(r, z, \tau) \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda(r, z, \tau) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + c(r, z, \tau) \theta + f(r, z, \tau), \quad (2)$$

где  $M_1 \leq \lambda(r, z, \tau) \leq M_2, 0 \leq r \leq R$ ,  $R$  – радиус цилиндра. При  $r = 0$  уравнение (2) имеет особенность, то есть параболо-гиперболическое уравнение (2) вырождается и для него ставится первая начально-краевая задача.

## Литература

1. Ханхасаев В. Н., Пластинина В. М. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ RU 2024663689, 10.06.2024. Программа решения первой краевой задачи для параболо-гиперболического уравнения теплопроводности в двухмерном пространственном случае.
2. Ханхасаев В. Н., Пластинина В. М. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ RU 2024667486, 25.07.2024. Численное решение первой краевой задачи для параболо-гиперболического уравнения по неявной схеме в двухмерном пространственном случае.
3. Ханхасаев В. Н., Пластинина В. М. Двухмерный пространственный случай первой краевой задачи для смешанного оператора теплопроводности. // Математика, ее приложения и математическое образование (МПМО23): Материалы VIII Международной конференции. – Улан-Удэ: ВСГУТУ, 2023. – С. 241-244. DOI - 10.53980/9785907599970-241.
4. Ханхасаев В. Н., Пластинина В. М. Математическая модель первой краевой задачи для двухмерного смешанного уравнения теплопроводности. // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. – 2024. – № 3. – С. 71-77. DOI - 10.18101/2304-5728-2024-3-71-78.
5. Пластинина В. М. Вычислительная модель для двухмерного параболо-гиперболического уравнения теплопроводности по неявной схеме. // Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения: материалы 6-й Международной конференции. – Иркутск: ИГУ, 2024. – С. 67-69. DOI - <https://doi.org/10.26516/978-5-9624-2309-8.2024.1-224>
6. Ханхасаев В. Н., Пластинина В. М. Первая краевая задача для некоторых смешанных уравнений теплопроводности второго и четвертого порядков. // Материалы 6 Международной конференции «Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения» (DYSC 2024). Иркутск, 16–20 сентября 2024 г. Часть 4, Итоги науки и техн. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., 241, ВИНТИ, М., 2025, 83–89. DOI - <https://doi.org/10.36535/2782-4438-2025-241-83-89>.



# Асимптотика решений в задаче о слабо искривленных включениях в упругом теле

© Хлуднев Александр Михайлович

доктор физико-математических наук,

ученое звание профессор,

главный научный сотрудник

Институт гидродинамики СО РАН

Новосибирский государственный университет

Россия, 630090, Новосибирск, пр. Лаврентьева, 15

khlud@hydro.nsc.ru

**Ключевые слова:** упругое тело, тонкое включение, трещина, нелинейные краевые условия, асимптотика решений.

Рассматривается задача о равновесии двумерного упругого тела, содержащего тонкое слабо искривленное включение. Предполагается, что тонкое включение отслаивается от окружающего упругого тела, образуя тем самым трещину (разрез). На берегах трещины заданы нелинейные краевые условия, обеспечивающие взаимное непроникание между противоположными берегами. Постановка задачи состоит в

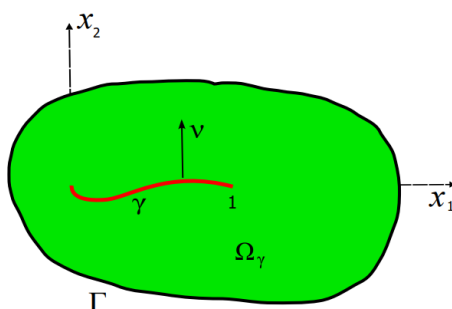


Рис. 3: Геометрия задачи

следующем [1, 2]. Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  – ограниченная область с гладкой границей  $\Gamma$ ,  $\gamma \subset \Omega$ ,  $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \bar{\gamma}$ , где  $\gamma = \{(x_1, x_2) \mid x_2 = \xi(x_1), x_1 \in (0, 1)\}$ , а  $\xi$  – заданная гладкая функция;  $k$  – кривизна кривой  $\gamma$ . Требуется найти функции  $u = (u_1, u_2)$ ,  $v, w$ , заданные в  $\Omega_\gamma$  и на  $(0, 1)$  соответственно, такие что

$$-\operatorname{div} \sigma = f; \sigma = B\varepsilon(u) \text{ в } \Omega_\gamma, \quad (1)$$

$$\alpha v_{,1111} + \beta k(w_{,1} + kv) = [\sigma_\nu]p \quad \text{при } x_1 \in (0, 1), \quad (2)$$

$$-\beta w_{,11} - \beta(kv)_{,1} = [\sigma_\tau]p \quad \text{при } x_1 \in (0, 1), \quad (3)$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (4)$$

$$v_{,11} = v_{,111} = w_{,1} + kv = 0 \quad \text{при } x_1 = 0, 1, \quad (5)$$

$$v = u_\nu^-, w = u_\tau^-; [u_\nu] \geq 0 \quad \text{на } \gamma, \quad (6)$$

$$\sigma_\nu^+ \leq 0, \sigma_\tau^+ = 0, \sigma_\nu^+[u_\nu] = 0 \quad \text{на } \gamma. \quad (7)$$

Здесь  $\alpha, \beta$  – положительные параметры, характеризующие свойства материала включения;  $[h] = h^+ - h^-$  – скачок функции  $h$  на  $\gamma$ , где  $h^\pm$  – значения функции  $h$  на положительном и отрицательном берегах разреза в соответствии с выбранным направлением нормали  $\nu$ ;  $\varepsilon(u) = \{\varepsilon_{ij}(u)\}$  – тензор деформаций,  $\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ ,  $i, j = 1, 2$ ;  $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$ ,  $\sigma_\nu = \sigma_{ij}\nu_j\nu_i$ ,  $\sigma_\tau = \sigma_{ij}\nu_j\tau_i$ ,  $u_\nu = u\nu$ ,  $u_\tau = u\tau$ ,  $p = \sqrt{1 + \xi_{,1}^2}$ .

Исследована асимптотика решений задачи (1)-(7) при стремлении  $\alpha, \beta$  к нулю и к бесконечности.

## Литература

1. Хлуднев А. М. Асимптотика анизотропных слабо искривленных включений в упругом теле// Сиб. ж. индустр. математики. 2017. № 1. С. 93–104. DOI: 10.17377/sibjim.2017.20.110.
2. Хлуднев А. М., Попова Т.С. О задаче сопряжения двух слабо искривленных включений в упругом теле// Сиб. мат. журнал. 2020. № 4. С. 932-945. DOI: 10.33048/smzh.2020.61.414.

# Оценка снизу нормы функционала погрешности кубатурных формул общего вида в пространстве Соболева $L_p^m(E^n)$

© **Цыренжапов Нима Булатович**

кандидат физико-математических наук,

ученое звание доцент,

доцент кафедры «Фундаментальная математика»

Бурятского государственного университета имени Доржи Банзарова

67000, Россия, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а,

nimac@mail.ru

© **Урбаханов Александр Валерьевич**

кандидат физико-математических наук,

ученое звание доцент,

доцент кафедры «Фундаментальная математика»

Бурятского государственного университета имени Доржи Банзарова

67000, Россия, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а,

urbahanov@mail.ru

**Ключевые слова:** кубатурная формула с участием производных, функционал погрешности, норма, оценка, оптимальность.

Пусть  $\Omega$  — ограниченная область в  $E^n$  с кусочно гладкой границей  $\Gamma = \Gamma(\Omega)$ ,

$$\Omega'_h = \{x \in \Omega \mid \rho(x, E^n \setminus \Omega) > Lh\},$$

$$\Omega''_h = \{x \in \Omega \mid \rho(x, \Gamma(\Omega)) < Lh\},$$

$$\Omega_h = \Omega \setminus \Omega'_h.$$

Пусть  $\omega\left(\frac{x}{h}\right)$  — функция "шапочка",

$$\psi_h(x) = h^{-1} \int_{\Omega'_{2h}} \omega\left(\frac{x-y}{h}\right) dy$$

— средняя функция для области  $\Omega'_{2h}$ , и

$$\phi_h(x) = \psi_h(x) \cdot \psi_0\left(\frac{x}{h}\right)$$

— срезающая функция.

Функция  $\psi_0\left(\frac{x}{h}\right)$  определяется как

$$\psi_0\left(\frac{x}{h}\right) = \phi_0(0) - \phi_0\left(\frac{x}{h}\right),$$

где

$$\phi_0\left(\frac{x}{h}\right) = h^{mp'} \sum_{\beta \neq 0} \frac{m!}{k!} \cdot \frac{e^{2\pi i h^{-1} \beta x}}{\|2\pi \beta\|^{2m}} \cdot C_\beta,$$

а коэффициенты  $C_\beta$  задаются формулой

$$C_\beta = \int_{\Delta} \left| \sum_{|\alpha| \leq |S|} (-1)^{|\alpha|} C_0^\alpha D^k B_{m,\alpha}(y) + C_k^\circ \right|^{\frac{1}{p-1}} \cdot \operatorname{sgn} \left[ \sum_{|\alpha| \leq |S|} (-1)^{|\alpha|} C_0^\alpha D^k B_{m,\alpha}(y) + C_k^\circ \right] D^k e^{-2\pi i \beta y} dy,$$

что соответствует экстремальной функции оптимального периодического функционала [1].

Рассмотрим периодический функционал

$$\tilde{l}_0 \left( \frac{x}{h} \right) = 1 - \sum_{\beta \neq 0} \sum_{|\alpha| \leq |S|} (-1)^{|\alpha|} h^{n+|\alpha|} C_0^\alpha D^\alpha \delta(x - h\beta).$$

Известно, что  $\phi_0(0) \geq \phi_0 \left( \frac{x}{h} \right)$ , и функция  $\psi_0 \left( \frac{x}{h} \right)$  обладает следующими свойствами [2]:

1. Периодичность:

$$\psi_0 \left( \frac{x}{h} \right) = \psi_0 \left( \frac{x}{h} - \beta \right), \quad \forall \beta \in \mathbb{R}.$$

2. Значения в узлах и неотрицательность:

$$\psi_0(h\beta) = 0, \quad \text{и} \quad \psi_0 \left( \frac{x}{h} \right) \geq 0.$$

3. Интеграл по ячейке:

$$\int_{\Delta_h} \psi_0 \left( \frac{x}{h} \right) dx = h^{n+m} \int_{\Delta} \sum_{|\alpha|=m} \sum_{\beta \neq 0} \frac{m!}{k!} \left| C_\beta \frac{e^{-2\pi i \beta x}}{(2\pi \beta)^{2m}} + C_k^\circ \right|^{p'} dy.$$

4. Эквивалентность норм в однородном пространстве Соболева:

$$\left\| \psi_0 \left( \frac{x}{h} \right) \right\|_{\widehat{L}_p^m(\Delta_h)} = \left\| \phi_0 \left( \frac{x}{h} \right) \right\|_{\widehat{L}_p^m(\Delta_h)}.$$

**Теорема 1.** Пусть область  $\Omega$  имеет кусочно-гладкую границу  $\Gamma(\Omega)$ . Тогда для любого функционала погрешности кубатурных формул общего вида с узлами на решётке с шагом  $h$

$$l_\Omega(x) = \varepsilon_\Omega(x) - \sum_{\beta \in \Delta} \sum_{|\alpha| \leq s} (-1)^{|\alpha|} h^{n+|\alpha|} C_\beta^\alpha D^\alpha \delta(x - h\beta) \quad (1)$$

при  $h \rightarrow 0$  имеет место следующая оценка снизу:

$$\|l_\Omega(x)\|_{L_p^{m*}(\Omega)} \geq (\operatorname{mes} \Omega)^{\frac{p-1}{p}} \left[ \int_{\Delta} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \left| \sum_{|\alpha| \leq |S|} (-1)^{|\alpha|} C_0^\alpha D^\alpha B_{m,\alpha}(x) + C_k^\circ \right|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}} h^m (1 + O(h)). \quad (2)$$

**Теорема 2.** При  $m$  — нечётном, функционал  $l_\Omega(x)$  с регулярным пограничным слоем асимптотически оптимален в пространстве Соболева  $L_p^m(E^n)$ :

$$\|l_\Omega(x)\|_{L_p^{m*}(\Omega)} = (\operatorname{mes} \Omega)^{\frac{p-1}{p}} \left[ \int_{\Delta} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \left| \sum_{|\alpha| \leq |S|} (-1)^{|\alpha|} C_0^\alpha D^\alpha B_{m,\alpha}(x) + C_k^\circ \right|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}} h^m (1 + O(h)). \quad (3)$$

## Литература

1. Цыренжапов Н.Б., Урбаханов А.В. Общий вид финитных функционалов погрешности эрмитовых кубатурных формул в пространстве Соболева  $L_p^m(E^n)$  // Вестник БГУ. Математика, информатика. — 2017. — № 4. — С. 33–41.
2. Шойнжуров Ц.Б. Оценка функционалов погрешности кубатурной формулы в пространстве с нормой, зависящей от младших производных: Дис. ... канд. физ.-мат. наук (01.01.07) / Ин-т математики СО АН СССР. — Новосибирск, 1967. — 83 с.

## Обратные задачи для квазилинейной модели сложного теплообмена

© Чеботарев Александр Юрьевич

доктор физико-математических наук,

ученое звание профессор,

профессор департамента математического и компьютерного моделирования

Дальневосточный федеральный университет

Россия, 690922, г. Владивосток, о. Русский, п. Аякс, 10

chebotarev.ayu@dvfu.ru

**Ключевые слова:** квазилинейные уравнения радиационного теплообмена, обратные задачи, нелокальная разрешимость, условия единственности решения, численное моделирование.

