

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
БУРЯТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

*Материалы Пятой научной конференции
с международным участием,
посвященной 100-летию профессора Р. Н. Щербакова*

(Улан-Удэ — оз. Байкал, 3–6 июля 2018 г.)

Улан-Удэ
Издательство Бурятского госуниверситета
2018

УДК 514.75-77, 51.72-74, 372.851

ББК 22, 74

Г 361

Редакционная коллегия

В. Б. Цыренова, канд. физ.-мат. наук, д-р пед. наук, отв. редактор; **А. М. Бубенчиков**, д-р физ.-мат. наук, проф.; **Е. П. Миронова**, канд. пед. наук; **Н. Р. Щербаков**, д-р физ.-мат. наук, зав. каф. геометрии; **А. С. Челнокова**, аспирант

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Проект № 18-01-20037\18)

Текст речтается в авторской редакции

Г 361 Геометрия многообразий и её приложения: материалы Пятой научной конференции с международным участием, посвященной 100-летию профессора Р. Н. Щербакова (Улан-Удэ — оз. Байкал, 3–6 июля 2018 г.) / отв. ред. В. Б. Цыренова. — Улан-Удэ: Изд-во Бурятского госуниверситета, 2018. — 334 с.
ISBN 978-5-9793-1239-2

В сборник включены тезисы и статьи участников Пятой научной конференции с международным участием «Геометрия многообразий и её приложения», посвященной 100-летию профессора Р. Н. Щербакова. Работа представлена в следующих направлениях: геометрия дифференцируемых многообразий, математическое и компьютерное моделирование прикладных задач механики, состояние и перспективы математического образования.

Geometry of manifolds and its applications: the Fifth scientific conference with international participation, devoted to the 100th anniversary of Professor R. N. Shcherbakov (Ulan-Ude — Lake Baikal, July 3– 6, 2018) / resp. ed. V. B. Tsyrenova. — Ulan-Ude: Buryat State University Publishing Department, 2018. — 334 p.
ISBN 978-5-9793-

The book includes the participants` abstracts and articles of the fifth scientific conference with international participation, devoted to the 100th anniversary of Professor R.N. Shcherbakov «Geometry of manifolds and its applications». There are following fields such as: geometry of differentiable manifolds, mathematical and computer modeling of applied problems of mechanics, the condition and perspectives of the mathematical education.

УДК 514.75-77, 51.72-74, 372.851

ББК 22, 74

ISBN 978-5-9793-1239-2

© Бурятский госуниверситет, 2018

ГЕОМЕТРИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ

УДК 517.11

© Л. В. Антонова

Вещественные гиперповерхности в пространствах над алгеброй двойных чисел $R_2(e)$

Аннотация. В статье рассматривается гиперповерхность V_3 в биевклидовом пространстве гиперболического типа Re_4 . Ранее для этой гиперповерхности V_3 были получены деривационные формулы, первая квадратичная форма. Показано, что угол ψ наклона координатной кривой $\Omega = \Omega = 0$ равен углу наклона гиперповерхности V_3 . Найдены другие кривые, угол наклона которых равен углу наклона гиперповерхности. Среди этих кривых существуют только две кривые, касательные которых принадлежат 1-голоморфной 2-плоскости.

Рассматриваются кривые, угол наклона которых связан с углом наклона φ гиперповерхности V_3 соотношением $\varphi + \psi = \frac{\dot{i}}{2}$. Представлено дифференциальное уравнение характеризующее такие кривые. Среди этих кривых существует также только две кривые, касательные которых принадлежат 1-голоморфной 2-плоскости.

Доказана теорема, что, если центральные антиголоморфные кривые сети Σ_3 гиперповерхности V_3 являются геодезическими, то гиперповерхность расслаивается на 1-голоморфные 2-поверхности.

Ключевые слова: пространства над алгебрами двойных чисел, вещественная гиперповерхность, биевклидово пространство, угол наклона, антиголоморфные кривые.

© L. V. Antonova

REAL HYPERSURFACES IN SPACES OVER THE ALGEBRA OF DOUBLE NUMBERS $R_2(e)$

Abstract. The article considers a hypersurface in a bieucclidean space of hyperbolic type Re_4 . Earlier, for this hypersurface derivational formulas were obtained, the first quadratic form. It is shown that the angle ψ of the inclination of the coordinate curve $\Omega = \Omega = 0$ is equal to the slope of the hypersurface. Other curves are found whose

slope angle is equal to the slope angle of the hypersurface. Among these curves, there are only two curves whose tangents belong to the 1-holomorphic 2-plane.

The article considers curves whose angle of inclination ψ is related to the angle φ the slope of the hypersurface by the relation $\varphi + \psi = \frac{\ddot{I}}{2}$. A differential equation characterizing such curves. Among these curves there are also only two curves whose tangents belong to the 1-holomorphic 2-plane.

A theorem is proved that if the central antiholomorphic curves of the net Σ_3 of the hypersurface are geodesic, then the hypersurface is fibered into 1-holomorphic 2-surfaces.

Keywords: space over the algebra of double numbers, real hypersurface, biucclidean space, tilt angle, antigolomorphic curves.

Рассмотрим гиперповерхность V_3 в биевклидовом пространстве гиперболического типа Re_4 [1].

Деривационные формулы канонического адаптированного репера R_0 гиперповерхности V_3 имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} d\vec{X} &= \overset{+}{\Omega} \vec{E}_1^+ + \overset{+}{\Omega} (\vec{E}_2^+ - tg\varphi \vec{E}_2^-) + \overset{-}{\Omega} \vec{E}_1^-, d\vec{E}_1^+ = \overset{+}{\Omega}_1 \vec{E}_2^+, \\ d\vec{E}_2^+ &= -\overset{+}{\Omega}_1 \vec{E}_1^+, d\vec{E}_1^- = \overset{-}{\Omega}_1 \vec{E}_2^-, d\vec{E}_2^- = -\overset{-}{\Omega}_1 \vec{E}_2^-, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \overset{+}{\Omega}_1 tg\varphi &= p_{11} \overset{+}{\Omega} + p_{12} \overset{+}{\Omega} + p_{13} \overset{-}{\Omega}, \\ -\frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} &= p_{12} \overset{+}{\Omega} + p_{22} \overset{+}{\Omega} + p_{23} \overset{-}{\Omega}, \\ \overset{-}{\Omega}_1 &= p_{13} \overset{+}{\Omega} + p_{23} \overset{+}{\Omega} + p_{33} \overset{-}{\Omega}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Первая квадратичная форма гиперповерхности V_3 имеет вид:

$$\hat{O}_1 = (d\vec{X})^2 = \left(\overset{+}{\Omega} \right)^2 + (1 + tg^2\varphi) \left(\overset{+}{\Omega} \right)^2 + \left(\overset{-}{\Omega} \right)^2,$$

а квадратичная форма $\hat{O}_3 = \left(\overset{+}{\Omega} \right)^2 + (1 - tg^2\varphi) \left(\overset{+}{\Omega} \right)^2 - \left(\overset{-}{\Omega} \right)^2$, обращение в

нуль которой выделяет антиголоморфные кривые. Если ψ - угол наклона некоторой кривой, принадлежащей поверхности, то $tg\psi = d\vec{X}_- / d\vec{X}_+$, т.е.

$$\cos 2\psi = \frac{\hat{O}_3}{\hat{O}_1} = \frac{\left(\begin{smallmatrix} +1 \\ \Omega \end{smallmatrix}\right)^2 + (1 - tg^2 \varphi) \left(\begin{smallmatrix} +2 \\ \Omega \end{smallmatrix}\right)^2 - \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ \Omega \end{smallmatrix}\right)^2}{\left(\begin{smallmatrix} +1 \\ \Omega \end{smallmatrix}\right)^2 + (1 + tg^2 \varphi) \left(\begin{smallmatrix} +2 \\ \Omega \end{smallmatrix}\right)^2 + \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ \Omega \end{smallmatrix}\right)^2},$$

отсюда следует геометрическое значение отношения квадратичных форм \hat{O}_3 и \hat{O}_1 . Экстремальными значениями функции $\cos 2\psi$ являются $\pm 1, \cos 2\varphi$. Угол ψ наклона координатной кривой $\begin{smallmatrix} +1 \\ \Omega \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} -1 \\ \Omega \end{smallmatrix} = 0$ равен углу наклона гиперповерхности V_3 . Найдем другие кривые, угол наклона которых равен углу наклона гиперповерхности. Тогда главные формы $\begin{smallmatrix} +1 \\ \Omega \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} -1 \\ \Omega \end{smallmatrix}$ должны удовлетворять одному из соотношений $\begin{smallmatrix} -1 \\ \Omega \end{smallmatrix} \pm tg \varphi \begin{smallmatrix} +1 \\ \Omega \end{smallmatrix} = 0$. Среди этих кривых существуют только две кривые, касательные которых принадлежат 1-голоморфной 2-плоскости.

Рассмотрим кривые, угол наклона ψ которых связан с углом наклона φ гиперповерхности V_3 соотношением $\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}$. Такие кривые характеризуются дифференциальным уравнением:

$$(1 - tg^4 \varphi) \left(\begin{smallmatrix} +2 \\ \Omega \end{smallmatrix}\right)^2 + \left(\begin{smallmatrix} +1 \\ \Omega \end{smallmatrix}\right)^2 - \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ \Omega \end{smallmatrix}\right)^2 - \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ \Omega \end{smallmatrix}\right)^2 tg^2 \varphi = 0.$$

Среди этих кривых существует также только две кривые, касательные которых принадлежат 1-голоморфной 2-плоскости.

В общем репере $R\{X, \bar{J}_a\}$, где векторы \bar{J}_a имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{J}_1 &= \bar{E}_1^+ \cos \alpha + \bar{E}_1^- \sin \alpha, \\ \bar{J}_2 &= -\bar{E}_1^+ \sin \alpha + \bar{E}_1^- \cos \alpha, \\ \bar{J}_3 &= \bar{E}_2^+ \cos \varphi + \bar{E}_2^- \sin \varphi, \\ \bar{J}_4 &= \bar{E}_2^- \cos \varphi + \bar{E}_2^+ \sin \varphi, \end{aligned} \tag{3}$$

гиперповерхность задается уравнением Пфаффа $\theta^4 = 0$, а формы $\theta_i^4 = b_{ij} \theta^j$, $b_{ij} = b_{ji}$, $(i, j = \overline{1,3})$, $\theta_1^2 = d\alpha$, $\theta_3^4 = -d\varphi$

и имеем следующие связи между формами θ и Ω :

$$\left. \begin{aligned} \theta_1^3 \cos \varphi + \theta_1^4 \sin \varphi &= \overset{+2}{\Omega_1} \cos \alpha, -\theta_1^3 \sin \varphi + \theta_1^4 \cos \varphi = \overset{-2}{\Omega_1} \sin \alpha, \\ \theta_2^3 \cos \varphi + \theta_2^4 \sin \varphi &= \overset{+2}{\Omega_1} \cos \alpha, -\theta_2^3 \sin \varphi + \theta_2^4 \cos \varphi = \overset{-2}{\Omega_1} \sin \alpha, \\ \theta_1^4 \cos \alpha - \theta_2^4 \sin \alpha &= \overset{+2}{\Omega_1} \sin \varphi, \theta_1^4 \sin \alpha + \theta_2^4 \cos \alpha = \overset{-2}{\Omega_1} \sin \varphi, \end{aligned} \right\} (4)$$

Тогда получим связь между инвариантами b_{ij} и p_{ij}

$$\left. \begin{aligned} p_{11} &= (b_{11} \cos^2 \alpha + b_{22} \sin^2 \alpha - b_{12} \sin 2\alpha) / \cos \varphi, \\ p_{22} &= b_{33} / \cos^3 \varphi, \\ p_{33} &= (b_{11} \sin^2 \alpha + b_{22} \cos^2 \alpha + b_{12} \sin 2\alpha) / \cos \varphi, \\ p_{12} &= (b_{13} \cos \alpha - b_{23} \sin \alpha) / \cos^2 \varphi, \\ p_{13} &= \left(\frac{1}{2} (b_{11} - b_{22}) \sin 2\alpha + b_{12} \cos 2\alpha \right) / \cos^2 \varphi, \\ p_{23} &= (b_{13} \sin \alpha + b_{23} \cos \alpha) / \cos^2 \varphi. \end{aligned} \right\}$$

Отнесем гиперповерхность V_3 к каноническому реперу R , где базисные векторы \vec{J}_1 и \vec{J}_2 имеют вид (2). Тогда $\alpha = \dot{t}/4$ и координатные линии θ^1 и θ^2 являются антиголоморфными. Касательные к этим кривым лежат в 1-голоморфной 2-плоскости $T_2(X)$. Антиголоморфные кривые будем называть центральными. Так как $d\alpha = 0$, то формулы (4) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \theta_1^2 &= 0, \\ \theta_2^3 &= (\theta_2^4 \cos 2\varphi - \theta_1^4) / \sin 2\varphi, \\ \theta_1^3 &= (\theta_1^4 \cos 2\varphi - \theta_2^4) / \sin 2\varphi, \\ \theta_3^4 &= -d\varphi, \\ \overset{+2}{\Omega_1} &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\theta_1^4 - \theta_2^4) / \sin \varphi, \\ \overset{-2}{\Omega_1} &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\theta_1^4 + \theta_2^4) / \cos \varphi. \end{aligned} \right\}$$

Формы θ_i^j - главные и тогда $\theta_i^j = a_{ik}^j \theta^k$ ($i, j = 1, 2, 3$), где a_{ik}^j - инварианты координатной сети Σ_3 поверхности V_3 . Точка F_i^j с радиус-вектором

$F_i^j = \bar{X} - \frac{1}{a_{ij}^j} \bar{J}_i$ является псевдофокусом касательной $[X, \bar{J}_i]$. На

касательных к центральным кривым θ^1 и θ^2 существует только по одному псевдофокусу. Остальные инварианты сети Σ_3 имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}^3 &= (b_{11} \cos 2\varphi - b_{12}) / \sin 2\varphi, a_{12}^3 = (b_{12} \cos 2\varphi - b_{22}) / \sin 2\varphi, \\ a_{13}^3 &= (b_{13} \cos 2\varphi - b_{23}) / \sin 2\varphi, a_{21}^3 = (b_{12} \cos 2\varphi - b_{11}) / \sin 2\varphi, \\ a_{22}^3 &= (b_{22} \cos 2\varphi - b_{12}) / \sin 2\varphi, a_{23}^3 = (b_{23} \cos 2\varphi - b_{13}) / \sin 2\varphi. \end{aligned} \right\}$$

Векторы геодезической кривизны антиголоморфных линий θ^1 и θ^2 имеют вид $\bar{a}_{11} = a_{11}^3 \bar{J}_3$ и $\bar{a}_{22} = a_{22}^3 \bar{J}_3$, т.е. они параллельны вектору \bar{a}_{12} . И векторы \bar{a}_{12} и \bar{a}_{21} относительной кривизны, соответственно, полей \bar{J}_1 и \bar{J}_2 вдоль линий θ^1 и θ^2 параллельны вектору \bar{J}_3 . Линии $\theta^3 = \theta^1 - \theta^2 = 0$ и $\theta^3 = \theta^1 + \theta^2 = 0$ являются, соответственно, 1-голоморфной и 0-голоморфной.