**Благодарности**

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (соглашение № 075-02-2025-1638/1 от 10.03.2025).

Процесс сложного теплообмена с учетом внутреннего теплового излучения в ограниченной области  $\Omega \subset \mathbf{R}^3$  моделируется следующей начально-краевой задачей для параболично-эллиптической системы нелинейных уравнений [1]:

$$\sigma \partial \theta / \partial t - \operatorname{div}(k(\theta) \nabla \theta) + b(\theta^3 |\theta| - \varphi) = \sum_{j=1}^m q_j(t) f_j(x), \quad (1)$$

$$-\operatorname{div}(\alpha \nabla \varphi) + \beta(\varphi - \theta^3 |\theta|) = g_s, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T, \quad (2)$$

$$k(\theta) \partial_n \theta + c(\theta - \theta_b)|_{\Gamma} = 0, \quad \alpha \partial_n \varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_{\Gamma} = 0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0. \quad (3)$$

Здесь  $\theta$  – нормализованная температура,  $\varphi$  – нормализованная интенсивность излучения, усредненная по всем направлениям. Положительные физические параметры  $\sigma$ ,  $b$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $c$  и  $\gamma$ , описывающие свойства среды, определяются стандартным образом [1],  $k(\theta)$  – коэффициент теплопроводности, зависящий от температуры. Функции  $q_j$  моделируют интенсивности источников тепла, локализацию которых задают функции  $f_j$ . Нелокальные результаты о существовании и единственности решения задачи (3)-(3) представлены в [2].

Обратная задача состоит в нахождении интенсивностей  $q_j = q_j(t)$  и соответствующего решения  $\theta, \varphi$  системы (3)–(3) по дополнительному интегральному переопределению:

$$\int_{\Omega} f_k(x) \theta(x, t) dx = r_k(t), \quad 0 < t < T, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (4)$$

Ближкие постановки обратных задач для диффузионных моделей радиационного теплообмена рассмотрены в [3]–[6].

Представлен метод сведения задачи (3)-(4) к решению задачи Коши для уравнения с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Доказана нелокальная разрешимость обратной задачи без ограничений малости параметров модели. При условии ограниченности температурных градиентов показана единственность решения. Предложена схема численного решения обратной задачи, эффективность которой проиллюстрирована на тестовых примерах.

## Литература

1. Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., Hoffmann K.-H. The unique solvability of a complex 3D heat transfer problem // J. Math. Anal. Appl. 2014. Vol. 409, issue 2. P. 808–815. DOI: 10.1016/j.jmaa.2013.07.054.
2. Чеботарев А.Ю., Пак Н.М., Ковтанюк А.Е. Анализ и численное моделирование начально-краевой задачи для квазилинейных уравнений сложного теплообмена // Сибирский журнал индустриальной математики. 2023. Т.26, № 4. С. 180-193. DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.412.
3. Chebotarev A.Yu., Pinnau R. An inverse problem for a quasi-static approximate model of radiative heat transfer // J. Math. Anal. Appl. 2019. Vol. 472. P. 314–327. DOI: 10.1016/j.jmaa.2018.11.026.
4. Chebotarev A.Yu., Pinnau R. An inverse problem for a quasi-static approximate model of radiative heat transfer // J. Math. Anal. Appl. 2019. Vol. 472. P. 314–327. DOI: 10.1016/j.jmaa.2018.11.026.
5. Chebotarev A.Yu. Inverse Problem for Equations of Complex Heat Transfer with Fresnel Matching Conditions // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2021, Vol. 61, No. 2. P. 288–296. DOI: 10.1134/S0965542522030058.
6. Чеботарев А.Ю. Обратная задача для квазистационарных уравнений сложного теплообмена с френелевскими условиями сопряжения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2024. Т. 64, № 10. С. 1881-1889. DOI: 10.31857/S0044466924100088.

**Инвариантные подмодели обобщенной модели  
Хохлова-Заболоцкой-Кузнецова нелинейной гидроакустики в  
кубически-нелинейной среде при отсутствии диссипации, описывающей  
затухание ультразвуковых пучков**

© Чиркунов М. Ю.

ФГБОУ ВО «НГАСУ (Сибстрин)», НГАСУ (Сибстрин)

Россия, 630008, Новосибирск, ул. Ленинградская, 113

mihail0807@mail.ru

Модель Хохлова-Заболоцкой-Кузнецова и ее обобщения представляют большой интерес для исследователей в связи с их многочисленными приложениями. Прежде всего, это касается разработки параметрических гидроакустических антенн, а также создания медицинских приборов для ультразвуковой диагностики и неинвазивных операций.

Трехмерная обобщенная модель Хохлова-Заболоцкой-Кузнецова нелинейной гидроакустики в кубически-нелинейной среде при отсутствии диссипации, описывающая затухание ультразвуковых пучков после формирования ударных фронтов, задается нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка. Это уравнение допускает десятипараметрическую группу Ли преобразований. В настоящей работе получены и исследованы четыре нестационарные подмодели этой модели, имеющие физический смысл и инвариантные относительно четырехпараметрических подгрупп основной группы указанного дифференциального уравнения. Эти подмодели задаются инвариантными решениями ранга 1 исходного уравнения. Полученные решения существенно различны, т. е. не связаны друг с другом точечными преобразованиями. Это следует из того, что алгебры Ли подгрупп, относительно которых эти решения инвариантны, не изоморфны.

Среди этих четырех подмоделей две подмодели описывают осесимметричные ультразвуковые пучки, другие две описывают одномерные ультразвуковые пучки. Поиск инвариантных решений, определяющих эти четыре подмодели, приведен к решению нелинейных интегральных уравнений, неявные решения которых получены в виде нелинейных алгебраических уравнений, содержащих трансцендентные функции. Эти четыре подмодели использовались для исследования распространения ультразвуковых пучков, для которых заданы либо акустическое давление и скорость его изменения, либо акустическое давление и его градиент в начальный момент времени в фиксированной точке.

Получены условия, обеспечивающие существование и единственность решений краевых задач, описывающих эти процессы. Это позволяет корректно проводить численные расчеты при исследовании этих процессов. В результате численного решения этих краевых задач для некоторых значений параметров, характеризующих эти процессы, получены графики распределения давления. Во всех случаях ультразвуковые пучки монотонно ослабевают со временем и полностью затухают за конечное время. В каждой точке получено время полного затухания ультразвукового пучка.



Каждое полученное решение использовалось при исследовании только одной краевой задачи. Однако зависимость каждого решения от двух произвольных постоянных позволяет применять это решение при исследовании других краевых задач, имеющих физический смысл. Еще больше возможностей появляется после применения формул для получения новых решений, следующих из симметричных свойств исходного уравнения.

**Инвариантные подмодели обобщенной осесимметричной модели движения жидкостей, газов и их смесей в пористой среде при наличии нестационарного внешнего воздействия**

© Чиркунов Ю. А.

д.ф.-м.н., доцент

ФГБОУ ВО «НГАСУ (Сибстрин)», НГАСУ (Сибстрин)

Россия, 630008, Новосибирск, ул. Ленинградская, 113

chr101@mail.ru

© Чиркунов М. Ю.

ФГБОУ ВО «НГАСУ (Сибстрин)», НГАСУ (Сибстрин)

Россия, 630008, Новосибирск, ул. Ленинградская, 113

mihail0807@mail.ru

Существует ряд физических приложений, в которых модель пористой среды используется естественным образом. Прежде всего, эта модель используется для описания процессов, связанных с подземным течением жидкости или газа, с фильтрацией воды, с инженерными изысканиями при строительстве зданий, а также с добычей сланцевой нефти и газа. Изучение движения жидкости и газа в пористой среде в рамках классических моделей не всегда адекватно описывает реальные процессы. Это связано с тем, что эти модели не учитывают наличие нестационарного источника или поглощения. Для более адекватного описания реальных процессов необходимо получить и изучить новые более сложные трехмерные модели с нестационарным источником или поглощением.

Мы изучили обобщенную осесимметричную модель движения жидкостей, газов и их смесей в пористой среде при наличии нестационарного внешнего воздействия. Найдено пять базовых моделей, обладающих различными свойствами симметрии.

Для модели, допускающей самую широкую группу Ли преобразований, найдены все инвариантные подмодели. Некоторые решения ранга 1 получены в явном виде. Для этих решений при некоторых конкретных значениях входящих в них параметров построены графики распределения давления. Для остальных решений ранга 1 изучаются физически содержательные краевые задачи, для которых в начальный момент времени в фиксированной точке задаются давление и либо скорость его изменения вдоль оси симметрии, либо радиальная скорость его изменения. Эти краевые задачи были решены численно для некоторых конкретных значений входящих в них параметров. Получены графики функций, определяющих эти решения.

Значимость найденных решений заключается в следующем:

1. Они описывают конкретные физические процессы.
2. Эти решения могут быть использованы в качестве тестов в численных расчетах при изучении движения жидкости или газа в пористой среде при наличии нестационарного внешнего воздействия.

3. Полученные в работе решения зависят от 16 произвольных параметров , и одной произвольной функции , которые определяются эмпирическим путем в зависимости от изучаемого физического процесса. Это позволяет использовать подмодели, определяемые этими решениями, для исследования других физически содержательных краевых задач, отличных от рассмотренных в данной работе.
4. Эти решения позволяют оценить степень адекватности полученных подмоделей реальным физическим процессам, проведя соответствующие этим решениям эксперименты и оценив полученные отклонения.

## О моделировании экзотермической реакции в пористом сотовом катализаторе

© Чумакова Наталия Алексеевна

кандидат технических наук,

старший научный сотрудник

Институт катализа им. Г. К. Борескова СО РАН

Россия, 630090, Новосибирск, пр. Акад. Лаврентьева, 5

Новосибирский государственный университет

Россия, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2

chum@catalysis.ru

© Кленов Олег Павлович

кандидат технических наук,

старший научный сотрудник

Институт катализа им. Г. К. Борескова СО РАН

Россия, 630090, Новосибирск, пр. Акад. Лаврентьева, 5

klen@catalysis.ru

**Ключевые слова:** математическое моделирование; сотовый катализатор; пористая структура; поток газа; экзотермическая реакция; форма канала; вычислительная гидродинамика; сложная расчетная область; краевая задача; точность аппроксимации.

**Благодарности** Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания Института катализа им. Г. К. Борескова СО РАН (проект FWUR-2024-0037).

Структурированные каталитические системы перспективны для многих приложений. Для целей проектирования необходима информация о взаимодействии явлений переноса и протекания реакции. Упрощенные модели не показывают всех особенностей аэродинамических процессов, особенно в условиях гетерогенного катализа, в то время как подходы вычислительной гидродинамики и CFD-моделирование позволяют выполнить детальный анализ процесса [1].

Настоящее исследование продолжает работы, выполненные в Институте катализа им. Г. К. Борескова [2–4]. Представлены некоторые теоретические результаты изучения явлений переноса в условиях экзотермической реакции в сотовом катализаторе с пористыми стенками и каналами треугольного или квадратного сечения. Изучено влияние формы канала и условий работы на протекание реакции, как на поверхности, так и в объеме катализатора.

Для получения пространственного распределения ламинарного потока газа в сотовом катализаторе выполняется решение полной системы уравнений Навье–Стокса с использованием пакета программ FLUENT [2–4]. Используется модель одного канала, в которой наряду с течением потока в свободных объемах блока учитывается проницаемость стенок для потока газа, и в качестве примера рассматривается каталитическое окисление метана. Условия работы варьировались для температуры на входе 700–800<sup>0</sup>С и короткого времени контакта 3–10 мс.

Представлены результаты детальных CFD-исследований массо- и теплопереноса в каналах и пористой твердой фазе сотового катализатора в условиях экзотермической реакции. В работе рассмотрено влияние распределения газового потока на 3D-поле скорости каталитической реакции, а также другие характеристики процесса.

Следует подчеркнуть, что для проведения этого цикла исследований потребовался анализ корректности математической модели, построенной адаптивной сетки и дискретной аппроксимации, а также точности выполненных расчетов.

Результаты CFD-моделирования показывают, что протекание экзотермических каталитических реакций в структурированном катализаторе с пористыми стенками и каналами различной формы характеризуется существенной неоднородностью газового потока, температуры и скорости реакции в объеме катализатора. Максимальная скорость реакции вблизи входа выше по сравнению с монолитом, непроницаемым для реакционного потока, за счет проникновения газового потока через фронтальную поверхность катализатора.

## Литература

1. Chen J., Yong H., Wang N., Ring Z., Dabros T. Mathematical Modeling of Monolith Catalysts and Reactors for Gas Phase Reactions // Appl. Catalysis A: General. 2008. Vol. 345. P. 1–11.
2. Klenov O. P., Pokrovskaya S. A., Chumakova N. A., Pavlova S. N., Sadykov V. A., Noskov A. S. Effect of Mass Transfer on the Reaction Rate in a Monolithic Catalyst with Porous Walls // Catalysis Today. 2009. Vol. 144. No 3–4. P. 258–264. DOI: 10.1016/j.cattod.2008.11.014.
3. Klenov O. P., Chumakova N. A., Pokrovskaya S. A., Noskov A. S. Modeling of Heat Transfer in a Porous Monolith Catalyst with Square Channels // Ind. Eng. Chem. Res. 2016. Vol. 55. No 14. P. 3879–3889. DOI: 10.1021/acs.iecr.5b04804.
4. Klenov O. P., Chumakova N. A., Pokrovskaya S. A., Noskov A. S. Impact of Heat and Mass Transfer in Porous Catalytic Monolith: CFD Modeling of Exothermic Reaction // Chem. Eng. Sci. 2019. Vol. 205. P. 1–13. DOI: 10.1016/j.ces.2019.04.010.