Если центральные антиголоморфные кривые θ^1 и θ^2 сети Σ_3 гиперповерхности V_3 являются геодезическими, то следует $b_{11} \cos 2\varphi - b_{12} = 0$, $b_{22} \cos 2\varphi - b_{12} = 0$. Отсюда $b_{11} = b_{22}$ и $a_{12}^3 = a_{21}^3$, что является критерием того, что гиперповерхность V_3 расслаивается в 1-направлении $\{\theta^3\}$ на 2-поверхности, несущие сеть линий θ^1 , θ^2 . Так как касательные плоскости к этим 2-поверхностям являются 1-голоморфными, то эти 2-поверхности являются 1-голоморфными. Отсюда следует

Теорема. *Если центральные антиголоморфные кривые сети Σ_3 гиперповерхности V_3 являются геодезическими, то гиперповерхность расслаивается на 1-голоморфные 2-поверхности.*

Полную систему инвариантов гиперповерхности составляют семь функций φ, b_{ij} . Они определяют гиперповерхность V_3 с точностью до движений пространства Re_4 и, следовательно, вещественную гиперповерхность V_3 пространства $R_2(e)$ с точностью до движений этого пространства. Основная система дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned}
db_{11} \wedge \theta^1 + db_{12} \wedge \theta^2 + db_{13} \wedge \theta^3 &= \frac{1}{\sin 2\varphi} \left[b_{23}(b_{11} \cos 2\varphi - b_{12}) + 2b_{13}b_{22} - \right. \\
&- b_{13}(b_{12} \cos 2\varphi + b_{11})\theta^1 \wedge \theta^2 + (b_{33}(b_{11} \cos 2\varphi - b_{12}) - (b_{11}^2 + b_{12}^2) \cos 2\varphi - \\
&- 2b_{11}b_{12} - 2b_{13}(b_{13} \cos 2\varphi - b_{23})\theta^1 \wedge \theta^3 + ((b_{33} - b_{11})(b_{12} \cos 2\varphi - b_{22}) - \\
&- b_{23}(b_{13} \cos 2\varphi - b_{23}) - b_{12}(b_{22} \cos 2\varphi - b_{12}) - b_{13}(b_{23} \cos 2\varphi - b_{13})\theta^2 \wedge \theta^3 \left. \right], \\
- \\
db_{12} \wedge \theta^1 + db_{22} \wedge \theta^2 + db_{23} \wedge \theta^3 &= \frac{1}{\sin 2\varphi} \left[b_{23}(b_{12} \cos 2\varphi - b_{12}) + b_{23}(b_{22} - b_{22}) - \right. \\
&- b_{13}(b_{22} \cos 2\varphi - b_{12})\theta^1 \wedge \theta^2 + ((b_{33} - b_{22})(b_{12} \cos 2\varphi - b_{11}) - b_{13}(b_{23} \cos 2\varphi - b_{13}) - \\
&- b_{12}(b_{23} \cos 2\varphi - b_{12}) - b_{23}(b_{12} \cos 2\varphi - b_{23})\theta^1 \wedge \theta^3 + (b_{33}(b_{22} \cos 2\varphi - b_{12}) - \\
&- 2b_{23}(b_{23} \cos 2\varphi - b_{13}) - b_{12}(b_{12} \cos 2\varphi - b_{22}) - b_{22}(b_{22} \cos 2\varphi - b_{12})\theta^2 \wedge \theta^3 \left. \right], \\
- \\
db_{13} \wedge \theta^1 + db_{23} \wedge \theta^2 + db_{33} \wedge \theta^3 &= \frac{1}{\sin 2\varphi} \left[b_{33}(b_{22} - b_{11}) - (b_{13}(b_{11} - \cos 2\varphi - b_{12}) + \right. \\
&+ b_{23}(b_{12} \cos 2\varphi - b_{11}) + b_{33}(b_{13} \cos 2\varphi - b_{23}))\theta^1 \wedge \theta^3 - (b_{13}(b_{12} \cos 2\varphi - b_{12}) + \\
&+ b_{23}(b_{22} \cos 2\varphi - b_{12}) + b_{33}(b_{23} \cos 2\varphi - b_{13}))\theta^2 \wedge \theta^3 \left. \right]
\end{aligned}$$

Система имеет стандартный вид и произвол ее решения одна функция трех аргументов.

Литература

1. Антонова Л. В. Вещественные N-поверхности в евклидовом пространстве над алгеброй двойных чисел.// Геометрия многообразий и ее приложения: материалы третьей научной конференции с международным участием – Улан-Удэ: Изд-во Бурятского госуниверситета, 2014. – С. 3-10.

2. Антонова Л. В., Бурзалова Т. В. Вещественные кривые в пространстве $R_3(\epsilon)$. Выходные данные: Актуальные вопросы вещественного и функционального анализа. – Улан-Удэ: Издательство Бурятского госуниверситета, 2015. – С. 15-21

Антонова Лариса Васильевна, кандидат физико-математических наук, доцент, директор Института математики и информатики Бурятского государственного университета, 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5

Antonova Larisa Vasil'evna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Buryat State University

**АФФИННО-ГРУППОВЫЕ СВЯЗНОСТИ, ИНДУЦИРОВАННЫЕ
КОМПОЗИЦИОННЫМ ОСНАЩЕНИЕМ СЕМЕЙСТВА
ГИПЕРЦЕНТРИРОВАННЫХ ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОЕКТИВНОМ
ПРОСТРАНСТВЕ**

© *К. V. Bashashina*

**AFFINE-GROUP CONNECTIONS INDUCED BY COMPOSITION
OF HYPERCENTERED PLANES FAMILY
IN THE PROJECTIVE SPACE**

Аннотация. В многомерном проективном пространстве исследуется семейство гиперцентрированных плоскостей, т.е. плоскостей с фиксированными в них гиперплоскостями. С данным семейством ассоциируется расслоение аффинных реперов. С помощью способа Лаптева-Лумисте задана аффинно-групповая связность в ассоциированном расслоении. Показано, что объект кривизны аффинно-групповой связности является тензором. Произведено композиционное оснащение семейства гиперцентрированных плоскостей. Доказано, что оно задает аффинно-групповую связность в расслоении аффинных реперов. В исследовании используется метод Картана-Лаптева, основанный на исчислении внешних дифференциальных форм. Все рассмотрения носят локальный характер.

Ключевые слова: аффинно-групповая связность, гиперцентрированная плоскость, композиционное оснащение, метод Картана-Лаптева, проективное пространство, расслоение аффинных реперов, тензор кривизны аффинно-групповой связности

Abstract. The article deals with a family of hypercentered planes in a multidimensional projective space. Here, hypercentered planes are planes with fixed hyperplanes in them. Bundle of affine frames associated with the family. The affine-group connection in the bundle is given by the Laptev-Lumiste method. Curvature object of the affine-group connection forms a tensor. Composite set of hyper-centered planes is produced. It defines the affine-group connection in the bundle of affine frames. All considerations are of a local nature. The solution is based on the Cartan-Laptev method of moving frames and calculation of exterior differential forms.

Keywords: affine-group connection, hypercentered planes, composite set, the Cartan-Laptev method, projective space, affine frame bundle, curvature tensor of the affine-group connection

1. Семейство гиперцентрированных плоскостей

Отнесем n -мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_I\}$, инфинитезимальные перемещения которого определяются дериационными формулами:

$$dA = \theta A + \omega^I A_I, \quad dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A, \quad I, J, K, \dots = \overline{1, n},$$

где форма θ играет роль множителя пропорциональности, а структурные формы $\omega^I, \omega_I^J, \omega_I$ проективной группы $GP(n)$ удовлетворяют уравнениям Картана (см., наприм., [5]):

$$d\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I, \quad d\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \delta_J^I \omega_K \wedge \omega^K + \omega_J \wedge \omega^I, \quad d\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J.$$

Гиперцентрированной m -мерной плоскостью P_m^{m-1} ($1 \leq m < n$) [1] проективного пространства P_n будем называть m -мерную плоскость P_m с выделенной на ней гиперплоскостью L_{m-1} (называемой гиперцентром), т.е.

$$P_m^{m-1} = \{P_m, L_{m-1} : L_{m-1} \subset P_m\}.$$

Рассмотрим r -мерное семейство V_r ($1 \leq r < m(n-m) + n$), образующим элементом которого является гиперцентрированная плоскость P_m^{m-1} .

Произведем специализацию подвижного репера $\{A, A_a, A_\alpha\}$, помещая вершины A_a в гиперплоскость L_{m-1} , вершину A – на плоскость P_m . Система уравнений семейства V_r гиперцентрированных плоскостей P_m^{m-1} в параметрической форме имеет вид [ср. 4, с. 140]:

$$\omega^\alpha = \Lambda_i^\alpha \theta^i, \quad \omega_a^\alpha = \Lambda_{ai}^\alpha \theta^i, \quad \omega_a = \Lambda_{ai} \theta^i;$$

$$a, b, c, \dots = \overline{1, m}; \quad \alpha, \beta, \gamma, \dots = \overline{m+1, n}; \quad i, j, k, \dots = \overline{n+1, n+r},$$

где базисные формы θ^i , заданные в некоторой области r -мерного пространства параметров V_r , удовлетворяют структурным уравнениям:

$$d\theta^i = \theta^j \wedge \theta_j^i \tag{1.}$$

Совокупность функций $\Lambda = \{\Lambda_i^\alpha, \Lambda_{ai}^\alpha, \Lambda_{ai}\}$ образует фундаментальный объект 1-го порядка семейства V_r , причем

$$\Delta \Lambda_i^\alpha - \Lambda_{ai}^\alpha \omega^a = \Lambda_{ij}^\alpha \theta^j, \quad \Delta \Lambda_{ai}^\alpha = \Lambda_{aij}^\alpha \theta^j, \quad \Delta \Lambda_{ai} + \Lambda_{ai}^\alpha \omega_\alpha = \Lambda_{aij} \theta^j.$$

Дифференциальный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta \Lambda_{ai}^\alpha = d\Lambda_{ai}^\alpha - \Lambda_{aj}^\alpha \theta_j^i - \Lambda_{bi}^\alpha \omega_a^b + \Lambda_{ai}^\beta \omega_\beta^\alpha.$$

Утверждение 1. *Фундаментальный объект 1-го порядка является тензором, содержащим три подтензора Λ_{ai}^α , $\{\Lambda_i^\alpha, \Lambda_{ai}^\alpha\}$, $\{\Lambda_{ai}^\alpha, \Lambda_{ai}^\alpha\}$.*

С семейством V_Γ ассоциируется расслоение аффинных кореперов $A_{m(m+1)}(V_\Gamma)$ со структурными уравнениями (1) и следующими

$$d\omega^a = \omega^b \wedge \omega_b^a + \theta^i \wedge \omega_i^a, \quad d\omega_b^a = \omega_b^c \wedge \omega_c^a + \theta^i \wedge \omega_{bi}^a, \quad (2)$$

где $\omega_i^a = \Lambda_i^\alpha \omega_\alpha^a$, $\omega_{bi}^a = \Lambda_{bi}^\alpha \omega_\alpha^a + \delta_b^a (\Lambda_{ci}^\alpha \omega^c - \Lambda_i^\alpha \omega_\alpha^c) + \Lambda_{bi}^a \omega^a$.

Базой расслоения $A_{m(m+1)}(V_\Gamma)$ служит Γ -мерное пространство параметров V_Γ , типовым слоем которого является аффинная группа $A_{m(m+1)} = GA(m)$, действующая на P_m^{m-1} .

2. Ассоциированные связности

Аффинно-групповую связность в расслоении $A_{m(m+1)}(V_\Gamma)$ зададим способом Лаптева—Лумисте с помощью новых слоевых форм

$$\tilde{\omega}^a = \omega^a - \Gamma_i^a \theta^i, \quad \tilde{\omega}_b^a = \omega_b^a - \Gamma_{bi}^a \theta^i. \quad (3)$$

Причем компоненты объекта $\Gamma = \{\Gamma_i^a, \Gamma_{bi}^a\}$ удовлетворяют уравнениям полученным с использованием теоремы Картана—Лаптева [2, с. 81-83]

$$\Delta \Gamma_i^a - \Gamma_{bi}^a \omega^b + \omega_i^a = \Gamma_{ij}^a \theta^j, \quad \Delta \Gamma_{bi}^a + \omega_{bi}^a = \Gamma_{bij}^a \theta^j. \quad (4)$$

С учетом (2, 3, 4) найдем структурные уравнения для форм аффинно-групповой связности

$$d\tilde{\omega}^a = \tilde{\omega}^b \wedge \tilde{\omega}_b^a + R_{ij}^a \theta^i \wedge \theta^j, \quad d\tilde{\omega}_b^a = \tilde{\omega}_b^c \wedge \tilde{\omega}_c^a + R_{bij}^a \theta^i \wedge \theta^j,$$

где компоненты кривизны аффинно-групповой связности имеют вид

$$R_{ij}^a = \Gamma_{[ij]}^a - \Gamma_{[i}^b \Gamma_{bj]}^a, \quad R_{bij}^a = \Gamma_{b[ij]}^a - \Gamma_{b[i}^c \Gamma_{cj]}^a,$$

где альтернирование производится по крайним индексам в квадратных скобках). Воспользовавшись уравнениями (4) и их продолжениями, найдем дифференциальные сравнения для компонент объекта кривизны $R = \{R_{ij}^a, R_{bij}^a\}$ аффинно-групповой связности Γ :

$$\Delta R_{ij}^a - R_{bij}^a \omega^b \equiv 0, \quad \Delta R_{bij}^a \equiv 0,$$

где символ \equiv означает сравнение по модулю базисных форм θ^i .

Утверждение 2. *Объект кривизны R аффинно-групповой связности образует тензор, содержащий подтензор R_{bij}^a , который является тензором кривизны плоскостной линейной связности.*

3. Композиционное оснащение

Под композиционным оснащением семейства V_r [ср. 3, с. 45] будем понимать присоединение к каждой гиперцентрированной плоскости P_m^{m-1} : 1) $(n - m - 1)$ -мерной плоскости P_{n-m-1} , не имеющих общих точек с плоскостью P_m ; 2) точки, принадлежащей плоскости P_m и не принадлежащей ее гиперцентру L_{m-1} . Оснащающие объекты определяются системами точек

$$B_\alpha = A_\alpha + \lambda_\alpha^a A_a + \lambda_\alpha A, \quad B = A + \lambda^a A_a,$$

причем $\Delta\lambda_\alpha^a + \lambda_\alpha \omega^a + \omega_\alpha^a = \lambda_{ci}^a \theta^i$, $\Delta\lambda_\alpha + \omega_\alpha = \lambda_{ci} \theta^i$, $\Delta\lambda^a + \omega^a = \lambda_i^a \theta^i$.

Теорема. *Фундаментальный объект 1-го порядка A и оснащающий квазитензор $\lambda = \{\lambda_\alpha^a, \lambda_\alpha, \lambda^a\}$ позволяют охватить компоненты объекта аффинно-групповой связности по формулам*

$$\Gamma_i^a = \Lambda_i^\alpha \lambda_\alpha^a, \quad \Gamma_{bi}^a = \Lambda_{bi}^\alpha \lambda_\alpha^a - \delta_b^a \Lambda_i^\alpha \lambda_\alpha + (\Lambda_{ci} - \Lambda_{ci}^\alpha \lambda_\alpha) (\delta_b^c \lambda^a + \delta_b^a \lambda^c).$$

Литература

1. Вялова А.В. Тензорность кривизны фундаментально-групповой связности, ассоциированной с конгруэнцией гиперцентрированных плоскостей // Международная научная конференция «Современная геометрия и ее приложения». Казань, 2017. С. 36—37
2. Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии. М, 1979. Т. 9. С. 5—247.
3. Жовтенко О.М. Индуцированные групповые связности семейства плоскостей в проективном пространстве // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 2001. Вып. 32. С. 43—47.
4. Кулешов А. В. О совпадении и интерпретации связностей, индуцированных на семействе центрированных плоскостей // Вестник Балтийского государственного университета им. И. Канта. 2009. С. 112—119.
5. Шевченко Ю. И. Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000. 113 с.

Башиашина Ксения Викторовна, ассистент института физико-математических наук и информационных технологий Балтийского федерального университета

им. И. Канта, 236006, г. Калининград, Московский проспект 89, кв. 18., тел. 89521165432, e-mail: baschaschina@mail.ru

Bashashina Ksenia Victorovna, assistant lecturer, Immanuel Kant Baltic Federal University

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОДОЛЖЕННЫХ СТРУКТУР НА РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ СУБРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Аннотация. Обсуждаются понятия внутренней геометрии субриманова многообразия M , включающей в себя совокупность геометрических свойств многообразия, которые зависят только от оснащения D^\perp распределения D субриманова многообразия, а также от параллельного перенесения векторов, принадлежащих распределению D , вдоль кривых, касающихся этого распределения. Инвариантами внутренней геометрии субриманова многообразия M являются: тензор кривизны Схоутена; 1-форма η , порождающая распределение D ; производная Ли $L_{\vec{\xi}} g$ метрического тензора g вдоль векторного поля $\vec{\xi}$; тензорное поле P , компоненты которого в адаптированных координатах выражаются с помощью равенств $P_{ad}^c = \partial_n \Gamma_{ad}^c$. На распределении субриманова многообразия контактного типа с помощью внутренней связности определяются продолженные почти контактные метрические структуры с метрикой типа Сасаки. Вводятся такие понятия, как вертикальное и горизонтальное поднятие допустимого вектора, полный лифт допустимого векторного поля. Исследуется строение инфинитезимальной изометрии продолженной почти контактной метрической структуры.

Ключевые слова: внутренняя геометрия субриманова многообразия, распределение субриманова многообразия, тензор кривизны Схоутена, инфинитезимальное преобразование, вертикальное поднятие допустимого вектора, горизонтальное поднятие допустимого вектора, полный лифт допустимого векторного поля.

© А. В. Букушева

TRANSFORMATIONS OF EXTENDED STRUCTURES ON DISTRIBUTIONS OF SUBRIMANIAN MANIFOLDS

Abstract. The notion of the interior geometry of a sub-Riemannian manifold are discussed. The internal geometry includes an assembly of geometric properties of manifold, that depends only on equipment D^\perp of the distribution D of sub-Riemannian manifold, as well as on the parallel transport of the vectors from the distribution D along the curves tangent to this distribution. The invariants of the interior geometry of a sub-Riemannian manifold M are the following: the Schouten curvature tensor; the 1-form η

defining the distribution; the Lie derivative $L_{\bar{\xi}}g$ of metric tensor g along the vector field $\bar{\xi}$; the tensor field P which components in the adapted coordinates are expressed by means of the equalities $P_{ad}^C = \partial_n \Gamma_{ad}^C$. On the distribution of a sub-Riemannian manifold of contact type, using of interior connection extended almost contact metric structures with a Sasaki-type metric are defined. We introduce such notion as vertical and horizontal lifting of an admissible vector, a complete lift of an admissible vector field. The structure of the infinitesimal isometry of the extended almost contact metric structure is studied.

Keywords: interior geometry of sub-Riemannian manifold, distribution of sub-Riemannian manifold, Schouten curvature tensor, infinitesimal transformation, vertical lifting of admissible vector, horizontal lifting of admissible vector, total lift of admissible vector field.

Введение

Распределение субриманова многообразия как тотальное пространство векторного расслоения является нечетномерным аналогом пространства касательного расслоения. В отличие от геометрии касательного расслоения, имеющей богатую историю [1], геометрия распределения субриманова многообразия только начинает изучаться [2-5]. В настоящей работе мы приступаем к изучению инфинитезимальных преобразований распределений с заданными на них продолженными структурами.

1. Внутренняя геометрия субриманова многообразия контактного типа

Будем рассматривать гладкое многообразие размерности n M с заданной на нем субримановой структурой $(M, \bar{\xi}, \eta, g, D)$, где η и $\bar{\xi}$ 1-форма и единичное векторное поле, порождающие, соответственно, ортогональные между собой распределения D и D^\perp . Внутренней линейной связностью ∇ [6-9] на субримановом многообразии называется дифференцирование $\nabla: \Gamma(D) \times \Gamma(D) \rightarrow \Gamma(D)$, подчиняющееся условиям: 1) $\nabla_{f_1\bar{x}+f_2\bar{y}} = f_1\nabla_{\bar{x}} + f_2\nabla_{\bar{y}}$, 2) $\nabla_{\bar{x}}f\bar{y} = (\bar{x}f)\bar{y} + f\nabla_{\bar{x}}\bar{y}$, 3) $\nabla_{\bar{x}}(\bar{y} + \bar{z}) = \nabla_{\bar{x}}\bar{y} + \nabla_{\bar{x}}\bar{z}$, где $\Gamma(D)$ - модуль векторных полей в каждой точке принадлежащих распределению D .

Внутренняя связность задает дифференцирование допустимых тензорных полей [2]. Вот так, например, определяется ковариантная производная эндоморфизма $\varphi: (\nabla_{\bar{x}}\varphi)\bar{y} = \nabla_{\bar{x}}(\varphi\bar{y}) - \varphi(\nabla_{\bar{x}}\bar{y})$, $\bar{x}, \bar{y} \in \Gamma(D)$.

На протяжении всей работы мы используем адаптированные координаты. Карта $K(x^\alpha)$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$; $a, b, c = 1, \dots, n-1$, $i, j, k=2n-1$) многообразия M получает название адаптированной к распределению D , если $\partial_n = \bar{\xi}$. Если $P: TM \rightarrow D$ - проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^\perp$, и $K(x^\alpha)$ - адаптированная карта, то векторы $P(\partial_a) = \bar{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ линейно независимы и порождают распределение D : $D = span(\bar{e}_a)$.

Коэффициенты ∇ задаются равенствами $\nabla_{\bar{e}_a} \bar{e}_b = \Gamma_{ab}^c \bar{e}_c$. Равенства $\bar{e}_a = A_a^{a'} \bar{e}_{a'}$, где $A_a^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$, влекут формулу преобразования для коэффициентов связности: $\Gamma_{ab}^c = A_a^{a'} A_b^{b'} A_c^c \Gamma_{a'b'}^{c'} + A_c^c \bar{e}_a A_b^{c'}$.

Кручением и кривизной связности ∇ назовем, соответственно, допустимые тензорные поля:

$$S(\bar{x}, \bar{y}) = \nabla_{\bar{x}} \bar{y} - \nabla_{\bar{y}} \bar{x} - P[\bar{x}, \bar{y}],$$

$$R(\bar{x}, \bar{y}) \bar{z} = \nabla_{\bar{x}} \nabla_{\bar{y}} \bar{z} - \nabla_{\bar{y}} \nabla_{\bar{x}} \bar{z} - \nabla_{P[\bar{x}, \bar{y}]} \bar{z} - P[Q[\bar{x}, \bar{y}], \bar{z}],$$

где $Q=I-P$, $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \Gamma(D)$. Тензор $R(\bar{x}, \bar{y}) \bar{z}$ носит название тензора кривизны субриманова многообразия. Имеет место

Предложение 1. *На субримановом многообразии существует единственная связность ∇ с нулевым кручением, такая, что $\nabla_{\bar{x}} g(\bar{x}, \bar{y}) = 0$.*

Назовем связность ∇ внутренней метрической связностью. Коэффициенты внутренней метрической связности находятся по формулам

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (\bar{e}_b g_{cd} + \bar{e}_c g_{bd} - \bar{e}_d g_{bc}).$$

Наиболее просто устроены субримановы многообразия с нулевым тензором $R(\bar{x}, \bar{y}) \bar{z}$. Многообразия с нулевым тензором $R(\bar{x}, \bar{y}) \bar{z}$ подробно изучались в случае контактного метрического многообразия в работах [3].

Под внутренней геометрией субриманова многообразия M будем понимать геометрические свойства M , которые зависят только от параллельного перенесения, определяемого внутренней связностью, и от оснащения D^\perp . К основным инвариантам внутренней геометрии субриманова многообразия мы относим тензор кривизны Схоутена R , дифференциальную форму $\omega = d\eta$, производную Ли $C = \frac{1}{2} L_{\bar{\xi}} g$

метрического тензора g вдоль векторного поля $\bar{\xi}$ и тензорное поле P , компоненты которого в адаптированных координатах представлены в виде $P_{bc}^a = \partial_n \Gamma_{bc}^a$.

2. Продолженные почти контактные метрические структуры

Пусть D – распределение субриманова многообразия контактного типа. Векторные поля $(\bar{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - \Gamma_{ac}^b x^{n+c} \partial_{n+b}, \partial_n, \partial_{n+a}) = (A_i)$ определяют на распределении D как на гладком многообразии неголономное (адаптированное) поле базисов, а формы $(dx^a, \Theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a, \Theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma_{bc}^a x^{n+c} dx^b)$ – дуальное поле кобазисов. Проводя необходимые вычисления, получаем следующие структурные уравнения:

$$\begin{aligned} [\bar{\varepsilon}_a, \bar{\varepsilon}_b] &= 2\omega_{ba} \partial_n + x^{n+d} R_{bad}^c \partial_{n+c}, \\ [\bar{\varepsilon}_a, \partial_n] &= x^{n+d} \partial_n \Gamma_{ad}^c \partial_{n+c}, \\ [\bar{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}] &= \Gamma_{ab}^c \partial_{n+c}, \end{aligned}$$

где R_{bad}^c – компоненты тензора $R(\bar{x}, \bar{y})\bar{z}$ в используемых координатах:

$$R_{abc}^d = 2\bar{\varepsilon}_{[a} \Gamma_{b]c}^d + 2\Gamma_{[a|e|}^d \Gamma_{b]c}^e.$$

Справедливо

Предложение 2. Для внутренней связности с тензором кривизны $R(\bar{x}, \bar{y})\bar{z}$. и всех $\bar{x}, \bar{y} \in \Gamma(D)$ и $\bar{p} \in D$ справедливы следующие равенства [2]:

$$\begin{aligned} \left[\bar{x}^h, \bar{y}^h \right]_{\bar{p}} &= [\bar{x}, \bar{y}]^h - \{R(\bar{x}, \bar{y})\bar{p}\}^v, \\ \left[\bar{x}^h, \bar{\xi}^h \right]_{\bar{p}} &= [\bar{x}, \bar{\xi}]^h + \{P(\bar{x}, \bar{p})\}^v, \\ \left[\bar{x}^h, \bar{y}^v \right] &= (\nabla_{\bar{x}} \bar{y})^v, \\ \left[\bar{x}^v, \bar{\xi}^h \right] &= [\bar{x}, \bar{\xi}]^v. \end{aligned}$$

Зададим на многообразии D почти контактную структуру $(\tilde{D}, J, \bar{u} = \partial_n, \lambda = \eta \circ \pi_*, D)$, полагая $J\bar{x}^h = \bar{x}^v$, $J\bar{x}^v = -\bar{x}^h$. Здесь $\pi: D \rightarrow M$ – естественная проекция. Определим, далее, на многообразии M метрику \tilde{g} , подчиняющуюся равенствам:

$$\tilde{g}(\bar{x}^h, \bar{y}^h) = \tilde{g}(\bar{x}^v, \bar{y}^v) = g(\bar{x}, \bar{y}), \quad \tilde{g}(\bar{x}^h, \bar{y}^v) = \tilde{g}(\bar{x}^h, \bar{u}) = g(\bar{x}^v, \bar{u}) = 0.$$

Имеют место следующие предложения.