## Моделирование хаотической динамики гетерогенных каталитических реакций с иерархией характерных времен

© Чумаков Геннадий Александрович

кандидат физико-математических наук,

ученое звание доцент,

старший научный сотрудник

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Россия, 630090, Новосибирск, пр. Акад. Коптюга, 4

Новосибирский государственный университет

Россия, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2

chumakov@math.nsc.ru

© Чумакова Наталия Алексеевна

кандидат технических наук,

старший научный сотрудник

Институт катализа им. Г. К. Борескова СО РАН

Россия, 630090, Новосибирск, пр. Акад. Лаврентьева, 5

Новосибирский государственный университет

Россия, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2

chum@catalysis.ru

**Ключевые слова:** система ОДУ, малый параметр, язык форм, гетерогенная каталитическая реакция, кинетическая модель, автоколебания, теория бифуркаций, степень негрубости, коразмерность, притягивающее многообразие, гомоклиническая орбита, хаос.

**Благодарности** Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственных заданий Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект FWNF-2022-0005) и Института катализа им. Г. К. Борескова СО РАН (проект FWUR-2024-0037). Других источников финансирования проведения или руководства данным исследованием не было.

Доклад посвящен сценарию возникновения хаоса в одном механизме гетерогенной каталитической реакции, учитывающем обратную связь. Сценарий основан на способе асимптотического приближения по малому параметру притягивающих множеств в фазовом пространстве трехмерной кинетической системы с умеренной ( $x$ ), быстрой ( $y$ ) и медленной ( $z$ ) переменными и бифуркации разрушения инвариантного тора.

Приближения притягивающих множеств строятся с помощью максимальных семейств грубых стационарных точек и периодических решений, их локальных и глобальных бифуркаций в семействах двумерных подсистем с медленной переменной  $z$  в качестве параметра,  $0 \leq z \leq 1$ .

Мы рассматриваем систему ОДУ

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y, z),$$

$$\begin{aligned} f(x, y) &\equiv K_1(1 - x - y)^2 - K_{-1}x^2 - 2K_{30} e^{\mu_3 y} x^2 y, \\ g(x, y, z) &\equiv K_2(1 - x - y)^2 - K_{-2}y^2 - K_{30} e^{\mu_3 y} x^2 y - K_{40} e^{\mu_4 y + \mu_5 z} y \end{aligned}$$

с постоянными неотрицательными коэффициентами  $K_{\pm 1}$ ,  $K_{\pm 2}$ ,  $K_{30}$ ,  $K_{40}$  и  $\mu_m$  ( $m = 1, 2, 3$ ) в области  $\mathcal{G} = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ , и изучаем элементы ее глобальной динамики:

(а) *Притягивающие кривые*: однопараметрические семейства грубых устойчивых состояний равновесия с бифуркациями седло-узла коразмерности 1 в точках перехода с одной гладкой ветви на другую.

(б) *Притягивающие гладкие поверхности*, образованные однопараметрическими семействами грубых устойчивых предельных циклов.

(в) *Бифуркация Андронова–Хопфа* с третьей ляпуновской величиной, отличной от нуля, как пример перехода гладкой притягивающей поверхности на гладкую притягивающую кривую.

(г) *Притягивающие негладкие поверхности*: бифуркации рождения петли сепаратрисы седла (с ненулевой седловой величиной), когда семейство предельных циклов дает нам пример поверхности, теряющей гладкость.

С помощью этих притягивающих множеств или, другими словами, с помощью этого языка форм мы формулируем *принцип генерирования многопиковых и хаотических автоколебаний в трехмерной динамической системе с медленной, быстрой и умеренной переменными* [1, 2].

Сложная динамика в трехмерной системе с бифуркациями коразмерности один в однопараметрическом семействе двумерных подсистем строится следующим образом:

(1) Если на однопараметрическом семействе стационарных точек имеются две бифуркации седло-узла, то в трехмерной системе можно построить предельный цикл, соответствующий релаксационным автоколебаниям.

(2) Далее, если на одной из двух устойчивых ветвей семейства стационарных состояний имеются две бифуркации Андронова–Хопфа, то в трехмерном фазовом пространстве существует сильно деформированный тор, который соответствует многопиковым автоколебаниям.

(3) Если, кроме того, между двумя бифуркациями Андронова–Хопфа имеются две глобальные бифуркации, соответствующие гомоклиническим орбитам, а именно, петлям сепаратрис седел, то сильно деформированный тор разрушается и возникает хаос при подходящем соотношении скорости изменения переменной  $z$  и расстояния по координате  $z$  между гомоклиническими орбитами.

Таким образом, настоящая работа посвящена возникновению хаоса в кинетической модели гетерогенной каталитической реакции, учитывающей влияние реакционной среды на катализатор, в случае, когда расстояние между гомоклиническими орбитами не является малым, т. е. вдали от бифуркации разрушения инвариантного тора.

## Литература

1. Chumakov G. A., Chumakova N. A., Lashina E. A. Modeling the complex dynamics of heterogeneous catalytic reactions with fast, intermediate, and slow variables // Chem. Eng. J. 2015. V. 282. P. 11–19. DOI: 10.1016/j.cej.2015.03.017.
2. Chumakov G. A., Chumakova L. G. Localization of the trajectory bundles of tunnel type // AIP Conference Proceedings, Vol. 1389: *International Conference on Numerical Analysis*

*and Applied Mathematics*. 19–25 September 2011, *Halkidiki (Greece)*. ICNAAM 2011, pp. 1116–1119 (2011). DOI: 10.1063/1.3637809.



# Некоторые нелокальные задачи для дифференциальных уравнений эллиптического типа с разрывным коэффициентом и их корректность

© Шадрина Наталья Николаевна

кандидат физико-математических наук,

доцент

МИРЭА, Российский технологический университет

Россия, 119454, Москва, просп. Вернадского, 78, стр. 4

shadrinann8@yandex.ru

**Ключевые слова:** эллиптические уравнения, разрывный коэффициент, нелокальные условия, регулярные решения, существование, единственность.

Работа посвящена исследованию разрешимости нелокальных краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка с разрывным коэффициентом в старшей части.

Пусть  $\Omega$  есть интервал  $(0, 1)$  оси  $Ox$ ,  $Q$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$  есть прямоугольники  $\Omega \times (-a, a)$ ,  $\Omega \times (-a, 0)$ ,  $\Omega \times (0, a)$  соответственно ( $a > 0$  - заданное число),  $c(x, y)$ ,  $f(x, y)$ ,  $h(y)$  и  $\gamma(y)$  есть заданные функции, определенные при  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $y \in [-a, a]$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $i = 1, 2$ , есть заданные действительные числа. Считаем, что функция  $h(y)$  непрерывна на промежутках  $[-a, 0)$  и  $(0, a]$ , и имеет конечное значение  $h(-0)$  и  $h(+0)$ . Рассмотрим дифференциальный оператор  $L$ , действие которого на заданной функции  $v(x, y)$  определяется равенством

$$Lv = v_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}(h(y)v_y) + c(x, y)v.$$

Нелокальная задача I: найти функцию  $u(x, y)$ , являющуюся в прямоугольниках  $Q_1$  и  $Q_2$  решением уравнения

$$Lu = f(x, y) \quad (1)$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x, a) = u(x, -a) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u(0, y) = \gamma(y)u(1, y), \quad y \in (-a, 0) \cup (0, a), \quad (3)$$

$$u_x(1, y) = 0, \quad y \in (-a, 0) \cup (0, a), \quad (4)$$

$$u(x, -0) = \alpha u(x, +0), \quad x \in \Omega, \quad (5)$$

$$u_y(x, +0) = \beta u_y(x, -0), \quad x \in \Omega. \quad (6)$$

Нелокальная задача II: найти функцию  $u(x, y)$ , являющуюся в прямоугольниках  $Q_1$  и  $Q_2$  решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия сопряжения (5) и (6), а также краевое условие (2) и краевые условия

$$u_x(0, y) = \gamma(y)u_x(1, y), \quad y \in (-a, 0) \cup (0, a), \quad (7)$$

$$u(1, y) = 0, \quad y \in (-a, 0) \cup (0, a). \quad (8)$$

Нелокальная задача III: найти функцию  $u(x, y)$ , являющуюся в прямоугольниках  $Q_1$  и  $Q_2$  решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются краевые условия (2), (3) и (4), а также условия сопряжения

$$u_y(x, -0) = \alpha_1 u(x, -0) + \alpha_2 u(x, +0), \quad (9)$$

$$u_y(x, +0) = \beta_1 u(x, -0) + \beta_2 u(x, +0). \quad (10)$$

Нелокальная задача IV: найти функцию  $u(x, y)$ , являющуюся в прямоугольниках  $Q_1$  и  $Q_2$  решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются краевые условия (2), (7) и (8), а также условия сопряжения (9) и (10)

В работе сформулированы теоремы, содержащие условия, выполнение которых гарантирует существование и единственность регулярных решений данных задач.

В статьях [1] – [3] было проведено исследование подобных задач, данная работа является его продолжением.

## Литература

1. Кожанов А. И., Шадрина Н. Н. Исследование влияния параметров на корректность задачи сопряжения дифференциального уравнения Буссинеска-Лява // Челябинский физико-математический журнал. — Челябинск. — 2022. — Т. 7. №1 — С. 30 - 43.
2. Кожанов А. И., Шадрина Н. Н. Краевые задачи с условиями сопряжения для квазипараболических уравнений третьего порядка с разрывным знакопеременным коэффициентом // Сибирские электронные математические известия. — Новосибирск. — 2021. — Т. 18. №1 — С. 599 - 616.
3. Шадрина, Н.Н. О влиянии параметров на разрешимость некоторых задач сопряжения для эллиптических уравнений // Сибирские электронные математические известия. — Новосибирск. — 2016. — Т. 13. — С. 411 - 425.

## Обратная задача об определении точечных источников

© Шморган Сергей Андреевич

аспирант Инженерной школы цифровых технологий,  
Югорский государственный университет, Россия,  
628012, Ханты-Мансийск, ул. Чехова 16  
s\_shmorgan@ugrasu.ru

**Ключевые слова:** обратная задача, граничное условие Дирихле, граничное условие Робина, дельта-функция Дирака, начально-краевая задача, параболическое уравнение, существование, единственность, численный алгоритм, численный эксперимент.

**Благодарность**

Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ (тема "Аналитическое и численное исследование обратных задач об определении параметров источников атмосферного или водного загрязнения и (или) параметров среды код темы: FENG-2023-0004)

Мы рассматриваем обратную задачу об определении правой части специального вида в параболическом уравнении. Уравнение имеет вид

$$Mu = u_t - Lu = u_t - \operatorname{div}(c(x, t)\nabla u) + b(x, t) \cdot \nabla u + a(x, t)u = f + \sum_{i=1}^r \alpha_i(t)\delta(x - b_i),$$

$$b(x, t) = (b_1(x, t), b_2(x, t))^T, \nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2})^T, n = 2. \quad (1)$$

Здесь  $(t, x) \in Q = G \times (0, T)$ ,  $G \subset \mathbb{R}^2$  – ограниченная область (в тестовых примерах мы брали  $G = (0, X) \times (0, Y)$ ),  $c$  – диагональная матрица с элементами  $c_1(t, x), c_2(t, x)$  на диагонали, которые представляют из себя строго положительные функции,  $\vec{b} = (b_1, b_2)$ ,  $\delta(x - b_i)$  – дельта функции Дирака. Пусть  $S = \partial G \times (0, T)$ . При решении обратной задачи имеются дополнительные замеры вида

$$u(y_i, t) = \psi_i(t), i = 1, 2, \dots, r, y_i \in G. \quad (2)$$

Начально-краевые условия имеют вид

$$u|_{t=0} = u_0(x), u|_S = 0. \quad (3)$$

или вид

$$u|_{t=0} = u_0(x), \frac{\partial u}{\partial N} = c_1 u_{x_1} \nu_1 + c_2 u_{x_2} \nu_2 + \sigma u|_S = g(t, x), \quad (4)$$

где  $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2)$  – единичный вектор внешней нормали к  $\partial G$ . Определению подлежат решение  $u$  и неизвестные функции  $\alpha_i$ , в правой части уравнения (1). Условие Дирихле в (3) могут быть как однородными так и неоднородными, т.е. имеют вид  $u|_S = g(t, x)$ , задача всегда сводится к задаче с однородными условиями. Граничное условие могут меняться от одной части границы к другой. Например, возможны случаи, когда граничные и начальные условия задаются в виде

$$u|_{t=0} = u_0(x), \frac{\partial u}{\partial N}|_{s_0} + \sigma u|_{s_0} = g(t, x), u|_{S \setminus s_0} = 0, \quad (5)$$

где  $G = (0, X) \times (0, Y)$ ,  $S_0 = (0, T) \times \Gamma_0$ ,  $\Gamma_0 = \{x \in \partial G : x_2 = 0\}$ . Отметим, что рассматриваемые обратные задачи некорректны по Адамару.

Основные результаты включают в себя доказательство существования и единственности решения задачи, и разработку численных методов для нахождения правой части в уравнении (1). Приведены конкретные реализации предложенных подходов, разработана программа численного решения и проведены численные эксперименты.