Предложение 3. Структура $(\tilde{D}, J, \tilde{u}, \lambda = \eta \circ \pi^*, \tilde{g}, D)$ является почти контактной метрической структурой [3].

Пусть $\tilde{v} \in \Gamma(D)$ – допустимое векторное поле, заданное на субримановом многообразии. Определим его полный лифт \tilde{v}^c , полагая по определению $\tilde{v}^c = v^a \partial_a + x^{n+b} \tilde{e}_b v^a \partial_{n+a}$. Обычным образом проверяется, что определение полного лифта не зависит от выбора адаптированных координат.

Векторные поля $\tilde{v}^h = v^a \tilde{e}_a$, $\tilde{v}^v = v^a \partial_{n+a}$ назовем горизонтальным и вертикальным поднятием соответственно допустимого векторного поля.

В качестве аналога почти касательной структуры определим аффинор Q , полагая в адаптированных координатах $Q \tilde{e}_a = \partial_{n+a}$, $Q \partial_{n+a} = 0$.

Предложение 4. Поле \tilde{u} сохраняет тензорную структуру Q тогда и только тогда, когда оно имеет вид $\tilde{u} = \tilde{v}^c + \tilde{v}^v$, где $\tilde{v} \in \Gamma(D)$.

Теорема. Векторное поле \tilde{v} является допустимой изометрией субриманова многообразия, тогда и только тогда, когда выполняются следующие равенства $L_{\tilde{v}^c} \tilde{g} = L_{\tilde{v}^c} F = L_{\tilde{v}^c} Q = L_{\tilde{v}^c} \eta = 0$, где F - структура почти произведения, порождаемая продолженной структурой, $\eta = x^{n+a} \partial_{n+a}$ – поле слоевой гомотетии.

Литература

1. Sasaki S. On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds II // Tohoku Math. J. 1962. no. 14. pp. 146-155.
2. Галаев С.В. N-продолженные симплектические связности в почти контактных метрических пространствах // Изв. вузов. Матем. 2017. №3. С. 15-23.
3. Галаев С.В. Почти контактные метрические структуры, определяемые N-продолженной связностью // Математические заметки СВФУ. 2015. Т. 22. №1. С. 25-34.
4. Букушева А.В., Галаев С.В. Связности над распределением и геодезические пульверизации // Изв. вузов. Матем.. 2013. №4. С. 10-18.
5. Букушева А.В., Галаев С.В. Почти контактные метрические структуры, определяемые связностью над распределением с допустимой финслеровой метрикой // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12. №. 3. С. 17-22.
6. Галаев С.В., Гохман А.В. Обобщенные гамильтоновы системы на многообразиях со связностью // Математика. Механика. 2000. №2. С. 16-19.

7. Bukusheva A.V., Galaev S.V. Almost contact metric structures defined by connection over distribution // Bulletin of the Transilvania University of Brasov. Series III: Mathematics, Informatics, Physics. 2011. Vol. 4 (53). no 2. pp. 13-22.

8. Букушева А.В. Слоения на распределениях с финслеровой метрикой // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т.14. №. 3. С. 247-251.

9. Букушева А.В. О некоторых классах почти параконтактных метрических многообразий // Математика. Механика. 2013. №.15. С. 8-11.

Букушева Алия Владимировна, кандидат педагогических наук, доцент кафедры геометрии, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, 410012, Россия, Саратов, улица Астраханская, 83, 8-8452-515539, e-mail: bukusheva@list.ru

Bukusheva Aliya Vladimirovna, Candidate of Pedagogics, Associate Professor, National Research Saratov State University named after G.N. Chernyshevsky

ДОПУСТИМЫЕ ПСЕВДО-ЭРМИТОВЫ СТРУКТУРЫ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ БИ-МЕТРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

Аннотация. Вводится понятие внутренней геометрии Би-метрического многообразия, под которой понимается совокупность тех геометрических свойств, которые зависят только от оснащения распределения многообразия, а также от параллельного перенесения векторов, принадлежащих распределению, вдоль кривых, касающихся этого распределения. К инвариантами внутренней геометрии Би-метрического многообразия относятся, в частности, тензор кривизны Схоутена, 1-форма, порождающая распределение многообразия и производная Ли метрического тензора вдоль векторного поля, задающего оснащение распределения. В настоящей работе рассматриваются Би-метрические многообразия с нулевым тензором кривизны Схоутена. С помощью внутренней связности Би-метрического многообразия на его распределении определяется допустимая гиперкомплексная псевдо-эрмитова структура. Построенная псевдо-эрмитова структура включает в себя две подструктуры, названные в работе продолженными Би-метрическими структурами. Обсуждаются вопросы классификации полученных Би-метрических структур.

Ключевые слова: Би-метрическое многообразие, внутренняя геометрия Би-метрического многообразия, внутренняя связность, тензор Схоутена, допустимая гиперкомплексная псевдо-эрмитова структура, распределение нулевой кривизны, продолженная Би-метрическая структура.

© S. V. Galaev

ADMISSIBLE PSEUDO-HERMITIAN STRUCTURES ON DISTRIBUTIONS OF B-METRIC MANIFOLD

Abstract. The notion of the interior geometry of a B-metric manifold is introduced. The interior geometry is understood as an assembly of the geometric properties that depends only on equipment of the distribution of manifold as well as on the parallel transport of the vectors from the distribution along the curves tangent to this distribution. The invariants of the interior geometry of a B-metric manifold, in particular, are the following: the Schouten curvature tensor, the 1-form defining the distribution of manifold and the Lie derivative of metric tensor along the vector field generating the equipment of the distribution. In this paper we consider B-metric manifold with zero Schouten's curvature tensor. Using the interior connection of a B-metric manifold on its distribution, an admissible hypercomplex pseudo-Hermitian structure is defined. The constructed pseudo-Hermitian structure includes two substructures, it is called in the paper the

extended B-metric structure. The classification of the obtained B-metric structures is discussed.

Keywords: B-metric manifold, interior geometry of a B-metric manifold, , interior connection, Schouten tensor, admissible hypercomplex pseudo-Hermitian structure, zero curvature distribution, extended B-metric structure.

Введение

Исследование почти контактных Би-метрических структур начинается с основополагающей работы [1], в которой дано определение Би-метрических многообразий и предложена классификация таких многообразий, основанная на выделении инвариантных подпространств в пространстве тензоров специального вида. В соответствии с указанной классификацией выделяются 2^{11} классов Би-метрических многообразий и, в том числе, – 11 базисных классов. В последующих работах [2, 3] приводятся примеры Би-метрических многообразий различных классов. В работе [4] вводится понятие допустимой гиперкомплексной структуры. В настоящей работе это понятие расширяется до понятия допустимой гиперкомплексной псевдо-эрмитовой структуры. Приводится пример такой структуры, возникающей на распределении Би-метрического многообразия. Мы рассматриваем случай Би-метрического многообразия с нулевым тензором Схоутена. Распределение такого многообразия называется распределением нулевой кривизны. Построенная псевдо-эрмитова структура включает в себя две подструктуры, названные в работе продолженными Би-метрическими структурами. Значения ассоциированных с продолженными Би-метрическими структурами фундаментальных тензорных полей [1] совпадают с комитантами инвариантов внутренней геометрии [5-8] Би-метрических многообразий. Таких инвариантов четыре: тензор кривизны Схоутена R ; дифференциальная 2-форма $\omega = d\eta$; производная Ли $L_{\vec{\xi}}g$ метрического тензора g вдоль векторного поля $\vec{\xi}$; тензорное поле P , компоненты которого в адаптированных координатах [4] выражаются с помощью равенств . Целью работы является изучение классов допустимых гиперкомплексных псевдо-эрмитовых структур, соответствующих нулевым инвариантам $C = \frac{1}{2}L_{\vec{\xi}}g$ и R . Исследование продолженных структур мотивируется приложениями к механике со связями [4]. Идея продолжения почти контактных структур тесно связана с развитием аппарата связностей над распределением и продолженных связностей [5-11].

1. Внутренняя геометрия Би-метрического многообразия

Мы рассматриваем гладкое многообразие M размерности $n=2m+1$, $m \geq 1$, Рассмотрим на многообразии M почти контактную Би-метрическую структуру $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$, где φ – структурный эндоморфизм, $\vec{\xi}$ и η – соответственно, структурный вектор и контактная форма, g – псевдориманова метрика. Справедливы следующие условия: 1) $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \vec{\xi}$, 2) $\eta(\vec{\xi}) = 1$, 3) $g(\varphi\vec{x}, \varphi\vec{y}) = g(\vec{x}, \vec{y}) - \eta(\vec{x})\eta(\vec{y})$, 4) $d\eta(\vec{\xi}, \vec{x}) = 0$, где $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(TM)$.

Гладкое распределение $D = \ker \eta$ получает название распределения почти контактной Би-метрической структуры. Следствиями условий 1) – 4) являются следующие утверждения: 5) $\varphi\vec{\xi} = \vec{0}$, 6) $\eta \circ \varphi = 0$, 7) $\eta(\vec{x}) = g(\vec{x}, \vec{\xi})$, $\vec{x} \in \Gamma(TM)$. Если $rk \omega = 2m$, где $\omega = d\eta$, вектор $\vec{\xi}$ однозначно задается условиями $\eta(\vec{\xi}) = 1$, $\ker \omega = Span(\vec{\xi})$. Многообразии M будем называть Би-метрическим многообразием.

Внутренней линейной связностью ∇ [9-11] на Би-метрическом многообразии будем называть дифференциальный оператор $\nabla: \Gamma(D) \times \Gamma(D) \rightarrow \Gamma(D)$, позволяющий осуществлять параллельный перенос допустимых векторов вдоль допустимых кривых. Внутренняя связность удовлетворяет всем тем свойствам, которым удовлетворяет «обычная» ковариантная производная: 1) $\nabla_{f_1\vec{x} + f_2\vec{y}} = f_1\nabla_{\vec{x}} + f_2\nabla_{\vec{y}}$, 2) $\nabla_{\vec{x}}f\vec{y} = (\vec{x}f)\vec{y} + f\nabla_{\vec{x}}\vec{y}$, 3) $\nabla_{\vec{x}}(\vec{y} + \vec{z}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} + \nabla_{\vec{x}}\vec{z}$, где $\Gamma(D)$ – модуль допустимых векторных полей.

Допустимое к распределению D тензорное поле t типа (p, q) обладает следующим свойством: t обращается в нуль каждый раз, когда его аргументы принимают значения $\vec{\xi}$ или η . Эндоморфизм φ представляет собой пример допустимого тензорного поля типа $(1, 1)$, называемого в работе допустимой почти комплексной структурой. Внутренняя связность обычным образом задает операцию дифференцирования тензорных полей. Так, например, для φ такое дифференцирование задается равенством $(\nabla_{\vec{x}}\varphi)\vec{y} = \nabla_{\vec{x}}(\varphi\vec{y}) - \varphi(\nabla_{\vec{x}}\vec{y})$, $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(D)$.

Аналогом голономных координат на субримановом многообразии являются так называемые адаптированные координаты. Карта $K(x^\alpha)$ (α, β ,

$\gamma = 1, \dots, n; a, b, c = 1, \dots, n-1, i, j, k=2n-1$) называется адаптированной к распределению D , если $\partial_n = \bar{\xi}$ [4]. Рассмотрим проектор $P: TM \rightarrow D$, задаваемый разложением $TM = D \oplus D^\perp$, где $D^\perp = \text{span}(\bar{\xi})$, и $K(x^\alpha)$ - адаптированная карта. Определяемы с помощью указанного оператора векторы $P(\partial_a) = \bar{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ линейно независимы и задают распределение D : $D = \text{span}(\bar{e}_a)$. Двойственным к полю базисов $(\bar{e}_\alpha) = (\bar{e}_a, \partial_n)$ является поле кобазисов $(dx^\alpha, \eta = dx^n + \Gamma_a^n dx^a)$. Проводя необходимые вычисления заключаем, что $[\bar{e}_a, \bar{e}_b] = 2\omega_{ba} \partial_n$. Из определения почти контактной структуры с метрикой Нордена следует справедливость равенства $\partial_n \Gamma_a^n = 0$. Для адаптированных карт $K(x^\alpha)$ и $K(x^{\alpha'})$ получаем следующие формулы преобразования координат: $x^a = x^a(x^{\alpha'})$, $x^n = x^{n'} + x^n(x^{\alpha'})$.

В адаптированных координатах допустимое тензорное поле имеет вид:

$$t = t_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} \bar{e}_{a_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{a_p} \otimes dx^{b_1} \otimes \dots \otimes dx^{b_q}.$$

Компоненты допустимого тензорного поля в используемых координатах преобразуются по закону преобразования: $t_b^a = A_{a'}^a A_b^{b'} t_{b'}^{a'}$, где $A_{a'}^a = \frac{\partial x^a}{\partial x^{a'}}$. Не трудно заметить, что благодаря специфике формул преобразования компонент допустимого тензорного поля производные $\partial_n t_b^a$ вновь образуют допустимое тензорное поле..

Би-метрическую структура $(M, \bar{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$ получает название интегрируемой, если интегрируема (почти нормальна) структура φ . Имеет место

Теорема 1. *Интегрируемость Би-метрической структуры $(M, \bar{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$ эквивалентна каждому из ниже следующих утверждений:*

1. Для тензора *Нейенхейса*
 $N_\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = [\varphi \bar{x}, \varphi \bar{y}] + \varphi^2[\bar{x}, \bar{y}] - \varphi[\varphi \bar{x}, \bar{y}] - \varphi[\bar{x}, \varphi \bar{y}]$ имеет место равенство
 $N_\varphi + 2(d\eta \circ \varphi) \otimes \bar{\xi} = 0,$

2. $\nabla^A \varphi = 0$, где ∇^A - ассоциированная с внутренней метрической связностью связность [4].

3. Найдется такой атлас адаптированных карт, в котором компоненты эндоморфизма φ постоянны.

Коэффициенты Γ_{bc}^a в адаптированных координатах задаются равенством $\nabla_{\bar{e}_a} \bar{e}_b = \Gamma_{ab}^c \bar{e}_c$. Равенства $\bar{e}_a = A_a^{a'} \bar{e}_{a'}$, где $A_a^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial \bar{x}^a}$, обычным образом влекут формулу преобразования коэффициентов связности: $\Gamma_{ab}^c = A_a^{a'} A_b^{b'} A_c^{c'} \Gamma_{a'b'}^{c'} + A_c^{c'} \bar{e}_a A_b^{c'}$.

Под кручением связности понимается тензорное поле $S(\bar{x}, \bar{y}) = \nabla_{\bar{x}} \bar{y} - \nabla_{\bar{y}} \bar{x} - P[\bar{x}, \bar{y}]$, $\bar{x}, \bar{y} \in \Gamma(D)$.

Если кручение внутренней связности обращается в нуль, то такую связность будем называть симметричной. В этом случае в адаптированных координатах получаем: $S_{bc}^a = \Gamma_{bc}^a - \Gamma_{cb}^a = 0$. Допустимое тензорное поле вида $R(\bar{x}, \bar{y}) \bar{z} = \nabla_{\bar{x}} \nabla_{\bar{y}} \bar{z} - \nabla_{\bar{y}} \nabla_{\bar{x}} \bar{z} - \nabla_{P[\bar{x}, \bar{y}]} \bar{z} - P[Q[\bar{x}, \bar{y}], \bar{z}]$, где $Q = I - P$, принято называть тензором кривизны Схоутена. Его координатное представление в адаптированных координатах принимает вид: $R_{abc}^d = 2\bar{e}_{[a} \Gamma_{b]c}^d + 2\Gamma_{[a|e]}^d \Gamma_{b]c}^e$.

Тензор кривизны внутренней связности совпадает с тензором кривизны распределения D , а само распределение D , в случае обращения в нуль тензора Схоутена получает название распределения нулевой кривизны.

2. Допустимые почти гиперкомплексные псевдо-эрмитовы структуры

Пусть нам дано гладкое многообразие M размерности $n = 4m + 1$ с почти контактной структурой $(M, \bar{\xi}, \eta, \varphi_1, D)$, где φ_1 - допустимая почти комплексная структура. Предположим, что на многообразии M заданы еще две допустимые почти комплексные структуры φ_2 и φ_3 такие, что $\varphi_1 \circ \varphi_2 = -\varphi_2 \circ \varphi_1 = \varphi_3$. Будем называть многообразие M , наделенное структурой $(M, \bar{\xi}, \eta, \varphi_i, D)$, $i=1, 2, 3$, почти контактным почти гиперкомплексным многообразием. В случае интегрируемости каждой из почти комплексных структур φ_i , допустимую почти гиперкомплексную структуру $(M, \bar{\xi}, \eta, \varphi_i, D)$ будем называть интегрируемой или допустимой

гиперкомплексной структурой, а многообразие M - почти контактным гиперкомплексным многообразием.

Рассмотрим пример почти контактного гиперкомплексного многообразия. Пусть $M=R^5$, $\bar{e}_1 = \partial_1 - x_2 \partial_5$, $\bar{e}_2 = \partial_2$, $\bar{e}_3 = \partial_3 - x^4 \partial_5$, $\bar{e}_4 = \partial_4$, $\bar{\xi} = \partial_5$, $\eta = dx^5 + x^2 dx^1 + x^4 dx^3$, $D = \ker \eta$.

Зададим допустимые к распределению D почти комплексные структуры φ_i , полагая:

$$\varphi_1 : \bar{e}_1 \rightarrow \bar{e}_3, \bar{e}_2 \rightarrow \bar{e}_4, \bar{e}_3 \rightarrow -\bar{e}_1, \bar{e}_4 \rightarrow -\bar{e}_2,$$

$$\varphi_2 : \bar{e}_1 \rightarrow \bar{e}_3, \bar{e}_2 \rightarrow \bar{e}_4, \bar{e}_3 \rightarrow \bar{e}_1, \bar{e}_4 \rightarrow \bar{e}_2,$$

$$\varphi_3 : \bar{e}_1 \rightarrow -\bar{e}_1, \bar{e}_2 \rightarrow -\bar{e}_2, \bar{e}_3 \rightarrow \bar{e}_3, \bar{e}_4 \rightarrow \bar{e}_4.$$

Непосредственно проверяется, что имеют место равенства $\varphi_1 \circ \varphi_2 = -\varphi_2 \circ \varphi_1 = \varphi_3$. Очевидно, что допустимые почти комплексные структуры φ_i интегрируемы.

Предположим, что на многообразии M с почти контактной структурой $(M, \bar{\xi}, \eta, \varphi_1, D)$ задан метрический тензор g сигнатуры $(2m+1, 2m)$ такой, что имеет место равенство:

$$g(\bar{x}, \bar{y}) = g(\varphi_1 \bar{x}, \varphi_1 \bar{y}) = -g(\varphi_2 \bar{x}, \varphi_2 \bar{y}) = -g(\varphi_3 \bar{x}, \varphi_3 \bar{y}),$$

где $\bar{x}, \bar{y} \in \Gamma(D)$.

В этом случае структуру $(M, \bar{\xi}, \eta, \varphi_i, g, D)$ называется допустимой почти гиперкомплексной псевдо-эрмитовой структурой. В случае интегрируемости структуры φ_i структура $(M, \bar{\xi}, \eta, \varphi_i, g, D)$ называется интегрируемой или допустимой гиперкомплексной псевдо-эрмитовой структурой, а многообразие M - почти контактным гиперкомплексным псевдо-эрмитовым многообразием.

Зададим на распределении D Би-метрического многообразия структуру гладкого многообразия, поставив в соответствие каждой адаптированной карте $K(x^\alpha)$ многообразия M сверткарту $\tilde{K}(x^\alpha, x^{n+a})$ на распределении D , полагая, что $\tilde{K}(\bar{x}) = (x^\alpha, x^{n+a})$, где (x^{n+a}) - координаты допустимого вектора \bar{x} в базисе $\bar{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$: $\bar{x} = x^{n+a} \bar{e}_a$. Наличие внутренней связности позволяет рассмотреть разложение $\tilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$, где $\pi : D \rightarrow M$ - естественная проекция, в прямую сумму вида $\tilde{D} = HD \oplus VD$, где VD - вертикальное распределение на тотальном пространстве D , HD -

горизонтальное распределение, порождаемое векторными полями $\bar{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - G_a^b \partial_{n+b}$, где $G_b^a(x^\alpha, x^{n+a}) = \Gamma_{bc}^a(x^\alpha) x^{n+c}$, Γ_{bc}^a – коэффициенты внутренней связности. Дифференциальные формы $(dx^a, \Theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a, \Theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma_{bc}^a x^{n+c} dx^b)$ задают поле кобазисов, сопряженное к полю базисов $(\bar{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - \Gamma_{ac}^b x^{n+c} \partial_{n+b}, \partial_n, \partial_{n+a})$.

Имеют место следующие структурные уравнения:

$$[\bar{\varepsilon}_a, \bar{\varepsilon}_b] = 2\omega_{ba} \partial_n + x^{n+d} R_{bad}^c \partial_{n+c},$$

$$[\bar{\varepsilon}_a, \partial_n] = x^{n+d} \partial_n \Gamma_{ad}^c \partial_{n+c},$$

$$[\bar{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}] = \Gamma_{ab}^c \partial_{n+c}.$$

Всякое векторное поле $\bar{x} \in \Gamma(TM)$, заданное на многообразии M , обычным образом определяет горизонтальный лифт \bar{x}^h , при этом, $\bar{x}^h \in \Gamma(HD)$ тогда и только тогда, когда \bar{x} – допустимое векторное поле: $\bar{x} \in \Gamma(D)$. Следующее предложение является следствием полученных выше структурных уравнений.

Предложение 1. Для всех $\bar{x}, \bar{y} \in \Gamma(D)$ и $\bar{p} \in D$ имеют место следующие равенства:

$$[\bar{x}^h, \bar{y}^h] = [\bar{x}, \bar{y}]^h - \{R(\bar{x}, \bar{y})\bar{p}\}^v,$$

$$[\bar{x}^h, \bar{\xi}^h] = \{P(\bar{x}, \bar{p})\}^v,$$

$$[\bar{x}^h, \bar{y}^v] = (\nabla_{\bar{x}} \bar{y})^v.$$

Зададим на распределении D Би-метрического многообразия допустимую почти гиперкомплексную структуру $(D, J_1, J_2, J_3, \bar{u} = \partial_n, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, \tilde{D})$, полагая, что

$$J_1 \bar{x}^h = -(\varphi \bar{x})^h, \quad J_1 \bar{x}^v = (\varphi \bar{x})^v, \quad J_1(\bar{u}) = \bar{0},$$

$$J_2 \bar{x}^h = \bar{x}^v, \quad J_2 \bar{x}^h = -\bar{x}^h, \quad J_2(\bar{u}) = \bar{0},$$

$$J_3 \bar{x}^h = (\varphi \bar{x})^v, \quad J_3 \bar{x}^v = (\varphi \bar{x})^h, \quad J_3(\bar{u}) = \bar{0}.$$

Будем называть полученную таким образом структуру продолженной структурой. Имеет место

Теорема 2 [4]. *Интегрируемая Би-метрическая структура $(M, \tilde{\xi}, \eta, \varphi, D)$ с распределением D нулевой кривизны определяет интегрируемую продолженную допустимую почти гиперкомплексную структуру $(\tilde{D}, J_1, J_2, J_3, \tilde{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, D)$.*

В дальнейшем ограничимся рассмотрением интегрируемых Би-метрических структур с распределением нулевой кривизны.

С помощью метрического тензора g определим на распределении D метрику полного лифта \tilde{g} , полагая

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\bar{x}^h, \bar{y}^h) &= \tilde{g}(\bar{x}^v, \bar{y}^v) = \tilde{g}(\bar{x}^h, \bar{u}) = \tilde{g}(\bar{x}^v, \bar{u}) = \bar{0}, \\ \tilde{g}(\bar{x}^h, \bar{y}^v) &= \tilde{g}(\bar{x}^v, \bar{y}^h) = g(\bar{x}, \bar{y}), \quad \bar{x}, \bar{y} \in \Gamma(D).\end{aligned}$$

Непосредственно проверяется, что образуемая при этом система $(D, J_1, J_2, J_3, \tilde{u} = \partial_n, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, \tilde{D})$ является допустимой почти гиперкомплексной псевдо-эрмитовой структурой.

Используя известное выражение для коэффициентов связности Леви-Чивита

$$2\Gamma_{ij}^m = g^{km}(A_i g_{jk} + A_j g_{ik} - A_k g_{ij} + \Omega_{kj}^l g_{li} + \Omega_{ki}^l g_{lj}) + \Omega_{ij}^m,$$

где $\Omega_{ab}^n = 2\omega_{ba}$, $\Omega_{ab}^{n+c} = R_{bad}^c x^{n+d}$, $\Omega_{a,n+b}^{n+c} = \Gamma_{ab}^c$, $\Omega_{an}^{n+c} = \partial_n \Gamma_{ab}^c x^{n+b}$,

найдем коэффициенты $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$, соответствующие метрике \tilde{g} . При этом дополнительно предположим, что $C = \frac{1}{2} L_{\tilde{\xi}} g = 0$, $R = 0$.

При наших предположениях отличными от нуля компонентами $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$ будут $\tilde{\Gamma}_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c$, $\tilde{\Gamma}_{ab}^n = \omega_{ba}$, $\tilde{\Gamma}_{a,n+b}^{n+c} = \Gamma_{ab}^c$. Обозначим с помощью символов F_2 и F_3 фундаментальные поля, соответствующие продолженным структурам $(D, J_2, \tilde{u} = \partial_n, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, \tilde{D})$, $(D, J_3, \tilde{u} = \partial_n, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, \tilde{D})$ соответственно.

Проводя необходимые вычисления, убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 3. Би-метрические структуры $(D, J_2, \bar{u} = \partial_n, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, \tilde{D})$, $(D, J_3, \bar{u} = \partial_n, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, \tilde{D})$ при условии, что $C = \frac{1}{2} L_{\tilde{\xi}} g = 0$, $R = 0$, принадлежат классу Φ_2 [1].

Литература

1. Manev M. Tangent bundles with Sasaki metric and almost hypercomplex pseudo-Hermitian structure // Topics in almost Hermitian geometry and related fields. World Sci. Publ., Hackensack, N.J. 2005. pp. 170-185.
2. Manev M. Tangent bundles with complete lift of the base metric and almost hypercomplex Hermitian-Norden structure // C. R. Acad. Bulgare Sci. 2014. №3. pp. 313-322.
3. Ganchev G., Mihova V., Gribachev K. Almost contact manifolds with B-metric // Math. Balk. N.S. 1993. 7(3-4). pp. 261-276.
4. Букушева А.В., Галаев С.В. Почти контактные метрические структуры, определяемые связностью над распределением с допустимой финслеровой метрикой // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12. №. 3. С. 17-22.
5. Галаев С.В. Обобщенный тензор кривизны Вагнера почти контактных метрических пространств // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17. № 3(59). С. 53-63.
6. Галаев С.В. Почти контактные метрические структуры, определяемые N-продолженной связностью // Математические заметки СВФУ. 2015. Т. 22. №1. С. 25-34.
7. Галаев С.В. Допустимые гиперкомплексные структуры на распределениях сасакиевых многообразий // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16. №3. С. 263-272.
8. Букушева А.В., Галаев С.В. Связности над распределением и геодезические пульверизации // Изв. вузов. Матем.. 2013. №4. С. 10-18.
9. Bukusheva A.V., Galaev S.V. Almost contact metric structures defined by connection over distribution // Bulletin of the Transilvania University of Brasov. Series III: Mathematics, Informatics, Physics. 2011. Vol. 4 (53). no 2. pp. 13-22.
10. Букушева А.В. Слоения на распределениях с финслеровой метрикой // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т.14. №. 3. С. 247-251.
11. Букушева А.В. О некоторых классах почти параконтактных метрических многообразий // Математика. Механика. 2013. №.15. С. 8-11.