# О резонансе на бесконечно тонком крестообразном препятствии в круглом волноводе

© Юмов Игорь Бимбаевич

Кандидат физико-математических наук, доцент  
Бурятский государственный университет им. Д. Банзарова  
Россия, Улан-Удэ  
igyumov@mail.ru

© Юмова Цыренханда Жэмбэевна

Кандидат физико-математических наук, доцент  
Улан-Баторский филиал Российского экономического университета им. Г. В. Плеханова  
Монголия, Улан-Батор  
syum@mail.ru

**Ключевые слова:** собственные колебания в неограниченных областях, резонансные явления, акустический волновод, крестообразное тонкостенное препятствие, вложенные собственные значения, метод Дирихле–Неймана, вариационный принцип Рэлея–Ритца.

В работе исследуется существование собственных акустических колебаний в неограниченном круглом цилиндрическом волноводе радиуса  $d$  с крестообразным препятствием  $B$ , образованным двумя бесконечно тонкими пластинами  $B_1 = \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq d, |z| \leq b\}$  и  $B_2 = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |y| \leq d, |z| \leq b\}$ . Рассматривается задача Неймана для уравнения Гельмгольца:

$$\Delta u + \lambda u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega = \Omega_0 \setminus B, \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega,$$

где  $\Omega_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < d^2, z \in \mathbb{R}\}$ .

Для смещения порога непрерывного спектра исходной задачи с  $[0, +\infty)$  на  $[\kappa_1^{(2)}, +\infty)$ , где  $\kappa_1^{(2)} > 0$ , задача сужена на подпространство функций, заданных на четверти волновода  $\Omega^a = \{(x, y, z) \in \Omega : x \geq 0, y \geq 0\}$ , удовлетворяющих дополнительным однородным условиям Дирихле на части  $\partial\Omega^a$ , лежащей в плоскостях симметрии  $\Pi_1 = \{y = 0\}$ ,  $\Pi_2 = \{x = 0\}$ , исключая препятствие  $B$ . Порогом непрерывного спектра суженной задачи является  $\kappa_1^{(2)} = (\mu_1^{(2)}/d)^2$  (где  $\mu_1^{(2)} \approx 3.054237$  — наименьший положительный нуль функции  $J_2'(\mu)$ ).

Методом вилки Дирихле–Неймана [2] можно установить существование собственного значения левее порога непрерывного спектра при условии  $b > \pi d/\mu_1^{(2)}$ . Используя вариационный принцип Рэлея–Ритца [1, 3, 4, 7, 9, 10], в данной работе доказано существование собственных колебаний для любого  $b > 0$  путём подбора «пробной функции»  $\psi \in H_1^0(\Omega^a)$ ,  $\psi \neq 0$ , и анализа функционала  $\|\nabla\psi\|^2 / \|\psi\|^2$ . Показано, что наименьшее собственное значение

$$\lambda_* = \inf_{\psi \in H_1^0(\Omega^a) \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla\psi\|^2}{\|\psi\|^2}$$

непрерывно и монотонно зависит от длины пластины в продольном направлении  $b$ .

Полученные результаты дополняют известные случаи тонкостенных препятствий в круглых волноводах [4, 5, 6, 8] и имеют практическое значение в задачах аэроакустического резонанса в трубопроводах, турбинах, системах вентиляции и т.д.

## Литература

1. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. СПб.: Лань, 2010. 464 с.
2. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.4. М.: Мир, 1982.
3. Evans D.V., Levitin M., Vassiliev D. Existence theorems for trapped modes // J. Fluid Mech. 1994. Vol. 261. P. 21–31. DOI: 10.1017/S0022112094000236
4. Groves M.D. Examples of Embedded Eigenvalues for Problems in Acoustic Waveguides // Math. Meth. Appl. Sci. 1998. Vol. 21. P. 479–488. DOI: 10.1002/(SICI)1099-1476(199804)21:6
5. Linton, C. M., McIver, P. Acoustic resonances in the presence of radial fins in circular cylindrical waveguides // Wave Motion. 1998. 28 (2), 99–117.
6. Сухинин С.В. Акустические колебания около тонкостенных цилиндрических препятствий в канале // Прикл. мех. техн. физ. 1999. Т. 40, № 4. С. 159–168.
7. Назаров С.А. Вариационный и асимптотический методы поиска собственных чисел под порогом непрерывного спектра // Сиб. матем. журн. 2010. Т.51, № 5. С. 1086–1101.
8. Хасанов Н. А., Сухинин С. В. Собственные акустические колебания около тонкостенных препятствий в кольцевом цилиндрическом канале // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 1(53). С. 116–125.
9. Yumov I.B. Existence theorems for eigen oscillations in 3D rectangular waveguides // Conf. Proc. 2002 Int. Conf. Mathematical Methods in Electromagnetic Theory ММЕТ\*02. Kiev, Ukraine. 2002. V. 2. P. 671–673. <http://dx.doi.org/10.1109/mmet.2002.1107053>
10. Юмов И.Б. О захваченных волнах в акустическом волноводе с бесконечно тонким препятствием // Вестник БГУ. 2013. №1. С. 46–57.

## Space-Time-Dependent Source Identification Problem for a Subdiffusion Equation

© **Ashurov Ravshan Radjabovich**

doctor of physical and mathematical sciences

professor,

Head of Laboratory V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Uzbekistan, 100174, Tashkent, University str.,9, Olmazor district,

e-mail ashurovr@gmail.com

© **Muhiddinova Oqila Tulqin kizi**

doctor of philosophy,

associate professor,

associate professor at the Department of Mathematics

Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi

Uzbekistan, 100200, Tashkent, Str., 108, Amir Temur Avenue

e-mail oqila1992@mail.ru

**Keywords:** Subdiffusion equation, Caputo time derivative, inverse problem, uniqueness and existence of solution, Fourier method.

### Acknowledgements

The authors also acknowledge financial support from the Ministry of Innovative Development of the Republic of Uzbekistan, Grant No F-FA-2021-424.

Let  $Q = (0, T) \times (0, 1) \times (0, \pi)$  and  $\Omega = (0, 1) \times (0, \pi)$ . Consider the following initial - boundary value problem

$$\begin{cases} D_t^\alpha u - u_{xx} - u_{yy} = g(t, x, y) + f(t, x, y) \cdot h(t, x), & (t, x, y) \in Q, \\ u(0, x, y) = \varphi(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ u(t, 0, y) = u(t, 1, y) = 0, & t \in [0, T], \quad y \in [0, \pi], \\ u(t, x, 0) = u(t, x, \pi) = 0, & t \in [0, T], \quad x \in [0, 1]. \end{cases} \quad (1)$$

Here  $f, g$  and  $\varphi$  are given continuous functions,  $\alpha \in (0, 1)$ , and  $D_t^\alpha$  is the fractional Caputo derivative, which for an absolutely continuous function  $v(t)$  is determined by the formula (see, e.g., [1], p. 91)

$$D_t^\alpha v(t) \equiv J_t^{1-\alpha} D_t v(t), \quad J_t^\alpha v(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} v(\tau) d\tau,$$

where  $D_t = d/dt$ ,  $\Gamma(\alpha)$  is the gamma function,  $J_t^\alpha$  is the Riemann-Liouville fractional integral.

If the function  $h(t, x)$  is given, then the solution to the initial-boundary value problem (1) exists and is unique under certain conditions on the problem's data (see, e.g., [2], [3]).

Now suppose that the function  $h(t, x)$  is unknown and must be determined. The primary objective of this paper is to investigate the inverse problem of determining the pair of functions  $\{u(t, x, y), h(t, x)\}$  subject to the overdetermination condition given by:

$$u(t, x, l_0) = \psi(t, x), \quad t \in (0, T), \quad x \in (0, 1), \quad l_0 \in (0, \pi), \quad (2)$$

where  $\psi$  is a known continuous function.

**Theorem 1**

Suppose the following conditions hold:

1.  $f \in C(\overline{Q})$ ,  $f(t, x, l_0) \neq 0$ , and denote  $f_0 = \max_{t,x} \left| \frac{1}{f(t,x,l_0)} \right|$ ;
2.  $g \in C(\overline{Q})$ , and denote  $g_0 = \max_{t,x} |g(t, x, l_0)|$ ;
3.  $D_t^\alpha \psi, \psi_{xx} \in C([0, T] \times [0, 1])$ , and denote  $\psi_0 = \max_{t,x} (|D_t^\alpha \psi| + |\psi_{xx}|)$ ;
4.  $4 M_\alpha f_0^2 \max_{t,x} \|f_{yyy}(t, x, \cdot)\|_{L_2(0,\pi)}^2 \leq 1$ , and  $f(t, x, 0) = f(t, x, \pi) = f_{yy}(t, x, 0) = f_{yy}(t, x, \pi) = 0$ ;
5.  $\max_t \|g_{yyy}(t, \cdot, \cdot)\|_2 < \infty$ , and  $g(t, x, 0) = g(t, x, \pi) = g_{yy}(t, x, 0) = g_{yy}(t, x, \pi) = 0$ ;
6.  $\varphi \in C(\overline{\Omega})$ , and  $\|\varphi_x\|_2, \|\varphi_{yyy}\|_2 < \infty$ , and  $\varphi(x, 0) = \varphi(x, \pi) = \varphi_{yy}(x, 0) = \varphi_{yy}(x, \pi) = 0$ .

Then, the inverse problem (1) - (2) has a unique weak solution. Moreover, the following estimates hold:

$$\begin{aligned} \max_t \|u(t, \cdot, \cdot)\|_2^2 &\leq K_1, \\ \int_0^t (\|u_x(\tau, \cdot, \cdot)\|_{L_2(Q)}^2 + \|u_y(\tau, \cdot, \cdot)\|_{L_2(Q)}^2) d\tau &\leq K_2, \\ \int_0^t \|D_t^\alpha u(\tau, \cdot, \cdot)\|_{L_2(Q)}^2 d\tau &\leq K_3, \\ \max_t \|h(t, \cdot)\|_{L_2(0,1)}^2 &\leq K_4. \end{aligned}$$

Here  $K_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , are some positive constants, depending on the data of the problem.

## References

1. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. Elsevier, North-Holland: Mathematics studies. 2006.
2. Sakamoto M., Yamamoto M. Initial value/boundary value problems for fractional diffusion-wave equations and applications to some inverse problems. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2011, Vol.382, No.1, P. 426–447.
3. Ashurov R.R., Mukhiddinova O.T. Initial-boundary value problem for a time-fractional subdiffusion equation with an arbitrary elliptic differential operator. Lobachevski Journal of Mathematics. 2021, Vol. 42, No.3, P. 517-525.



## An inverse problem for a mixed-type equation in space

© **Fayazov Kudratillo Sadridinovich**

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,

Professor,

Professor of the Department of Natural and Mathematical Sciences

Turin Polytechnic University in Tashkent,

Kichik Khalka Yuli, Str. 17, 100195 Tashkent, Uzbekistan

e-mail: kudratillo52@mail.ru

© **Juraeva Dildora Shuhrat qizi**

Teacher of the Department of Natural and Mathematical Sciences

Turin Polytechnic University in Tashkent,

Kichik Khalka Yuli, Str. 17, 100195 Tashkent, Uzbekistan

e-mail: jurayevadildora1998@gmail.com

**Keywords:** Inverse problem, mixed-type differential equations, separation of variables, spectral problem, existence and uniqueness.

**Statement of the problem.** Let  $Q = \Omega \times (0, T)$ ,  $\Omega = \{|x| < 1, |y| < 1\}$ ,  $\Omega_1 = \{|x| < 1, 0 < t < T\}$ , and  $\Omega_2 = \{|y| < 1, 0 < t < T\}$ . It is required to find the functions  $u(x, y, t)$  and  $f(x, y)$ , which are related in the domain  $Q \cap \{x \neq 0\}$  by the equation

$$u_t(x, y, t) - \operatorname{sign}(x)u_{xx}(x, y, t) - u_{yy}(x, y, t) = f(x, y), \quad (1)$$

and satisfy the equation (1), the boundary

$$\begin{aligned} u_x(x, y, t)|_{x=\pm 1} &= 0, & (y, t) \in \overline{\Omega}_2, \\ u_y(x, y, t)|_{y=\pm 1} &= 0, & (x, t) \in \overline{\Omega}_1, \end{aligned} \quad (2)$$

initial

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \overline{\Omega}, \quad (3)$$

final

$$u(x, y, T) = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \overline{\Omega}, \quad (4)$$

and gluing

$$u|_{x=-0} = u|_{x=+0}, \quad u_x|_{x=-0} = -u_x|_{x=+0}, \quad (y, t) \in \overline{\Omega}_2, \quad (5)$$

conditions, where  $\varphi(x, y)$ ,  $\psi(x, y)$  are sufficiently smooth given functions.

We consider this inverse problem and prove the existence and uniqueness theorems. We find a presentation of the functions  $u(x, y, t)$  and  $f(x, y)$  with respect to the givens.

## References

1. I. A. Kaliev, M. F. Mugafarov, O. V. Fattahova: Inverse problem for forward backward parabolic equation with generalized conjugation conditions. Ufa Math. J., **3**(2), 33–41 (2011).
2. K. S. Fayazov, Y. K. Khudayberganov, S. Pyatkov: Conditional well-posedness of the initial-boundary value problem for a system of inhomogeneous mixed type equations with two degeneration lines. J. Math. Sci. (USA), **274**(2), 201–214 (2023).
3. K. S. Fayazov, Y. K. Khudayberganov: Ill-posed boundary-value problem for a system of partial differential equations with two degenerate lines. J. Siberian Federal Univ. Math. Phys., **12**(3), 392–401 (2019).
4. Fayazov K. S., Khudayberganov Y. K.; Nonlocal boundary value problem for a nonhomogeneous parabolic type equation with two degenerate lines, Uzbek Mathematical Journal, 2024, 68(3), Pp 53–65.