Галаев Сергей Васильевич, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры геометрии, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, 410012, Россия, Саратов, улица Астраханская, 83, 8-8452-515539, e-mail: sgalaev@mail.ru

Galaev Sergei Vasil'evich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, National Research Saratov State University named after G.N. Chernyshevsky

ОБ ОДНОМ ПРИМЕРЕ КЕЛЕРОВОЙ СТРУКТУРЫ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ

Аннотация. Почти эрмитовы структуры являются одними из наиболее содержательных примеров дифференциально-геометрических структур [1]. Особо среди почти эрмитовых структур выделяются келеровы структуры, играющие фундаментальную роль в комплексном анализе, алгебраической геометрии и теоретической физике. Поэтому построение новых примеров келеровых структур актуальной задачей. В статье исследуется касательное расслоение над почти эрмитовым многообразием. Показано, что на касательном расслоении над двумерным римановым многообразием со знакоопределенной гауссовой кривизной, естественным образом индуцируется нетривиальная келерова структура.

Ключевые слова: Касательное расслоение, келерова структура, почти эрмитово многообразие, вертикальные и полные лифты.

© N. N. Dondukova, B. V. Zayatiev

ON A CERTAIN EXAMPLE OF KÄHLERIAN STRUCTURE ON THE TANGENT BUNDLE

Abstract. Almost Hermitean structures are one of the most informative examples of differential geometric structures [1]. Among almost Hermitean structures Kählerian ones play a fundamental in algebraic geometry and theoretical physics. So, construction of new examples of Kählerian structures is an urgent task. In the article we study the tangent bundle over an almost Hermitian manifold. It is shown that on the tangent bundle over a two-dimensional Riemannian manifold with sign-definite Gaussian curvature a non-trivial Kählerian structure is directly induced.

Keywords: tangent bundle; Kählerian structure; almost Hermitean manifold; vertical and complete elevators.

Пусть $(T(M^n), \bar{J}, \bar{g})$ – касательное расслоение над почти эрмитовым многообразием (M^n, J, g) , снабженное почти эрмитовой структурой инвариантного типа [2], где

$$\bar{J}(X^H) = (JX)^H;$$

$$\bar{J}(X^V) = (JX)^V;$$

$X \in \mathcal{X}(M); (\dots)^H, (\dots)^V$ – горизонтальный и вертикальный лифты [3].

$$\bar{g}(X^H, Y^H) = \lambda g(X, Y);$$

$$\bar{g}(X^H, Y^V) = 0;$$

$$\bar{g}(X^V, Y^V) = g(X, Y);$$

где λg – риманова метрика, полученная конформным преобразованием метрики g .

Относительно римановой связности $\bar{\nabla}$ метрики \bar{g} , имеют место следующие формулы [2]

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_{X^H} Y^H)_Z &= (\nabla'_X Y)^H - \frac{1}{2}(R(X, Y)Z)^V; \\ (\bar{\nabla}_{X^H} Y^V)_Z &= \frac{1}{2\lambda}(R(Z, Y)X)^H + (\nabla_X Y)^V; \\ (\bar{\nabla}_{X^V} Y^H)_Z &= \frac{1}{2\lambda}(R(Z, X)Y)^H; \\ \bar{\nabla}_{X^V} Y^V &= 0; \end{aligned} \quad (1)$$

где $X, Y \in \mathcal{X}(M)$; $Z \in T(M^n)$; ∇, ∇' – соответственно, римановы связности метрик g и λg ; R – тензор кривизны связности ∇ .

Кроме того,

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_{X^H} (\bar{J})Y^H)_Z &= (\nabla'_X (J)Y)^H + \frac{1}{2}(JR(X, Y)Z - R(X, JY)Z)^V; \\ (\bar{\nabla}_{X^H} (\bar{J})Y^V)_Z &= \frac{1}{2\lambda}(R(Z, JY)X - JR(Z, Y)X)^H + (\nabla_X (J)Y)^V; \\ (\bar{\nabla}_{X^V} Y^H)_Z &= \frac{1}{2\lambda}(R(Z, X)JY - JR(Z, X)Y)^H; \\ \bar{\nabla}_{X^V} (\bar{J})Y^V &= 0; \end{aligned} \quad (2)$$

С учетом (1), имеем

$$\begin{aligned} \delta\bar{\Omega}(X^H) &= \delta\Omega'(X), \\ (\delta\bar{\Omega}(X^V))_Z &= \frac{1}{2\lambda} \text{tr}(JR(Z, X)), \end{aligned}$$

где $\delta\bar{\Omega}$ – кодифференциал фундаментальной формы структуры $\{\bar{J}, \bar{g}\}$; $\delta\Omega'$ – кодифференциал фундаментальной формы структуры $\{J, \lambda g\}$.

Отсюда

$$\begin{aligned} \bar{\omega}(X^H) &= \frac{n-2}{2(n-1)} \omega'(X); \\ (\bar{\omega}(X^V))_Z &= \frac{1}{2(n-1)\lambda} \text{tr}(JR(Z, JX)). \end{aligned} \quad (3)$$

где $\bar{\omega}$ – форма Ли (см. [1]) структуры $\{\bar{J}, \bar{g}\}$; ω' – форма Ли структуры $\{J, \lambda g\}$.

С учетом (1) и (2), ковариантная производная почти комплексной структуры \bar{J} относительно связности Вейля $\tilde{\nabla}$ (см. [1]) на касательном расслоении $T(M^n)$ примет следующий вид

$$\begin{aligned}
 (\tilde{\nabla}_{X^H}(\bar{J})Y^H)_Z &= (\nabla_X''(J)Y)^H + \frac{1}{2}(JR(X,Y)Z - JR(X,JY)Z)^V + \\
 &+ \lambda(g(X,Y)J\xi_V - \Omega(X,Y)\xi_V); \\
 (\tilde{\nabla}_{X^H}(\bar{J})Y^V)_Z &= \frac{1}{2\lambda}(R(Z,JY)X - JR(Z,Y)X)^H + \omega_V(JY)X^H - \\
 &- \omega_V(Y)(JX)^H + (\nabla_X(J)Y)^V; \\
 (\tilde{\nabla}_{X^V}(\bar{J})Y^H)_Z &= \frac{1}{2\lambda}(R(Z,X)JY - JR(Z,Y)X)^H + \omega_H(JY)X^V - \\
 &- \omega_H(Y)(JX)^V; \\
 \tilde{\nabla}_{X^V}(\bar{J})Y^V &= \Omega(X,Y)\xi_H - g(X,Y)J\xi_H + \omega_V(JY)X^V - \\
 &- \Omega(X,Y)\xi_V + g(X,Y)J\xi_V - \omega_V(Y)(JX)^V;
 \end{aligned} \tag{4}$$

где ∇'' – связность Вейля структуры $\{J, \lambda g\}$; $\omega_H(X) = \frac{n-2}{2(n-1)}\omega'(X)$, $\omega_V(X)_Z = \frac{1}{2(n-1)\lambda}tr(JR(Z, JX))$.

Пусть (M^2, J, g) – двумерное (связное) келерово многообразие. Тогда, как известно [4], $(T(M^2), \bar{J}, \bar{g})$ – эрмитово многообразие, названное нами *тангенциальной эрмитовой поверхностью*. Из двумерности риманова многообразия (M^2, g) имеем

$$R(X, Y)Z = \kappa(g(X, Z)Y - g(Y, Z)X),$$

где κ – гауссова кривизна. Следовательно, соотношения (4) примут вид

$$\begin{aligned}
 \bar{\omega}(X^H) &= 0; \\
 (\bar{\omega}(X^V))_Z &= -\frac{\kappa}{\lambda}g(Z, X).
 \end{aligned} \tag{5}$$

Вычислив ковариантную производную формы Ли $\bar{\omega}$, получим

$$\begin{aligned}
 \bar{\nabla}_{X^H}(\bar{\omega})Y^H &= 0, \\
 (\bar{\nabla}_{X^H}(\bar{\omega})Y^V)_Z &= \partial_X(-\frac{\kappa}{\lambda})g(Z, Y), \\
 \bar{\nabla}_{X^V}(\bar{\omega})Y^H &= 0, \\
 \bar{\nabla}_{X^V}(\bar{\omega})Y^V &= -\frac{\kappa}{2\lambda}g(X, Y).
 \end{aligned}$$

где $\partial_x = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Отсюда

$$d\bar{\omega}(X^H, Y^H) = 0,$$

$$(d\bar{\omega}(X^H, Y^V))_Z = \partial_x \left(-\frac{\kappa}{2\lambda}\right) g(Z, Y),$$

$$d\bar{\omega}(X^V, Y^V) = 0.$$

Таким образом, получаем, что $d\bar{\omega} = 0$ тогда и только тогда, когда $\partial_x \left(\frac{\kappa}{\lambda}\right) = 0$. С учетом связности многообразия M^2 , $\partial_x \left(\frac{\kappa}{\lambda}\right) = 0$ тогда и только тогда, когда $\frac{\kappa}{\lambda} = const$. Кроме того, в силу положительности функции λ , это равенство имеет смысл только тогда, когда гауссова кривизна κ знакоопределена. Покажем теперь, что замкнутость формы Ли $\bar{\omega}$ влечет ее точность. Действительно, в адаптированном к римановой связности кобазисе $\{(dx)^V, (dx)^H\}$ имеем

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \left(-\frac{\kappa}{\lambda}\right) g_{is} y^s (dx^i)^H = \left(-\frac{\kappa}{\lambda}\right) (g_{is} dy^i y^s + g_{is} \Gamma_{ij}^i y^l y^s dx^j) = \\ &= \left(-\frac{\kappa}{\lambda}\right) (g_{is} dy^i y^s + \frac{1}{2} dg_{is} y^l y^s) = d\left(-\frac{\kappa}{2\lambda} g_{ij} y^i y^j\right), \end{aligned}$$

где (x^i, y^i) – стандартная локальная система координат на $T(M^2)$, $\{g_{ij}\}$ – компоненты римановой метрики g в этой системе координат. Таким образом, форма Ли $\bar{\omega} = d\sigma$, где $\sigma = -\frac{\kappa}{2\lambda} g_{ij} y^i y^j$ и σ – глобально определенная функция на $T(M)$. Значит $(T(M^2), \bar{J}, \bar{g})$ – глобально-конформно келерово многообразие тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:

1. (M^2, g) – риманово многообразие со знакоопределенной гауссовой кривизной κ ;
2. $\lambda = Ak$, где $A = const$ и $sign(A) = sign(\kappa)$.

Следовательно, справедлива

Теорема. Пусть (M^2, J, g) многообразие постоянной гауссовой кривизны κ . Тогда эрмитова поверхность $(T(M^2), \bar{J}, e^{-\sigma} \bar{g})$ является келеровой поверхностью тогда и только тогда, когда $\lambda = const$.

Литература

1. Gray A., Hervella L. The sixteen classes of almost manifolds and their linear invariants // Ann. Math. Pura ed. Appl., 1980, v.123, № 4. p. 35-38.

2. Зяятуев Б.В. О некоторых классах АН-структур на касательном расслоении//Труды международной конференции, посвященной А.З. Петрову. – 2000. – с. 53-54.

3. Yano K. and S. Ishihara. Tangent and Cotangent Bundles // New York, Marcel Dekker, INC., 1973, XII.

4. Кириченко В.Ф., Зяятуев Б.В. Дифференциальная геометрия тангенциальных эрмитовых поверхностей // Успехи мат. наук, 1996. – N4. – с. 209-211.

Дондукова Надежда Николаевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры, геометрии и методики преподавания математики Бурятского государственного университета, 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5, e-mail: nadezda@yandex.ru

Зяятуев Батор Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры, геометрии и методики преподавания математики Бурятского государственного университета, 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5, e-mail: zayatyuev@yandex.ru

Dondukova Nadezhda Nikolayevna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Buryat State University

Zayatyuev Bator Vladimirovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Buryat State University

ОБ ОДНОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ РЕПЕРОВ В ПРОЕКТИВНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Аннотация. В работе рассматривается стабилизатор G фиксированной точки A n -мерного проективного пространства P_n ($n \geq 2$) в группе $GP(n)$ проективных преобразований данного пространства. Построены два точных представления линейной факторгруппы \overline{G} группы G : 1) на линейных реперах, т.е. базисах касательного векторного пространства к P_n в точке A ; 2) на классах эквивалентных проективных реперов пространства P_n . Установлен изоморфизм между данными представлениями и дана геометрическая интерпретация принадлежности проективных реперов одному классу. Таким образом, линейные реперы можно отождествить с классами эквивалентных проективных реперов.

Ключевые слова: проективное пространство, проективный репер, группа проективных преобразований, факторгруппа Ли, представление группы Ли, пространство орбит, теорема Дезарга.

© А. В. Кулешов

ON SOME INTERPRETATION OF LINEAR FRAMES IN PROJECTIVE DIFFERENTIAL GEOMETRY

Abstract. The stabilizer G of a fixed point A in the group $GP(n)$ of projective transformations of n -dimensional projective space P_n ($n \geq 2$) is considered in the paper. Two faithful representations of the linear quotient group \overline{G} of G are constructed: 1) the first one is on the linear frames i.e. bases of tangent vector space to P_n at A ; 2) the second one is on the equivalence classes of projective frames of P_n . It is shown that these representations are isomorphic. Geometrical interpretation for two frames to be equivalent is given. Thus, the linear frames one can identify to the equivalence classes of the projective frames.

Keywords: projective space, projective frame, the projective transformations group, quotient Lie group, Lie group representation, orbit space, the Desargues theorem.