## Sweeping of density for the graph

© Glasko Yuri Vladlenovich

Candidate of Physical-mathematical sciences,

leading mathematician

Science-research computing center of Lomonosov Moscow State University

Russia, 119992, Moscow, Leninskie Gory, 1, b.4

glaskoyv@mail.ru

**Key words:** balayage of densities, sweeping of densities, concentration, inverse problem, mathematical model, graph, undirected graph, subgraph, nonintersecting connected subgraphs, decomposition the graph, 7 cubes embedded in each other, system of 8 3D cubes, 3D grid.

### Thanks

Thanks to prof. A.G. Yagola for attention to the work, prof. S.I. Kabanikhin for idea use graph and nomograms.

The research is part of Science research project of Informational systems laboratory of Science-research computing center Lomonosov Moscow State University "Creation and development informational systems for educational and administrative purposes".

In this work we consider process of sweeping of densities [1] for the system of 8 3D cubes. 7 cubes embedded in each other:  $V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset V_4 \subset V_5 \subset V_6 \subset V_7 \subset V$ . Since the system of 3D cubes are so hard to replace, we use an undirected graph  $G(S)$  [2].  $S$  - the nodes of the cubes  $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7, V$ . For 3D grid with constant step  $h$  we have  $V_1^h \subset V_2^h \subset V_3^h \subset V_4^h \subset V_5^h \subset V_6^h \subset V_7^h \subset V^h$ . Consequently, we have the undirected graph  $G(S)$ .  $S$  - the nodes of the grid cubes Accordingly, we have decomposition the graph  $G(S)$  on nonintersecting connected subgraphs [2]:

$$G(S) = \bigcup_{j=1}^8 G(S_j) \equiv \bigcup_{i=1}^8 G_i(S) \quad (1)$$

Let us note that for the subgraph  $G_5(S)$  the domain is significantly increased.

Let us perform the numerical experiments by numerical realization of H. Poincare balayage method [4] for the graph  $G(S) = \bigcup_{j=1}^8 G(S_j)$ . Thus, we create the database for inverse problem of concentration of densities.

The mathematical model for balayage process for the graph  $G(S)$  is given by:

$$D\Delta u(X) = -f(X), \quad X \in \Omega \subset G(S) \quad (2)$$

$$Du(X) = 0, \quad X \in G(S) \setminus \Omega \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial u(X)}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0, \quad \Gamma \equiv \partial G(S) \equiv G_8(S) \quad (4)$$

$$u(X) = u_0(X) = cf(X), \quad X \in \Omega \quad (5)$$

We consider numerical experiments for:  $\Omega = G_i(S)$ ,  $i = 1, \dots, 7$ ,  $\Omega = \bigcup_{i=1}^2 G(S_i)$ ,  $\Omega = \bigcup_{i=1}^3 G(S_i)$ ,  $\Omega = \bigcup_{i=1}^4 G(S_i)$ ,  $\Omega = \bigcup_{i=1}^5 G(S_i)$ ,  $\Omega = \bigcup_{i=1}^6 G(S_i)$ ,  $\Omega = \bigcup_{i=1}^7 G(S_i)$ .

For inverse problem of determining  $(f(X), u(X))$  [3] for the graph  $G(S)$  we have additional condition:

$$u(X)|_{\Gamma} = u_{\Gamma}(X), \Gamma \equiv G_8(S) \quad (6)$$

## References

1. H. Poincare. Sur les equation aux derives partielles de la physique mathematique // Amer. J. Math. 1890. 12. p. 211-294; Oeuvres, t. IX, p. 28-113.
2. Oystein Ore. Theory of Graphs. 190 Hope Street, Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1962. 352 p.
3. Yagola A.G., Dorofeev K.Y. Sourcewise representation and a posteriori error estimates for ill-posed problems // Vestnik Moscow University. Series 3. Physics, astronomy. Moscow: Moscow University Press. 1999. No. 2. pp. 64-66.
4. Glasko Y.V. Diffusion Process for the Domain-Source // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol. 44. No. 8. pp. 3059-3066. DOI: 10.1134/S1995080223080176 .

## Inexact Bundle Method with exact Penalty for Constrained Nonsmooth Optimization

© **HongKai Song**

Postgraduate

Dalian Maritime University

China, 116026, Liaoning Province, Dalian, Ganjingzi District, Linghai Road, 1

songhk@dlmu.edu.cn

© **Ming Huang**

Doctor of Mathematics,

Academic title Associate Professor,

Associate Professor of the Department of Mathematics

Dalian Maritime University

China, 116026, Liaoning Province, Dalian, Ganjingzi District, Linghai Road, 1

huangming0224@dlmu.edu.cn; corresponding author

© **XiaoDan Chao**

Postgraduate

Dalian Maritime University

China, 116026, Liaoning Province, Dalian, Ganjingzi District, Linghai Road, 1

chaoxiaodan@dlmu.edu.cn

© **Yang Yang**

Doctor of Mathematics,

Academic title lecturer,

Lecturer of the Department of Mathematics

Jiangxi University of Finance and Economics

China, 330013, Jiangxi Province, Nanchang, Economic and Technological Development Zone, Shuanggang East Street, 169

y.yang@jxufe.edu.cn

**Abstract:** This paper proposes a proximal bundle method with a novel penalty strategy for

constrained convex nonsmooth optimization, where objective and constraint function values and subgradients can be obtained approximately from above or below. The constrained problem is transformed into an unconstrained one using a penalty function with controlled updates, ensuring limited penalty growth. A modified cutting plane model is introduced to manage errors arising from these inexact oracles. The penalty strategy, tailored for upper oracles, utilizes unconstrained-like techniques to decrease the objective while separately updating the penalty parameter for feasibility. We prove that the sequence generated by the algorithm converges to an approximate optimal solution, whose accuracy depends solely on the objective function's oracle tolerances. Numerical examples illustrate the approach.

**Keywords:** Nonsmooth optimization, Convex optimization, Constrained programming, Exact penalty functions, Proximal bundle methods, Upper or lower inexact oracles.

**Acknowledgements** This paper is supported by the National Key Research and Development Program of China under No. 2022YFB3304600; the Fundamental Research Funds for the Central

**Introduction:** In this work, we consider the following inequality constrained optimization problem

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.t.} & F(x) \leq 0, \end{array} \quad (1)$$

where  $f$  and  $F$  are convex (but possibly nonsmooth) real-valued functions defined on  $\mathbb{R}^n$ , and we suppose Slater constraint qualification holds. It is called nonsmooth optimization (NSO) problem. Bundle methods are widely used in unconstrained optimization [1, 9], and they also can applied to constrained ones, which penalty function methods [4, 7], filter strategy [5] and improvement function methods [6] would be used. Different from all above methods [2, 3, 8] which define improvement function, exact penalty function is used in our method. For exact case, the work [7] gives some penalty updates that limit unnecessary penalty growth under Slater constraint qualification. Analogously, Slater constraint qualification is needed in our inexact case, and if the trial points is bounded, we also can prove that the penalty update would stop as the algorithm goes without estimating the size of the penalty parameter in advance.

## References

1. Boyd, S., Vandenberghe, L.: Convex Optimization, Cambridge University Press (2004).
2. Ackooij, W.V., Oliveira, W.D.: Level bundle methods for constrained convex optimization with various oracles. *Comput. Optim. Appl.*, 57, 555–597 (2014).
3. Kiwiel, K.C.: A method of centers with approximate subgradient linearizations for nonsmooth convex optimization. *SIAM J. Optim.*, 18(4), 1467–1489 (2008).
4. Yang, Y., Pang, L., Ma, X., Shen, J.: Constrained nonconvex nonsmooth optimization via proximal bundle method. *J. Optim. Theory Appl.*, 163, 900–925, (2014).
5. Karas, E., Ribeiro, A., Sagastizábal, C., Solodov, M.V.: A bundle-filter method for nonsmooth convex constrained optimization. *Math. Program.*, 116, 297–320 (2009).
6. Sagastizábal, C., Solodov, M.V.: An infeasible bundle method for nonsmooth convex constrained optimization without a penalty function or a filter. *SIAM J. Optim.*, 16, 146–169 (2005).
7. Kiwiel, K.C.: Exact penalty functions in proximal bundle methods for constrained convex nondifferentiable minimization. *Math. Program.*, 52, 285–302 (1991).
8. Fábían, C.I.: Bundle-type methods for inexact data. *CEJOR Cent. Eur. J. Oper. Res.*, 8, 35–55 (2000).
9. Lemaréchal, C.: An extension of davidon methods to nondifferentiable problems. *Nondifferentiable Optimization. Math. Program. Stud.*, 3, 95–109 (1975).
10. Huang M., Zhang S. Q., Feng Y. X., et al. A proximal bundle approach for solving the generalized variational inequalities with inexact data. *Appl. Math. Comput.*, 491: 129087, (2025).
11. Feng Y. X., Huang M., Zhang S. Q., et al. A proximal bundle technique for solving equilibrium problems with inexact information. *J. Phys. Common.*, Vol. 2905, No. 1, p. 012006 (2024).

## Nonlocal problem for the degenerating mixed type equation

© Nargiza Ochilova

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,  
Associate Professor of the Department of "Exact Sciences"  
KIMYO International University in Tashkent  
Uzbekistan, Shota Rustaveli Street 156, 100121, Tashkent  
E-mail: nargiz.ochilova@gmail.com

© Nozima Ochilova

Assistant, Department of Higher Mathematics  
Tashkent State Transport University  
E-mail: nozima@tstu.uz

**Keywords:** Boundary value problem, degenerating equation, parabolic hyperbolic type, Gauss hypergeometric function, Cauchy problem, existence and uniqueness of solution, a principle an extremum, method of integral equations

We consider equation:

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - D_{oy}^\alpha u, & \text{at } y > 0, \\ (-y)^m u_{xx} - x^n u_{yy}, & \text{at } y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

where

$${}_c D_{0y}^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y (y-t)^{-\alpha} u_t(x,t) dt, \quad 0 < \alpha < 1, \quad m > n > 0.$$

Let  $\Omega$  be a domain bounded with segments:  $A_1 A_2 = \{(x, y) : x = 0, 0 < y < h_2\}$ ,  $B_1 B_2 = \{(x, y) : x = h_1, 0 < y < h_2\}$ ,  $A_2 B_2 = \{(x, y) : y = h_2, 0 < x < h_1\}$  in  $y > 0$ , and by the characteristics:  $A_1 C : \frac{1}{q} x^q - \frac{1}{p} (-y)^p = 0$ ,  $B_1 C : \frac{1}{q} x^q + \frac{1}{p} (-y)^p = \frac{1}{q}$ ; of equation (1) in  $y < 0$ , where  $A_1(0; 0)$ ,  $A_2(0; h_2)$ ,  $B_1(h_1; 0)$ ,  $B_2(h_1; h_2)$  and  $C\left(\left(\frac{q}{2}\right)^{1/q}, -\left(\frac{p}{2}\right)^{1/p}\right)$ .

Here  $2q = n + 2$ ,  $2p = m + 2$ ,  $h_1 = q^{1/q}$ ,  $h_2 > 0$ .

Introduce designations:

$$2\alpha_1 = n/(n+2), \quad 2\beta_1 = m/(m+2), \quad 0 < \alpha_1 < \beta_1 < \frac{1}{2},$$

$$\Omega^+ = \Omega \cap (y > 0), \quad \Omega^- = \Omega \cap (y < 0), \quad I_1 = \{y : 0 < y < h_2\}, \quad I_2 = \{x : 0 < x < h_1\}.$$

For equation (1), we consider the following problem:

**Problem.** Find a solution  $u(x, y)$  of equation (1) from the following class of functions:  $\Delta = \{u(x, y) : u(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega^-), \quad u_{xx} \in C(\Omega^+), \quad {}_c D_{oy}^\alpha u \in C(\Omega^+)\}$  satisfies boundary conditions:

$$u(x, y) \Big|_{A_1 A_2} = \varphi_1(y), \quad u(x, y) \Big|_{B_1 B_2} = \varphi_2(y), \quad y \in \bar{I}_1,$$

$$\begin{aligned}
& a(x) (x^{2q})^{\frac{1-\alpha+\beta}{2}} \frac{d}{dx^{2q}} (x^{2q})^{\frac{1-\alpha-\beta}{2}} F_{0x} \left[ \begin{array}{c} \frac{\alpha+\beta-1}{2}, \frac{\alpha+\beta}{2} \\ \beta, x^{2q} \end{array} \right] (x^{2q})^{\frac{2\alpha-1}{2}} u[\theta_0(x)] + \\
& + b(x) (1-x^{2q})^{-\beta} D_{x^{2q_1}}^\alpha (x^q + 1)^{\alpha-\beta} D_{x^{q_1}}^{1-\alpha-\beta} u[\theta_1(x)] + \\
& + \delta(x) u_y(x, 0) = g(x), x \in I_2,
\end{aligned}$$

and gluing condition:

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{1-\alpha} u_y(x, y) = u_y(x, -0), (x, 0) \in I_2,$$

where  $a(x), b(x), \delta(x), g(x)$  and  $\varphi_i(y)$ ,  $(i = 1, 2)$  are given functions, and that,

$$a^2(x) + b^2(x) + \delta^2(x) \neq 0,$$

$$\theta_0(x) = \left( \left( \frac{x^q}{2} \right)^{1/q}; - \left( \frac{px^q}{2q} \right)^{1/p} \right), \quad \theta_1(x) = \left( \left( \frac{1+x^q}{2} \right)^{1/q}; - \left( \frac{p(1-x^q)}{q \cdot 2} \right)^{1/p} \right).$$

The unique solvability of the formulated problem is proved for the following classes with the given functions:

$$a(x), b(x) \in C(\bar{I}_2) \cap C^2(I_2), \quad \delta(x) \in C(\bar{I}_2) \cap C^2(I_2),$$

$$g(x) \in C^2(I_2), \quad \varphi_1(y), \varphi_2(y) \in C(\bar{I}_1) \cap C^1(I_1).$$

## References

1. Kilbas A.A., Srivastava H.M. and Trujillo J.J., "Theory and applications of fractional Differential Equations", vol.204., of North-Holland Math.Studies (Elsevier B.V.Science, Amsterdam, 2006).



## High-precision difference schemes for nonlinear dispersive wave models

© Li Shuguang

Associate Professor,

School of Science,

Dalian Maritime University

China, 116026, Dalian, Linghai Road, 1

shuguangli2008@126.com

**Keywords:** Compact difference scheme, nonlinear dispersive wave models, Energy-preserving, Unconditional stability and convergence.

### Acknowledgements

The work was financially supported by the "Education Basic Research Project of Liaoning Province in China (No. JYTQN2023042)" and the "China Postdoctoral Science Foundation (No. 2023M740468)".

In this report, we introduce the construction technology and numerical analysis methods of the compact finite difference method. For several types of nonlinear diffusion models, a series of high-precision compact difference schemes are proposed, which maintain the original conservative properties of the equations. The discrete conservations of the compact difference schemes are proved by discrete energy. The solvability of the numerical schemes are obtained. Based on the prior estimate, convergence and unconditional stability are obtained, and the optimal error estimate reaches fourth-order and second-order accuracy in space and time steps respectively. The numerical experimental results show that the theoretical results are accurate and the method is efficient and reliable.

First, based on our research results [1], the construction method of high-precision numerical schemes for derivatives of different orders is introduced.

Then, the generalized symmetric regularized long wave (GSRLW) equations are considered, as follows:

$$u_t + \rho_x + \frac{1}{m}(u^m)_x - u_{xxt} = 0, \quad (1)$$

$$\rho_t + u_x = 0, \quad (2)$$

where  $m \geq 2$ ,  $u_0$  and  $\rho_0$  are two known smooth functions.

The generalized Rosenau-Kawahara-RLW equation is considered, as follows:

$$u_t + \alpha u_{xxxxx} - \beta u_{xxt} + \gamma u_{xxx} - \eta u_{xxxxx} + \omega u_x + \nu(u^p)_x = 0, \quad (3)$$

where  $u(x, t)$  represents the wave profile, which has independent space and time variables  $x$  and  $t$ .  $\omega$ ,  $\gamma$ ,  $\eta$ ,  $\nu$  are real constants,  $\beta$ ,  $\alpha$  are positive constants, and  $p \geq 2$  is a positive integer.

A series of high-precision finite difference solutions for the GSRLW and RLW equations are presented, which were developed in [2–6], respectively. These numerical solutions have discretization conservation properties that are consistent with the original properties of

the equations. The structure-preserving numerical schemes have the numerical advantage of being able to perform long computations, which is verified by numerical experiments.

The existence of the solutions of the numerical schemes is proved by the fixed point theorem. The a priori estimate of the numerical solutions is obtained by the discrete energy method. Based on the a priori estimate, unconditional stability and convergence in the maximum norm are obtained, and the convergence order of the numerical solution is  $O(\tau^2 + h^4)$  for the spatial step size  $h$  and temporal step size  $\tau$ .

In recent research [7], we provide MATLAB program codes to ensure the reproducibility of the algorithms.

## References

1. Li S.G., Numerical analysis for fourth-order compact conservative difference scheme to solve the 3D Rosenau-RLW equation // Computers & Mathematics with Applications, 2016, 72(9): 2388-2407. DOI: 10.1016/j.camwa.2016.09.010.
2. Li S.G., Wu X.G.,  $L^\infty$  error bound of conservative compact difference scheme for the generalized symmetric regularized long-wave (GSRLW) equations // Computational and Applied Mathematics, 2018, 37(3): 2816-2836. DOI: 10.1007/s40314-017-0481-6.
3. Li S.G., Numerical study of a conservative weighted compact difference scheme for the symmetric regularized long wave equations // Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2019, 35(1): 60-83. DOI: 10.1002/num.22285.
4. Li S.G., Xu D., Zhang J., Sun C., A new three-level fourth-order compact finite difference scheme for the extended Fisher-Kolmogorov equation // Applied Numerical Mathematics, 2022, 178: 41-51. DOI: 10.1016/j.apnum.2022.03.010.
5. Li S.G., Kravchenko O.V., Qu K., On the  $L^\infty$  convergence of a novel fourth-order compact and conservative difference scheme for the generalized Rosenau-KdV-RLW equation // Numerical Algorithms, 2023, 94(2): 789-816. DOI: 10.1007/s11075-023-01520-1.
6. Li S.G., Fu H.S., A new high-order compact and conservative numerical scheme for the generalized symmetric regularized long wave equations // International Journal of Computer Mathematics, 2023, 100(5): 968-990. DOI: 10.1080/00207160.2023.2167516.
7. Li S.G., Lv L.J., Kravchenko O.V., Matrix analysis of discrete functionals in compact difference method for nonlinear problems with higher derivatives and program code (I: 1D problem) // Computational and Applied Mathematics, 2024, 43(8): 438. DOI: 10.1007/s40314-024-02940-y.

## Coefficient inverse problems of identification of thermophysical parameters

© **Pyatkov Sergey Grigirievich**

Doctor of physical and mathematical sciences,  
academic title: professor,  
professor of Engineering School of Digital Technologies,  
Yugra State University, Russia,  
628012, Khanty-Mansiysk, Chekhov st., 16  
s\_pyatkov@ugrasu.ru

**Keywords:** inverse problem, overdetermination condition, parabolic system, existence theorem, uniqueness theorem, stability.

Acknowledgement. The research was carried out within the state assignment of Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (theme No. FENG-2023-0004, "Analytical and numerical study of inverse problems on recovering parameters of atmosphere or water pollution sources and (or) parameters of media")

We examine the question on identification of coefficients of a parabolic equation together a solution to this equation. An equation is of the form

$$Mu = u_t + Au = f(t, x), \quad (t, x) \in Q = (0, T) \times G, \quad (1)$$

where  $G \in \mathbb{R}^n$  is a bounded domain with boundary  $\Gamma$ . Let  $S = (0, T) \times \Gamma$ . The function  $f$  and a second order elliptic operator  $A$  are representable as

$$\begin{aligned} -A(t, x, D) &= A_0(t, x, D_x) + \sum_{i=1}^r q_i(t) A_i(t, x, D_x), \quad f = f_0(t, x) + \\ &\sum_{i=r+1}^s f_i(t, x) q_i(t), \quad A_i = \sum_{k,l=1}^n a_{kl}^i(t, x) \partial_{x_k x_l} + \sum_{k=1}^n a_k^i(t, x) \partial_{x_k} + a_0^i. \end{aligned}$$

The equation (1) is furnished with the initial and boundary conditions

$$u|_{t=0} = u_0, \quad Bu|_S = \frac{\partial u}{\partial \gamma} + \sigma u = g(t, x) \left( \frac{\partial u}{\partial \gamma} = \sum_{i=1}^n \gamma_i(t, x) u_{x_i} \right) \text{ or } Bu = u. \quad (2)$$

We consider three types of overdetermination conditions which are as follows:

$$\int_{\Gamma} u(t, x) \varphi_j(x) d\Gamma = \psi_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (3)$$

$$\int_G u(t, x) \varphi_j(x) dx = \psi_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (4)$$

$$u(t, y_j) = \psi_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (5)$$

The unknowns in the corresponding inverse problems are a solution  $u$  to the problem (1), (2) and the functions  $q_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) such that the one of the overdetermination conditions (3)-(5) holds.

The problems (1)-(3), (1), (2), (4), and (1), (2), (5) arise when describing heat and mass transfer processes, diffusion and filtration processes, in ecology and many other fields. The most common overdetermination conditions are the values of a solution at some collection of points or at a cross-section of the spatial domain, i. e. the conditions (5). We can refer to the monograph [1] devoted to inverse parabolic problems and the monographs [2, 3, 4] containing basic statements of inverse problems including those for parabolic equations. The overdetermination conditions (3), (4) are not standard but they also arise in the theory of inverse problems and applications.

We examine the well-posedness questions of the above inverse problems. It is possible to say that under certain conditions on the data all above problems are well-posed locally in time, i. e., on some interval  $(0, \tau)$  there exists a unique solution to the problems (1)-(3), (1),(2), (4) и (1),(2), (5) from the class  $u \in W_p^{1,2}((0, \tau) \times G)$  and either  $q_i \in C([0, \tau])$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) in the case of recovering the higher-order coefficients or  $q_i \in L_p(0, \tau)$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) if these functions occur in the lower-order coefficients.

## References

1. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., and Vasin I.A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York: Marcel Dekker, Inc., 1999.
2. Belov Ya.Ya. Inverse problems for parabolic equations. Utrecht: VSP, 2002.
3. Isakov V. Inverse Problems for Partial Differential Equations. Berlin: Springer, 2006.
4. Kabanikhin S.I. Inverse and Ill-Posed Problems. Theory and Applications. Boston/Berlin: Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, 2012

## Global solutions for a nonlinear diffusion problem

© **Rakhmonov Zafar**

Doctor of Physics and Mathematics

Associate Professor,

Dean of the Faculty of Applied Mathematics

National University of Uzbekistan after named Mirzo Ulugbek

Uzbekistan, Tashkent

z.rahmonov@nuu.uz

© **Yarmetova Dilafruz**

researcher

National University of Uzbekistan after named Mirzo Ulugbek

Uzbekistan, Tashkent

saidovadilafruz1996@gmail.com

**Keywords:** blow-up, global solution, nonlinear boundary condition, critical exponents, nonlinear diffusion problem.

We study a nonlinear diffusion problem with a source specified by nonlinear boundary conditions in  $Q = \{(x, t) \mid x \in R_+^N, t > 0\}$

$$u_t = \nabla (|\nabla u^m|^{p-2} \nabla u^m) + u^\beta, \quad x \in R_+^N, t > 0, \quad (1)$$

with nonlinear boundary flow and initial condition

$$-|\nabla u^m|^{p-2} \frac{\partial u^m}{\partial x_1} = u^q, \quad x_1 = 0, t > 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (3)$$

where  $R_+^N = \{(x_1, x') \mid x' \in R^{N-1}, x_1 > 0\}$   $m > 1$ ,  $p > 1 + 1/m$ ,  $q > 0$  are given numerical parameters and  $u_0(x)$  is a non-negative bounded and continuous function in  $R_N$ . This paragraph is intended to build self-similar sub- and super-solutions to (1)-(3) to establish the theorems of Global existence and nonexistence solutions. The first theorem is about the conditions in which the problem (1)-(3) has the global solution. The global existence of solution draws conclusions from the comparison principle. We will need the following notations

$$q_0 = \frac{(p-1)}{p} (m+1-\beta),$$

$$q_c = (m+1-\beta) (p-1) \left(1 + \frac{1}{N}\right).$$

**Theorem 1.** If for each nonnegative  $q \leq q_0$  and  $0 < \beta \leq 1$ , then each nonnegative solution of the problem (1)-(3) is global in time.

**Proof.** To prove the theorem self-similar sub-solution has been constructed and showed

that it is limited for any  $t > 0$ . For this purpose, it has been looked for strict supersolutions of self-similar form

$$\bar{u}(x_1, x', t) = \bar{u}(x_1, 0, t) = f(\xi) \cdot \varphi(t) \quad (4)$$

where  $\varphi(t) = e^{M(t+T)}$ ,  $\xi = x_1 \cdot \varphi^{-K}(t)$ ,  $L > 0$ ,  $T > 0$  and  $f(\xi)$  satisfying

$$\begin{cases} \left( |(f^m(\xi))'|^{p-2} (f^m(\xi))' \right)' + M(m - (m+1)/p) \xi f'(\xi) + f^\beta(\xi) - Mf(\xi) = 0 \\ -|f^m|^{p-2} f^m(0) = f^{q_0}(0) \end{cases} \quad (5)$$

According to the fixed point theorem, it can be demonstrated that the problem (5) has a unique, nonnegative, and nontrivial solution, which also has compact support. Let  $T > 0$  be chosen large enough such that  $\bar{u}(x, 0) \geq u_0(x)$  and  $\bar{u}(0, t) \geq 1$ . Under these conditions, for any  $0 \leq q \leq q_0$ , the function  $u(x, t)$  serves as a supersolution to problem (1). By applying the comparison principle, we conclude that  $u(x, t) \leq \bar{u}(x, t)$  for all  $(x, t) \in R_+^N \times (0, +\infty)$ , which ensures the global existence of  $u(x, t)$ .

Remark 1. Theorem demonstrates that  $q_c = \left(\frac{p-1}{p}\right)(m+1-\beta)$  is critical global existence of the problem (1)-(3).

Theorem 2. If  $q > q_c$ ,  $0 < \beta \leq 1$ , and the initial function  $u_0(x)$  is sufficiently small, then any solution of problem (1)-(3) is global.

Proof. Theorems can be proved in the same manner as it was done in [2].