Введение

В статьях [1–4] фигурирует линейная факторгруппа $GL(m)$ подгруппы стационарности G центрированной проективной плоскости $L_m^* = (L_m, A)$, неэффективно действующая в связке прямых, проходящих через центр A данной плоскости. В силу специфики метода подвижного репера и внешних форм Э. Картана, применяемого в данных работах, описание данной факторгруппы исчерпывается ее структурными уравнениями. На наш взгляд, однако, представляет несомненный интерес детальное изучение вышеуказанной группы и построение ее эффективного действия на геометрических образах, «ассоциированных» с плоскостью L_m^* . В частности, нас интересует явная конструкция соответствующего нормального делителя H и геометрическое описание орбит проективных реперов под действием элементов из H . Именно такие H -орбиты как целое переводятся друг в друга под действием элементов факторгруппы.

Все многообразия, рассматриваемые ниже, принадлежат классу C^ω , а все группы являются группами Ли.

1. Классы α -эквивалентности проективных реперов и базисы касательного пространства к P_n

Пусть P_n — проективное пространство размерности $n \geq 2$, A — его точка, которую мы считаем фиксированной; $F(P_n)$ — многообразие всех проективных реперов вида $\mathfrak{R} = \{A_0, A_1, \dots, A_n, E\}$ таких, что $A_0 = A$; $V = T_A(P_n)$ — векторное касательное пространство к P_n как к гладкому многообразию в его точке A ; $F(V)$ — многообразие всех линейных реперов (т.е. базисов) пространства V ; $G = GP^*(n)$ — стабилизатор точки A в группе $GP(n)$ проективных преобразований пространства P_n ; $GL(V)$ — группа невырожденных линейных операторов, действующих в пространстве V .

Отметим, что G и $GL(V)$ свободно и транзитивно (а значит, и эффективно) действуют на $F(P_n)$ и $F(V)$ соответственно. Образ репера $\mathfrak{R} \in F(P_n)$ относительно действия $f \in G$ будем обозначать через $f \cdot \mathfrak{R}$, а образ базиса $\varepsilon \in F(V)$ по действию оператора $\psi \in GL(V)$ — через $\psi \cdot \varepsilon$.

Как известно, каждый репер $\mathfrak{R} \in F(P_n)$ порождает аффинную карту $\varphi_{\mathfrak{R}}$ некоторой открытой окрестности U точки A :

$$M(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \mapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right),$$

где $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ — однородные координаты точки $M \in U$ в репере \mathfrak{R} . В свою очередь, каждая карта φ на области U порождает натуральный базис $\varepsilon(\varphi) = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ пространства V . Таким образом, определена сюръективная субмерсия $\alpha : F(P_n) \rightarrow F(V)$, действующая по закону $\mathfrak{R} \mapsto \varepsilon(\varphi_{\mathfrak{R}})$.

Определение. Два репера \mathfrak{R} и \mathfrak{R}' назовем α -эквивалентными ($\mathfrak{R} \sim^\alpha \mathfrak{R}'$), если $\alpha(\mathfrak{R}) = \alpha(\mathfrak{R}')$.

Класс α -эквивалентности репера \mathfrak{R} обозначим через $[\mathfrak{R}]$. Многообразие $\Phi = F(P_n) / \sim$ всех таких классов является образом $F(P_n)$ относительно канонической проекции $\pi : \mathfrak{R} \mapsto [\mathfrak{R}]$. Тогда существует единственный диффеоморфизм $\bar{\alpha} : \Phi \rightarrow F(V)$ такой, что $\bar{\alpha} \circ \pi = \alpha$, он действует по правилу $\bar{\alpha} : [\mathfrak{R}] \rightarrow \varepsilon(\varphi_{\mathfrak{R}})$.

2. Эквивалентность двух представлений линейной фактор-группы

Поскольку для любого $f \in G$ справедливо $f(A) = A$, корректно определен гомоморфизм групп Ли $\beta : G \rightarrow GL(V)$, действующий по закону $\beta : f \mapsto d_A f$. Тогда $H = \ker \beta$ — нормальный делитель группы G , причем $\bar{\beta} : fH \mapsto d_A f$ — канонический изоморфизм групп Ли G/H и $GL(V)$. Это позволяет отождествить данные группы и обозначить их общим символом \bar{G} .

Определение. Группу \bar{G} будем называть линейной фактор-группой группы G .

Легко видеть, что класс $[\mathfrak{R}]$ есть орбита репера \mathfrak{R} по действию H на $F(P_n)$. Иными словами, $\mathfrak{R} \sim^\alpha \mathfrak{R}'$ тогда и только тогда, когда найдется $h \in H$ такое, что $h(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R}'$. Тогда H — ядро неэффективности действия G на Φ , а значит, на Φ корректно определено свободное транзитивное действие группы \bar{G} по следующему правилу: $fH : [\mathfrak{R}] \mapsto [f \cdot \mathfrak{R}]$ для любого $f \in G$.

Утверждение. Многообразия Φ и $F(V)$ изоморфны как пространства представления группы \bar{G} , т. е.

$$\delta_A f \circ \bar{\alpha} = \bar{\alpha} \circ f H,$$

где $\delta_A f$ — действие дифференциала $d_A f$ на базисах пространства V .

Этим установлена эквивалентность двух действий линейной факторгруппы \bar{G} группы G — на многообразии Φ классов проективных реперов и на многообразии $F(V)$ линейных реперов пространства V . Данный факт позволяет интерпретировать линейные реперы как классы α -эквивалентных проективных реперов.

3. Геометрический смысл отношения α -эквивалентности проективных реперов

Пусть $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}' \in F(P_n)$, причем

$$\mathfrak{R} = \{A_0, A_1, \dots, A_n, E\}, \quad \mathfrak{R}' = \{A'_0, A'_1, \dots, A'_n, E'\},$$

где $A_0 = A'_0 = A$.

Определение. Реперы \mathfrak{R} и \mathfrak{R}' назовем перспективными друг другу, если $A'_i \in A_i A_0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) и $E' \in EA_0$.

Определение. Реперы \mathfrak{R} и \mathfrak{R}' назовем строго перспективными друг другу, если они перспективны, и при этом $A_i \neq A'_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) и $E \neq E'$.

Пусть \mathfrak{R} и \mathfrak{R}' — строго перспективные друг другу реперы. Тогда:

1) для любых $i \neq j$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) $A_i A_j$ и $A'_i A'_j$ — различные прямые, лежащие в одной плоскости $AA_i A_j$;

2) для любого $i = 1, 2, \dots, n$ $A_i E$ и $A'_i E'$ — различные прямые, лежащие в одной плоскости $AA_i E$.

Через $L_{(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')}$ обозначим минимальное (по включению) подпространство в P_n , содержащее совокупность точек B_{ij}, B_i , где

$$B_{ij} = A_i A_j \cap A'_i A'_j, \quad B_i = A_i E \cap A'_i E', \quad 1 \leq i < j \leq n.$$

Теорема 1. $L_{(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')}$ является гиперплоскостью для любых строго перспективных друг другу реперов \mathfrak{R} и \mathfrak{R}' .

Теорема 2. Если реперы \mathfrak{R} и \mathfrak{R}' α -эквивалентны, то они перспективны друг другу.

Теорема 3. Если реперы \mathfrak{R} и \mathfrak{R}' строго перспективны, причем гиперплоскость $L_{(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')}$ проходит через точку A , то они α -эквивалентны.

Замечание. Теорема 1 является обобщением классической теоремы Дезарга (см., напр., [5]) на многомерный случай.

Литература

1. Белова О.О. Связности в расслоениях, ассоциированных с многообразием Грассмана и пространством центрированных плоскостей // *Фундаментальная и прикладная математика*. – 2008. – Т. 14. – Вып. 2. – С. 29 – 67.

2. Кулешов А.В. Шесть типов индуцированной групповой связности на семействе центрированных плоскостей в проективном пространстве // *Дифференциальная геометрия многообразий фигур*. – Калининград: Изд-во РГУ им. И. Канта, 2009. – Вып. 40. – С. 72 – 84.

3. Омелян О.М., Шевченко Ю.И. Редукции объекта центропроективной связности и тензора аффинного кручения на распределении плоскостей// *Математические заметки*. – 2008. – Том 84. – Вып. 1. – С. 99 – 107.

4. Полякова К.В. Параллельные перенесения на поверхности проективного пространства// *Фундаментальная и прикладная математика*. – 2008. – Т. 14. – Вып. 2. – С. 129 – 177.

5. Ефимов Н.В. *Высшая геометрия*. – 7-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 584с.

Кулешов Артур Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент Балтийского федерального университета им. И. Канта, 236016, г. Калининград, ул. А. Невского, 14, e-mail: arturkuleshov@yandex.ru.

Kuleshov Artur Vladimirovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, I. Kant Baltic Federal University

О ФУНДАМЕНТАЛЬНО-ГРУППОВЫХ СВЯЗНОСТЯХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Аннотация. Рассмотрено фундаментально-групповая связность 2-го порядка с двух точек зрения. В работе [4] показано, что при задании связности 2-го порядка предполагается, что объект связности содержит объект аффинной связности над многообразием, а в работе [2] этого не предусматривается. Получены дифференциальные сравнения для объекта кривизны связности 2-го порядка Рыбникова, которые тензорный вид. Отмечен особый случай, соответствующий специализации базы главного расслоения как базы расслоенного пространства аффинной связности без кручения. В этом случае оба понятия фундаментально-групповой связности 2-го порядка совпадают.

Ключевые слова: структурные уравнения Лаптева, фундаментально-групповая связность, объект кривизны 2-го порядка, объект связности 2-го порядка.

© N. A. Ryazanov

ABOUT FUNDAMENTAL-GROUP CONNECTIONS OF THE SECOND ORDER

Abstract. The fundamental-group connection of the second order is considered from two points of view. It was shown in [4] that when defining connectivity of the second order it is assumed that the connection object contains an object of affine connection over a manifold, and this is not provided in [2]. Differential comparisons are obtained for the curvature object of second order Rybnikov connectivity, which are tensor form. A special case corresponding to the specialization of the base of the principal bundle as a base of a fibered space of affine connection without torsion is noted. In this case, both concepts of the fundamental-group connection of the second order coincide.

Keywords: Laptev structure equations, fundamental-group connection, curvature object of the second order, second-order connectivity object.

Рассмотрим главное расслоение $G_r(M_n)$, базой которого служит n -мерное гладкое многообразие M_n , а типовом слоем является r -членная группа Ли G_r . Его структурные уравнения Лаптева имеют вид [1]

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i \quad (i, j, k, \dots = \overline{1, n}), \quad (1)$$

$$D\omega^\alpha = C_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\beta \wedge \omega^\gamma + \omega^i \wedge \omega_i^\alpha \quad (\alpha, \beta, \gamma, \dots = \overline{n+1, n+r}). \quad (2)$$

Здесь D – символ внешнего дифференциала, \wedge – знак внешнего умножения, ω^i – базисные линейные дифференциальные формы, ω^α – слоевые дифференциальные формы, ω_i^j – продолженные базисные формы, ω_i^α – продолженные слоевые формы; $C_{\beta\gamma}^\alpha$ – структурные константы группы Ли G_r , удовлетворяющие условиям антисимметрии по нижним индексам $C_{(\beta\gamma)}^\alpha = 0$, а также тождествам Якоби $C_{\beta[\gamma}^\alpha C_{\alpha]}^\beta = 0$, где круглые скобки обозначают симметрирование, а фигурные – циклирование.

Для задания связности по Лаптеву в главном расслоении $G_r(M_n)$ введем формы связности

$$\Omega^\alpha = \omega^\alpha - \Gamma_i^\alpha \omega^i. \quad (3)$$

Дифференцируя формы (3) внешним образом с учетом (1, 2), получим

$$D\Omega^\alpha = C_{\beta\gamma}^\alpha \Omega^\beta \wedge \Omega^\gamma + \omega^i \wedge (d\Gamma_i^\alpha - \Gamma_j^\alpha \omega_i^j + \Gamma_j^\beta \omega_\beta^\alpha + \omega_i^\alpha) - C_{\beta\gamma}^\alpha \Gamma_i^\beta \Gamma_j^\gamma \omega^i \wedge \omega^j, \\ \omega_\beta^\alpha = 2C_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\gamma. \quad (4)$$

Компоненты объекта фундаментально-групповой связности Γ_i^α удовлетворяют дифференциальным уравнениям [1]:

$$\Delta \Gamma_i^\alpha + \omega_i^\alpha = \Gamma_{ij}^\alpha \omega^j, \quad (5)$$

где тензорный дифференциальный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta \Gamma_i^\alpha = d\Gamma_i^\alpha - \Gamma_j^\alpha \omega_i^j + \Gamma_i^\beta \omega_\beta^\alpha.$$

Замечание. В работе [2] автор записывает компоненты Γ_{ij}^α из формул (5) в виде $\Gamma_{i,j}^\alpha$, что, иногда, соответствует обозначению ковариантной производной.

Тогда уравнения (4) можно переписать в виде

$$D\Omega^\alpha = C_{\beta\gamma}^\alpha \Omega^\beta \wedge \Omega^\gamma + R_{ij}^\alpha \omega^i \wedge \omega^j, \quad R_{ij}^\alpha = \Gamma_{[ij]}^\alpha - C_{\beta\gamma}^\alpha \Gamma_i^\beta \Gamma_j^\gamma, \quad (6)$$

где квадратные скобки обозначают альтернирование. Получили структурные уравнения (6) для форм связности Ω^α , включающие компоненты объекта кривизны R_{ij}^α , выражающиеся по формуле (6).