## References

1. Wanjuan Du, Zhongping Li. Critical exponents for the heat conduction equation with a nonlinear boundary condition // Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 7, 2013, no. 11, 517-524
2. A. A. Alimov, Z. R. Rakhmonov. Global and Blow-Up Solutions for a Nonlinear Diffusion System with a Source and Nonlinear Boundary Conditions // Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. nauki. 2023. vol. 43. no. 2. P. 9-19
3. Aripov M.M., Rakhmonov Z.R., Alimov A.A. On the behaviors of solutions of a nonlinear diffusion system with a source and nonlinear boundary conditions // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics, No. 2024, 1(113).

## Proximal bundle for a class of convex multi-objective programming

© **Xiao Dan Chao**

Postgraduate

Dalian Maritime University

China, 116026, Liaoning Province, Dalian, Linghai Road,1

chaoxiaodan@dlmu.edu.cn

© **Ming Huang**

Doctor of Mathematics,

Academic title Associate Professor,

Associate Professor of the Department of Mathematics

Dalian Maritime University

China, 116026, Liaoning Province, Dalian, Linghai Road,1

huangming0224@dlmu.edu.cn; corresponding author

© **Ya Jing Zhang**

Postgraduate

Dalian Maritime University

China, 116026, Liaoning Province, Dalian, Linghai Road,1

zhangyajing@dlmu.edu.cn

© **Si Da Lin**

Doctor of Mathematics,

Lecturer

Dalian Maritime University

China, 116026, Liaoning Province, Dalian, Linghai Road,1

linsida@dlmu.edu.cn

**Abstract:** In this paper, we develop a new set of infeasible proximal bundle methods for nonsmooth convex multi-objective optimization problems with constraints. The methods are flexible as initial points need not be feasible. These methods handle constrained multi-objective functions directly, avoiding the traditional scalarization approach. An aggregation technique is introduced to reduce the number of elements and accelerate convergence. Under reasonable assumptions, we prove that the sequence generated by these methods converges to a global Pareto optimal solution.

**Keywords:** nonsmooth optimization, multi-objective optimization, bundle methods, constrained optimization, convex optimization

**Acknowledgments:** This paper is supported by the National Key Research and Development Program of China under No. 2022YFB3304600; the Fundamental Research Funds for the Central Universities of DMU on 2025.

**Introduction:** In this paper, we focus on the following convex multi-objective optimization with constraints problem:

$$(MOP) \quad \begin{cases} \min \Phi(x) := (\varphi_1(x), \dots, \varphi_p(x)), \\ \text{s. t. } \phi(x) \leq 0, \end{cases} \quad (1)$$

where  $\varphi_i : R^n \rightarrow R, i = 1, 2, \dots, p$  and  $\phi : R^n \rightarrow R$  are closed proper convex functions, but not necessarily differentiable. For simplicity, we focus on a single constraint function in (MOP). In cases involving multiple inequality constraints, the maximum function can be employed to aggregate these constraints into a single equivalent constraint.

The references [2, 3, 4, 5, 6] provide several key definitions and theorems related to multiobjective optimization. Building on this foundation, we refer to the principles of the proximal bundle method as discussed in [1, 7, 8]. In particular, the theorems presented in [1] offer valuable insights into the application of the proximal bundle method for solving nonsmooth convex constrained optimization problems.

In this paper, we employ a class of infeasible proximal bundle methods to address nonsmooth convex constrained multiobjective optimization problems. To enhance the efficiency of our approach, we incorporate aggregation techniques into the method, thereby accelerating the convergence rate of the algorithm.

## References

1. Sagastizábal, C., and Solodov, M. An infeasible bundle method for nonsmooth convex constrained optimization without a penalty function or a filter. *SIAM Journal on Optimization*, 16(1)(2005): 146-169.
2. Kiwiel, K. C. A descent method for nonsmooth convex multiobjective minimization. *Large scale systems*, 8(2)(1985): 119-129.
3. Mäkelä, M. M., Karmitsa, N., and Wilppu, O. Proximal bundle method for nonsmooth and nonconvex multiobjective optimization. In *Mathematical modeling and optimization of complex structures*. Cham: Springer International Publishing, (2015): 191-204.
4. Miettinen, K., and Mäkelä, M. M. Interactive bundle-based method for nondifferentiable multiobjective optimization. *Optimization*, 34(3)(1995): 231-246.
5. Vieira, D. A., and Lisboa, A. C. A cutting-plane method to nonsmooth multiobjective optimization problems. *European Journal of Operational Research*, 275(3)(2019): 822-829.
6. Pang, L., Meng, F., and Yang, J. A class of infeasible proximal bundle methods for nonsmooth nonconvex multi-objective optimization problems. *Journal of Global Optimization*, 85(4)(2023): 891-915.
7. Huang, M., Zhang, S., Feng, Y., Yuan, J., and Bei, H. A proximal bundle approach for solving the generalized variational inequalities with inexact data. *Applied Mathematics and Computation*, 491(2025), 129087.
8. Feng, Y., Huang, M., Zhang, S., Chao, X., and Lin, S. A proximal bundle technique for solving equilibrium problems with inexact information. In *Journal of Physics: Conference Series*, (2024) Vol. 2905. No. 1. IOP Publishing.



## An alternating linearization bundle method for solving MPEC problem

© **YaJing Zhang**

Postgraduate

Dalian Maritime University

China, 116026, Liaoning Province, Dalian, Linghai Road, 1

zhangyajing@dlmu.edu.cn

© **Ming Huang**

Doctor of Mathematics

Academic title Associate Professor

Associate Professor of the Department of Mathematics

Dalian Maritime University

China, 116026, Liaoning Province, Dalian, Linghai Road, 1

huangming0224@dlmu.edu.cn

© **YongXiu Feng**

Postgraduate

Dalian Maritime University

China, 116026, Liaoning Province, Dalian, Linghai Road, 1

fengyongxiu2001@dlmu.edu.cn

© **SiDa Lin**

Doctor of Mathematics

Academic title Lecturer

Lecturer of the Department of Mathematics

Dalian Maritime University

China, 116026, Liaoning Province, Dalian, Linghai Road, 1

linsida@dlmu.edu.cn; corresponding author

**Abstract:** This research examines a particular type of MPEC issue using the alternating linearization bundle approach. In essence, this specific MPEC issue is a bilevel programming problem. The objective function  $f$  is presumed to be simple, whereas the constraint function  $h$  is anticipated to be more complex. The fundamental strategy for addressing this problem involves employing a parametric minimization method to convert the constrained optimization into a series of unconstrained single-level optimization tasks, which involve minimizing the sum of two convex functions. Subsequently, two approximate subproblems are formulated, and the alternating linearization bundle technique is utilized to iteratively solve them. The convergence of this algorithm is demonstrated, indicating that the sequence of iterative points will converge to a stationary solution.

**Keywords:** MPEC problem, bilevel programming problem, alternating linearization bundle method, parametric minimization technique.

**Acknowledgements** This paper is supported by the National Key Research and Development Program of China under No. 2022YFB3304600; the Fundamental Research

Funds for the Central Universities of DMU on 2025.

**Introduction:** In this work, we investigate a specific class of nonsmooth convex mathematical programs with equilibrium constraints (MPEC), which can be formulated as follows:

$$\begin{cases} \text{minimize} & f(x, y) \\ \text{subject to} & (x, y) \in C \times S. \end{cases}$$

Here,  $C \subset \mathbb{R}^m$  and  $S \subset \mathbb{R}^n$  are nonempty convex sets, and

$$S := \arg \min_{y \in \mathbb{R}^n} h(y).$$

The functions  $f : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$  and  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  are closed, proper and convex, but they may not be differentiable. This particular MPEC problem can be viewed as a bilevel programming problem (BLPP), where the upper-level objective function is convex, and the lower-level problem is a nonsmooth convex optimization task. Consequently, the main objective of this paper is to address a bilevel convex programming problem.

## References

1. R. T. Rockafellar, Convex analysis, *Princeton University Press*, Princeton, NJ, 1970.
2. R. T. Rockafellar and R. J. B. Wets, Variational analysis, *Springer*, Berlin, 1998.
3. D. Li, L. P. Pang, S. Chen, A proximal alternating linearization method for nonconvex optimization problems, *Optimization Methods and Software*, 2014, 29(4): 771-785.
4. R. T. Rockafellar, Monotone operators and the proximal point algorithm, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1976, 14(2): 877-898.
5. D. Li, L. P. Pang and Z. Q. Xia, An approximate alternating linearization decomposition method, *Journal of Applied Mathematics and Informatics*, 2010, 28(5-6): 1249-1262.
6. M. V. Solodov, A bundle method for a class of bilevel nonsmooth convex minimization problem, *SIAM Journal on Optimization*, 2007, 18(1): 242-259.
7. S. D. Lin, Y. J. Zhang, M. Huang, et al, Inexact proximal penalty alternating linearization decomposition scheme of nonsmooth convex constrained optimization problem, *Applied Numerical Mathematics*, 2025, 211: 42-60.
8. M. Huang, Y. Hue, P. P. Qiao, et al, Proximal decomposition of convex optimization via an alternating linearization algorithm with inexact oracles, *Journal of Industrial and Management Optimization*, 2024, 20(11): 3355-3372.

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                                                                                                   |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Предисловие .....                                                                                                                                                                 | 3  |
| <i>Абдрахманова Р. П., Абдрахманов А. М.</i> О многомерных аналогах системы<br>А. В. Бицадзе.....                                                                                 | 4  |
| <i>Абидуев П. Л., Дармаев Т. Г.</i> Переходный процесс к установившемуся периодическому температурному режиму.....                                                                | 5  |
| <i>Абидуев П. Л., Дармаев Т. Г.</i> Расчет нестационарных аэродинамических характеристик произвольного профиля .....                                                              | 7  |
| <i>Аблабеков Б. С., Курманбаева А. К.</i> Обратные задачи определения параметров, зависящего от времени в псевдопараболическом уравнении с нелокальными граничными условиями..... | 9  |
| <i>Абыллаев Б. М., Чумакова Н. А.</i> О существовании трех симметричных решений одной краевой задачи.....                                                                         | 11 |
| <i>Аниконов Д. С.</i> Некоторые рекомендации по выбору формул обращения преобразования Радона.....                                                                                | 13 |
| <i>Артюшин А. Н.</i> Одна теорема вложения для пространств функций с переменной гладкостью.....                                                                                   | 14 |
| <i>Аттаев А. Х.</i> Краевые задачи для нагруженного гиперболического уравнения с инволютивным отклонением.....                                                                    | 15 |
| <i>Барсуев С. Г., Ханхасаев В. Н., Баиров С. А.</i> О единственности консервативного решения задачи о колебаниях каскадной системы тел на упругом стержне.....                    | 16 |
| <i>Баротов Б. Х., Кожанов А. И.</i> О разрешимости краевых задач для интегродифференциальных уравнений с вырождением.....                                                         | 18 |
| <i>Белых В. Н.</i> О неустановившемся движении конечного осесимметричного объема идеальной несжимаемой жидкости.....                                                              | 19 |
| <i>Бобоев К. С.</i> Градиентный метод решения обратной задачи для кинетического уравнения переноса в $P_n$ – приближении.....                                                     | 20 |
| <i>Бондарь Л. Н., Ма С.</i> О разрешимости одной краевой задачи для псевдогиперболического уравнения шестого порядка.....                                                         | 22 |
| <i>Бондарь Л. Н., Мингнарлов С. Б. Бондарь Л. Н., Мингнарлов С. Б.</i> О разрешимости задачи Коши для одной псевдогиперболической системы.....                                    | 24 |
| <i>Бурюхаев А. Э.</i> Нелокальные задачи с интегральными условиями для некоторых классов уравнений соболевского типа.....                                                         | 26 |
| <i>Васильева Е. Г., Булгатова Е. Н.</i> Норма оптимального периодического функционала погрешности квадратурных формул при предельных значениях $p$ .....                          | 27 |
| <i>Васильев В. Б., Сопова Т. В.</i> О разрешимости эллиптических псевдодифференциальных уравнений.....                                                                            | 29 |
| <i>Вершинина Д. А., Федоров В. Е.</i> Задача типа Коши для линейных неоднородных уравнений с дробной производной Римана–Лиувилля.....                                             | 31 |
| <i>Волков Ю. С.</i> Оценки решений разностных уравнений и бесконечных систем линейных уравнений.....                                                                              | 33 |
| <i>Воронин А. Ф.</i> Решение многомерного уравнения типа свертки с вырождающимся ядром в окрестности нуля.....                                                                    | 35 |
| <i>Демиденко Г. В.</i> Экспоненциальная дихотомия для дифференциальных и разностных уравнений с периодическими коэффициентами.....                                                | 36 |
| <i>Демиденко Г. В., Нурмахматов В. С.</i> Энергетические оценки для одного класса псевдогиперболических операторов с переменными коэффициентами.....                              | 38 |
| <i>Джамалов С. З.</i> Прямые и обратные задачи для многомерного уравнения смешанного типа высокого порядка.....                                                                   | 40 |

|                                                                                                                                                                                |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <i>Джамалов С. З., Шакиров А. А.</i> Об одной коэффициентной обратной задаче с нелокальными условиями для трехмерного уравнения Чаплыгина в параллелепипеде.....               | 42 |
| <i>Егоров И. Е.</i> Краевая задача Врагова с интегральным граничным условием по времени для уравнения смешанного типа второго порядка.....                                     | 44 |
| <i>Еремчук М. П.</i> Анализ экранированной гармонической системы в трехмерной области методом итерационных расширений.....                                                     | 45 |
| <i>Евсеев Ф. А.</i> Обобщенная разрешимость краевых задач для квазигидродинамических уравнений в весовых пространствах Соболева.....                                           | 47 |
| <i>Жаглова А. Э.</i> Использование полуаналитического метода для решения задач численного моделирования скважин.....                                                           | 49 |
| <i>Жигжитжанов Б. В.</i> Задача для уравнения соболевского типа 4го порядка с вырождением.....                                                                                 | 51 |
| <i>Зикиров О. С.</i> Нелокальные краевые задачи с интегральными условиями для уравнений в частных производных третьего порядка.....                                            | 52 |
| <i>Ившин М. С.</i> Об одной задаче управления для уравнения диффузии.....                                                                                                      | 53 |
| <i>Калитвин В. А.</i> О весовых дельта- функциях Радона–Киприянова с отрицательными степенями веса, сосредоточенными на поверхности.....                                       | 54 |
| <i>Казьмин И. Д.</i> Методы неподвижных точек для поиска экстремальных управлений..                                                                                            | 57 |
| <i>Кожанов А. И.</i> Краевые задачи для дифференциальных уравнений с незнакомой определенной характеристической формой.....                                                    | 59 |
| <i>Кожанов А. И., Бжеумихова О. И.</i> О разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных с инволюцией и вырождением в старших производных..... | 60 |
| <i>Кожанов А. И., Маманазаров Д. С.</i> Нелокальные краевые задачи для вырождающихся квазипараболических уравнений нечетного порядка.....                                      | 62 |
| <i>Кожанов А. И., Телешева Л. А.</i> Об одной задаче восстановления правой части линейаризованного уравнения Линя–Рейснера–Цзяня.....                                          | 64 |
| <i>Кожанов А. И., Сорокин Р. В.</i> Об одной обратной задаче для гиперболического уравнения третьего порядка с интегральным условием переопределения.....                      | 65 |
| <i>Кожанов А. И., Шипина Т. Н.</i> О некоторых обратных задачах для линейного эллиптического уравнения.....                                                                    | 67 |
| <i>Кошелева Ю. А.</i> Обобщенная задача Самарского–Ионкина для ультрапараболических уравнений.....                                                                             | 69 |
| <i>Криворотько О. И., Зятыков Н. Ю.</i> Бейсовский подход к оценке параметров распространения эпидемий.....                                                                    | 70 |
| <i>Кулеш Т. Д.</i> О разрешимости задачи Стефана для случая сложной структуры вещества.....                                                                                    | 72 |
| <i>Лаврентьев М. М.</i> О возможности оперативного прогноза опасности цунами.....                                                                                              | 74 |
| <i>Лазарев Н. П., Никифоров Д. Я., Романова Н. А.</i> Задача о контакте пластины по боковой поверхности с препятствием заданной ширины.....                                    | 75 |
| <i>Лемешкова Е. Н.</i> Спектр краевой задачи двумерной тепловой конвекции.....                                                                                                 | 77 |
| <i>Любанова А. Ш.</i> Об обратных задачах нелинейной фильтрации.....                                                                                                           | 79 |
| <i>Ляхов Л. Н., Грязнева Е. А.</i> О $B$ - полигармонических операторах.....                                                                                                   | 81 |
| <i>Ляхов Л. Н., Булатов Ю. Н., Роцупкин С. А.</i> Теорема о норме сингулярных $J$ - псевдодифференциальных операторов Киприянова.....                                          | 83 |
| <i>Максудов Р. З.</i> Об одном алгоритме решения искомой многомерной гиперболической задачи.....                                                                               | 85 |
| <i>Маматов Ж. А., Кожанов А. И.</i> Нелокальные краевые задачи пространственного типа для квазиультрапараболических уравнений.....                                             | 88 |

|                                                                                                                                                                                    |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>Маматова Н. Т.</i> Дозвуковое обтекание упруго-пластически деформируемых стержней, взаимодействующих с окружающей средой.....                                                   | 89  |
| <i>Мижидон А. Д., Хамханов А. К.</i> Математическое моделирование системы твёрдых тел, прикреплённых к двум упругим стержням.....                                                  | 90  |
| <i>Намсараева Г. В.</i> О задаче восстановления граничных режимов для уравнения Буссинеска.....                                                                                    | 92  |
| <i>Нестеров С. А., Дударев В. В.</i> Идентификация неоднородных свойств функционально-градиентного упругого стержня с пустыми порами.....                                          | 94  |
| <i>Николаева Н. А.</i> Сопряжение слабо искривленных включений в упругом теле с трещиной.....                                                                                      | 96  |
| <i>Николаев О. Ю.</i> Нелинейная обратная коэффициентная задача для квазипараболического уравнения.....                                                                            | 97  |
| <i>Павлов С. С., Кожанов А. И.</i> Вырождающиеся гиперболические уравнения с неизвестным коэффициентом диссипации.....                                                             | 98  |
| <i>Петракова В. С.</i> Обратные задачи оптимального управления для описания социально-эпидемиологических процессов.....                                                            | 99  |
| <i>Пинигина Н. Р.</i> Параболические уравнения с произвольным направлением эволюции и разрывным коэффициентом.....                                                                 | 101 |
| <i>Плеханова М. В.</i> Обратная задача с постоянным неизвестным коэффициентом с производной Джрбашяна – Нерсесяна.....                                                             | 102 |
| <i>Подгаев А. Г.</i> Теоремы компактности для задач с неизвестными границами.....                                                                                                  | 104 |
| <i>Попов Н. С., Попов С. В.</i> Нелокальные интегро-дифференциальные краевые задачи многомерных уравнений третьего порядка.....                                                    | 106 |
| <i>Псху А. В.</i> Задача определения порядка для диффузионно-волнового уравнения с оператором Джрбашяна–Нерсесяна.....                                                             | 108 |
| <i>Радкевич Е. В., Васильева О. А., Филлипов Г. А.</i> О проблеме стабилизации периодических возмущений положения равновесия для двумерного кинетического уравнения Бродвелла..... | 110 |
| <i>Розанова О. С.</i> Классы единственности вырождающихся параболических уравнений и оценка стоимости опционов.....                                                                | 113 |
| <i>Сагимбаева А. О., Плеханова М. В., Федоров В. Е.</i> Нелинейная обратная задача с секториальным оператором и производными Джрбашяна – Нерсесяна.....                            | 115 |
| <i>Семёнов А. С., Бебихов Ю. В., Семёнова М. Н., Якушев И. А.</i> Математическое и имитационное моделирование при изучении электропластического эффекта в металлах.....            | 117 |
| <i>Скрипка Н. М., Федоров В. Е.</i> Линейное уравнение на $R$ с производной Ливилля и двустороннее преобразование Лапласа.....                                                     | 120 |
| <i>Скворцова М. А.</i> Уравнения нейтрального типа: приложения к моделям нейронных сетей.....                                                                                      | 122 |
| <i>Солдатов А. П.</i> Обобщенная задача Дирихле–Неймана для эллиптического уравнения четвертого порядка.....                                                                       | 124 |
| <i>Солдатов О. А.</i> Идентификация коэффициента теплообмена по граничным интегральным данным.....                                                                                 | 125 |
| <i>Спиридонова Н. Р.</i> Краевые задачи для вырождающихся дифференциальных уравнений с кратными характеристиками.....                                                              | 127 |
| <i>Степанова И. В.</i> Моделирование тепломассопереноса в двухслойной системе на основе точных решений уравнений конвекции.....                                                    | 128 |
| <i>Талышев А. А.</i> О касательных преобразованиях Ли систем обыкновенных дифференциальных уравнений.....                                                                          | 130 |
| <i>Тарасова Г. И.</i> Нелокальные задачи с обобщенным условием Ионкина для некоторых классов уравнений соболевского типа высокого порядка.....                                     | 132 |

|                                                                                                                                                                                                                               |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>Трунин Д. О.</i> К оптимизации нелинейных управляемых систем с ограничениями..                                                                                                                                             | 133 |
| <i>Тукмачева Ю. А.</i> О некоторых классах обратных задач по определению коэффициента поглощения.....                                                                                                                         | 135 |
| <i>Фатьянов А. Г.</i> Метод Зоммерфельда решения динамической смешанной задачи для жесткого штампа.....                                                                                                                       | 137 |
| <i>Федоров В. Е.</i> Нелокальная краевая задача для уравнения смешанно-составного типа.....                                                                                                                                   | 140 |
| <i>Федоров Е. В., Майер А. Е.</i> Численное моделирование дробеструйной обработки с использованием бессеточного метода Галеркина.....                                                                                         | 142 |
| <i>Федоров В. Е., Плеханова М. В.</i> Сильно непрерывные разрешающие семейства операторов для уравнений с производной Хилфера.....                                                                                            | 144 |
| <i>Фурцев А. И.</i> Задачи о равновесии нелинейно упругих тел с жесткими включениями и трещинами с условиями непроникания.....                                                                                                | 146 |
| <i>Ханхасаев В. Н.</i> Четвертая краевая задача для нелинейного смешанного уравнения теплопроводности с учетом закона Аррениуса.....                                                                                          | 147 |
| <i>Ханхасаев В. Н., Баиров С. А.</i> Смешанная начально-краевая задача для трехмерного по пространству нелинейного гипербола-параболического уравнения.....                                                                   | 149 |
| <i>Ханхасаев В. Н., Пластинина В. М.</i> Осесимметрический случай для парабола-гиперболического уравнения теплопроводности.....                                                                                               | 151 |
| <i>Хлуднев А. М.</i> Асимптотика решений в задаче о слабо искривленных включениях в упругом теле.....                                                                                                                         | 153 |
| <i>Цыренжапов Н. Б., Урбаханов А. В.</i> Оценка снизу нормы функционала погрешности кубатурных формул общего вида в пространстве Соболева $L_p^m(E_n)$ .....                                                                  | 155 |
| <i>Чеботарев А. Ю.</i> Обратные задачи для квазилинейной модели сложного теплообмена.....                                                                                                                                     | 158 |
| <i>Чиркунов М. Ю.</i> Инвариантные подмодели обобщенной модели Хохлова-Заболоцкой-Кузнецова нелинейной гидроакустики в кубически-нелинейной среде при отсутствии диссипации, описывающей затухание ультразвуковых пучков..... | 160 |
| <i>Чиркунов Ю. А., Чиркунов М. Ю.</i> Инвариантные подмодели обобщенной осесимметричной модели движения жидкостей, газов и их смесей в пористой среде при наличии нестационарного внешнего воздействия.....                   | 162 |
| <i>Чумакова Н. А., Кленов О. П.</i> О моделировании экзотермической реакции в пористом сотовом катализаторе.....                                                                                                              | 164 |
| <i>Чумаков Г. А., Чумакова Н. А.</i> Моделирование хаотической динамики гетерогенных каталитических реакций с иерархией характерных времен.....                                                                               | 166 |
| <i>Шадрина Н. Н.</i> Некоторые нелокальные задачи для дифференциальных уравнений эллиптического типа с разрывным коэффициентом и их корректность.....                                                                         | 169 |
| <i>Шморган С. А.</i> Обратная задача об определении точечных источников.....                                                                                                                                                  | 171 |
| <i>Юмов И. Б., Юмова Ц. Ж.</i> О резонансе на бесконечно тонком крестообразном препятствии в круглом волноводе.....                                                                                                           | 173 |
| <i>Ashurov R. R., Muhiddinova O. T.</i> Space-Time-Dependent Source Identification Problem for a Subdiffusion Equation.....                                                                                                   | 175 |
| <i>Fayazov K. S., Juraeva D. S.</i> An inverse problem for a mixed-type equation in space.....                                                                                                                                | 177 |
| <i>Glasko Y. V.</i> Sweeping of density for the graph.....                                                                                                                                                                    | 179 |
| <i>Hong Kai Song, Ming Huang, Xiao Dan Chao, Yang Yang</i> Inexact Bundle Method with exact Penalty for Constrained Nonsmooth Optimization.....                                                                               | 181 |
| <i>Nargiza Ochilova, Nozima Ochilova</i> Nonlocal problem for the degenerating mixed type equation.....                                                                                                                       | 183 |

|                                                                                                                                     |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>Li Shuguang</i> High-precision difference schemes for nonlinear dispersive wave models                                           | 185 |
| <i>Pyatkov S. G.</i> Coefficient inverse problems of identification of thermophysical parameters....                                | 187 |
| <i>Rakhmonov Z., Yarmetova D.</i> Global solutions for a nonlinear diffusion problem.....                                           | 189 |
| <i>Xiao Dan Chao, Ming Huang, Ya Jing Zhang, Si Da Lin</i> Proximal bundle for a class of convex multi-objective programming.....   | 191 |
| <i>Ya Jing Zhang, Ming Huang, Yong Xiu Feng, Si Da Lin</i> An alternating linearization bundle method for solving MPEC problem..... | 193 |

Научное издание

**Дифференциальные уравнения  
и математическое моделирование**

*Тезисы докладов III Международной научной конференции,  
посвящённой 80-летию со дня рождения профессора В. Н. Врагова*

(Улан-Удэ – оз. Байкал, 18–22 августа 2025 г.)

Редактор И. Б. Юмов

Компьютерная верстка И. Д. Казьмина

Св-во о государственной аккредитации № 2670 от 11 августа 2017 г.

Подписано в печать 21.11.25. Формат 60 x 84 1/8.

Усл. печ. л. 22,79. Уч.-изд. л. 10,62. Заказ 141.

Издательство Бурятского госуниверситета им. Д. Банзарова  
670000, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 4  
rio@bsu.ru