Продолжим уравнения (1, 2), т.е. дифференцируя внешним образом и применяя обобщенную лемму Картана, получим

$$\begin{aligned} D\omega_j^i &= \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \omega^k \wedge \omega_{[jk]}^i, \quad \omega_{[jk]}^i \cong 0; \\ D\omega_i^\alpha &= \omega_i^j \wedge \omega_j^\alpha + \omega_i^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha + \omega^j \wedge \omega_{ij}^\alpha, \quad \omega_{[ij]}^\alpha \cong 0, \end{aligned} \quad (7)$$

причем символ \cong означает сравнение по модулю базисных форм ω^i . Продолжим уравнения (7, 3):

$$\begin{aligned} D\omega_{ij}^\alpha &= \omega_i^k \wedge \omega_{kj}^\alpha + \omega_j^k \wedge \omega_{ik}^\alpha + \omega_{ij}^k \wedge \omega_k^\alpha + \omega_{ij}^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha + C_{\beta\gamma}^\alpha \omega_i^\beta \wedge \omega_j^\gamma + \omega^k \wedge \omega_{ijk}^\alpha, \\ \omega_{i[jk]}^\alpha &\cong 0 \end{aligned}$$

Рассмотрим объект кривизны $R = \{R_{ij}^\alpha\}$ с внешней точки зрения. Продифференцируем внешним образом уравнения (6), с учётом их самих же, а также уравнений (1). Получим

$$2C_{\beta\gamma}^\alpha C_{\delta\epsilon}^\beta \Omega^\delta \wedge \Omega^\epsilon \wedge \Omega^\gamma + (dR_{ij}^\alpha - R_{kj}^\alpha \omega_i^k - R_{ik}^\alpha \omega_j^k + 2C_{\beta\gamma}^\alpha R_{ij}^\beta \Omega^\gamma) \wedge \omega^i \wedge \omega^j = 0$$

С учетом тождеств Якоби, первое слагаемое обращается в нуль, второе слагаемое после подстановки форм связности Ω^γ (3) примет вид:

$$(\Delta R_{ij}^\alpha - 2C_{\beta\gamma}^\alpha R_{ij}^\beta \Gamma_k^\gamma \omega^k) \wedge \omega^i \wedge \omega^j = 0,$$

Так как (см., напр., [4])

$$\Delta R_{ij}^\alpha = R_{ijk}^\alpha \omega^k, \quad (8)$$

можем вынести базисные формы за скобки

$$(R_{ijk}^\alpha - 2C_{\beta\gamma}^\alpha R_{ij}^\beta \Gamma_k^\gamma) \omega^k \wedge \omega^i \wedge \omega^j = 0.$$

Учитывая линейную независимость базисных форм, эти кубические уравнения позволяют записать

$$R_{[ijk]}^\alpha - 2C_{\beta\gamma}^\alpha R_{[ij}^\beta \Gamma_{k]}^\gamma = 0.$$

Используя факт того, что альтернирование по трем индексам тензора, кососимметричного по двум из них, совпадает с циклированием по этим трем индексам справедливо

Утверждение 1. *Аналоги тождеств Бьянки в главном расслоении для пфаффовых производных объекта кривизны R_{ijk}^α имеют вид*

$$R_{\{ijk\}}^\alpha - 2C_{\beta\gamma}^\alpha R_{\{ij}^\beta \Gamma_{k\}}^\gamma = 0.$$

Вместе с формами Ω^α рассмотрим преобразованные продолжения слоевых форм

$$\Omega_i^\alpha = \omega_i^\alpha - L_{ij}^\alpha \omega^j, \quad (9)$$

где L_{ij}^α – некоторые функции продолженных базисных и слоевых параметров. Дифференцируя внешним образом формы (9), получим [2]:

$$\begin{aligned} D\Omega_i^\alpha &= \omega_i^j \wedge \Omega_j^\alpha + C_{\beta\gamma}^\alpha \Omega_i^\beta \wedge \Omega^\gamma + \\ &+ \omega^j \wedge (\Delta L_{ij}^\alpha - C_{\beta\gamma}^\alpha \Gamma_j^\gamma \omega_i^\beta + \omega_{ij}^\alpha) - C_{\beta\gamma}^\alpha L_{ij}^\beta \Gamma_k^\gamma \omega^j \wedge \omega^k. \end{aligned}$$

Связность по Рыбникову в главном продолженном расслоении задается с помощью поля объекта $\Gamma^2 = \{\Gamma_i^\alpha, L_{ij}^\alpha\}$, компоненты которого удовлетворяют уравнениям (5) и следующим:

$$\Delta L_{ij}^\alpha - C_{\beta\gamma}^\alpha \Gamma_j^\gamma \omega_i^\beta + \omega_{ij}^\alpha = L_{ijk}^\alpha \omega^k. \quad (10)$$

Утверждение 2. *Формы связности 2-го порядка Рыбникова $\Omega^\alpha, \Omega_i^\alpha$ подчинены структурным уравнениям (6₁) и следующим [2]*

$$D\Omega_i^\alpha = \omega_i^j \wedge \Omega_j^\alpha + C_{\beta\gamma}^\alpha \Omega_i^\beta \wedge \Omega^\gamma + R_{ijk}^\alpha \omega^j \wedge \omega^k, \quad (11)$$

где компоненты 2-го порядка R_{ijk}^α объекта кривизны $R^2 = \{R_{ij}^\alpha, R_{ijk}^\alpha\}$ выражаются по формуле

$$R_{ijk}^\alpha = L_{i[jk]}^\alpha - C_{\beta\gamma}^\alpha L_{i[j}^\beta \Gamma_{k]}^\gamma. \quad (12)$$

Замечание. В общем случае уравнения (1, 6₁, 11) не являются структурными уравнениями главного расслоения со связностью, так как в уравнения (11) входят формы ω_i^j . Если ω_i^j – формы аффинной связности, то есть расслоение линейных реперов со структурными уравнениями (1, 7₁) является пространством аффинной связности без кручения, то $\omega_{ik}^j = r_{ikl}^j \omega^l$, $R_{ikl}^j = r_{i[kl]}^j$ – тензор кривизны аффинной связности. Этот особый случай соответствует специализации многообразия M_n как базы расслоенного пространства аффинной связности без кручения. Тогда уравнения (1, 6₁, 11) становятся структурными уравнениями пространства фундаментально-групповой связности 2-го порядка [4].

Найдем дифференциальные сравнения для пфаффовых производных L_{ijk}^α объекта L_{ij}^α . Для этого замкнем уравнения (10):

$$\begin{aligned}
& dL_{ijk}^\alpha \wedge \omega^k - L_{ij}^\alpha \omega_k^l \wedge \omega^k + L_{ijk}^\beta \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^k - L_{ijk}^\alpha \omega_i^l \wedge \omega^k - L_{ik}^\alpha \omega_j^l \wedge \omega^k + \\
& + L_{ij}^\beta C_{\beta\gamma}^\alpha \omega_k^\gamma \wedge \omega^k - L_{ij}^\alpha \omega_{ik}^l \wedge \omega^k - L_{il}^\alpha \omega_{jk}^l \wedge \omega^k + \Gamma_{ij}^l \omega_{ik}^\alpha \wedge \omega^k - \\
& - C_{\beta\gamma}^\alpha \Gamma_{jk}^\gamma \omega_i^\beta \wedge \omega^k - C_{\beta\gamma}^\alpha \Gamma_j^\gamma \omega_{ik}^\beta \wedge \omega^k + \omega_{ijk}^\alpha \wedge \omega^k = 0.
\end{aligned}$$

Вынося общие базисные формы ω^k за скобки и собирая первые пять слагаемых под дифференциальный оператор ΔL_{ijk}^α , имеем

$$\begin{aligned}
& (\Delta L_{ijk}^\alpha + C_{\beta\gamma}^\alpha L_{ij}^\beta \omega_k^\gamma - L_{ij}^\alpha \omega_{ik}^l - L_{il}^\alpha \omega_{jk}^l + \Gamma_{ij}^l \omega_{ik}^\alpha - \\
& - C_{\beta\gamma}^\alpha \Gamma_{jk}^\gamma \omega_i^\beta - C_{\beta\gamma}^\alpha \Gamma_j^\gamma \omega_{ik}^\beta + \omega_{ijk}^\alpha) \wedge \omega^k = 0.
\end{aligned}$$

Разрешая эти уравнения по лемме Картана и альтернируя по индексам j и k , получим сравнения:

$$\begin{aligned}
& \Delta L_{[jk]}^\alpha + C_{\beta\gamma}^\alpha L_{[ij]}^\beta \omega_{[k]}^\gamma - L_{[ij]}^\alpha \omega_{[k]}^l - L_{il}^\alpha \omega_{[jk]}^l + \Gamma_{il}^l \omega_{[jk]}^\alpha - \\
& - C_{\beta\gamma}^\alpha \Gamma_{[jk]}^\gamma \omega_i^\beta - C_{\beta\gamma}^\alpha \Gamma_{[j]}^\gamma \omega_{[k]}^\beta + \omega_{[ijk]}^\alpha \cong 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Теперь найдем результат действия дифференциального оператора на компоненты R_{ijk}^α объекта кривизны R^2 фундаментально-групповой связности 2-го порядка. Для этого запишем дифференциальные сравнения для свернутых произведений, входящих в формулу (12), и проальтернируем их по индексам j и k :

$$\begin{aligned}
& \Delta C_{\beta\gamma}^\alpha L_{i[j}^\beta \Gamma_{k]}^\gamma + C_{\beta\gamma}^\alpha \Gamma_{i[j}^l \Gamma_{k]}^\gamma \omega_l^\beta - C_{\beta\gamma}^\alpha C_{\delta\epsilon}^\beta \Gamma_{[j}^\epsilon \Gamma_{k]}^\gamma \omega_i^\delta + \\
& + C_{\beta\gamma}^\alpha \Gamma_{[k}^\gamma \omega_{i|j]}^\beta + C_{\beta\gamma}^\alpha L_{i[j}^\beta \omega_{k]}^\gamma \cong 0.
\end{aligned} \tag{14}$$

Применяя дифференциальный оператор Δ к обеим частям равенства (12), а также учитывая (13) и (14), получим

$$\Delta R_{ijk}^\alpha - L_{il}^\alpha \omega_{[jk]}^l + L_{il}^\alpha \omega_{[i|k]}^l - C_{\beta\gamma}^\alpha \Gamma_{[jk]}^\gamma \omega_i^\beta + C_{\beta\gamma}^\alpha C_{\delta\epsilon}^\beta \Gamma_{[j}^\epsilon \Gamma_{k]}^\gamma \omega_i^\delta + \omega_{i[jk]}^\alpha \cong 0. \tag{15}$$

Выражая из уравнений (6₂) компоненты $\Gamma_{[jk]}^\gamma$ через компоненты кривизны R_{jk}^γ и подставляя в (15), получим

$$\Delta R_{ijk}^\alpha - L_{il}^\alpha \omega_{[jk]}^l - C_{\beta\gamma}^\alpha R_{jk}^\gamma \omega_i^\beta + \omega_{i[jk]}^\alpha \cong 0, \tag{16}$$

С учетом условий (7₂, 7₄) дифференциальные сравнения (16) для компонент R_{ijk}^α объекта кривизны связности 2-го порядка примут вид (ср. [4]):

$$\Delta R_{ijk}^{\alpha} - C_{\beta\gamma}^{\alpha} R_{jk}^{\gamma} \omega_i^{\beta} \cong 0. \quad (17)$$

Утверждение 3. *Получены дифференциальные сравнения (8, 16) для компонент тензора кривизны связности 2-го порядка Рыбникова, которые не приведены в работе [4].*

Замечание. В работе [2] автор исследует G –структуру, названную связностью 2-го порядка. В частности, при исследовании связности 2-го порядка [3] говорится о квазитензоре кривизны второго порядка, но нет соответствующих дифференциальных уравнений.

Литература

1. Лаптев Г.Ф. Структурные уравнения главного расслоенного многообразия // Тр. геом. семин./ВИНИТИ. Москва, 1969. – Т.2. – С. 161-178.
2. Рыбников А.К. О связностях и G -структурах // Дифф. геом. Обобщенные пространства и их приложения : межвуз. науч. сб. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1988. – Вып. 9. – С. 65-76.
3. Рыбников А.К. Об аффинных связностях второго порядка // Матем. Заметки. – 1981. – Том 29. – Вып. 2. С. 279-290.
4. Рязанов Н.А. Объект кривизны фундаментально-групповой связности 2-го порядка // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. – 2017. – №4. – С. 10-15.

Рязанов Никита Андреевич, аспирант института физико-математических наук и информационных технологий, Балтийский федеральный университет им. И. Канта, 236016, г. Калининград, ул. А.Невского, 14А, e-mail: ryazanov-92@mail.ru

Ryazanov Nikita Andreevich, post-graduate student, I. Kant Baltic Federal University

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ПО ЕЁ ФУНКЦИОНАЛАМ

Аннотация. Целью этой работы является исследование вопросов единственности решения некоторых задач геометрической томографии. Изучение таких задач в ряде случаев сводится к доказательству единственности решения уравнений первого рода типа свертки на сфере. Для уравнения первого рода типа свертки на сфере с квадратично интегрируемым ядром общего вида получена теорема единственности решения такого уравнения. Ввиду специфики ядра, для доказательства предлагается использовать метод сферических гармоник. Получены теоремы единственности определения выпуклого тела по функционалам от функции главных радиусов кривизны выпуклой поверхности. Указана возможная физическая интерпретация таких функционалов. Доказана теорема единственности восстановления связного компактного аналитического многообразия без края, выпуклая оболочка которого имеет центр симметрии, по его проекционным функциям.

Ключевые слова: уравнение первого рода, геометрическая томография, единственность, выпуклая поверхность, аналитическое многообразие.

© V. N. Stepanov

SURFACE RECONSTRUCTION BY ITS FUNCTIONALS

Abstract. The purpose of this paper is to research of the uniqueness questions solution for some problems of geometric tomography. The study of such problems in some cases reduces to proving the uniqueness solution of equations the first kind of convolution type on a sphere. For the equation of the first kind convolution type on a sphere with quadratically integrable kernel of general form, the uniqueness theorem for the solution of such equation is obtained. The method of spherical harmonic is proposed to be used for the proof, because of the kernel specifics. We obtained uniqueness theorems for the definition of a convex body by the functionals of the main radii of curvature of a convex surface. The uniqueness theorem for the reconstruction of a compact connected analytic manifold whose convex hull has a center of symmetry is proved from its projection functionals.

Keywords: the equation of the first kind, geometric tomography, uniqueness, convex surface, analytical manifold.

Введение

Пусть $S^{n-1} = \{x \in R^n : |x| = 1\}$ – единичная сфера в R^n ; u, v – точки на S^{n-1} ; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение; u^\perp – подпространство ортогональное вектору u ; $d\sigma$ – элемент площади на S^{n-1} , $n \geq 3$.

Рассмотрим уравнение первого рода типа свертки на S^2

$$(Kz)(u) \equiv f(u) = \int_{S^2} K(\langle u, v \rangle) z(v) d\sigma_v \quad (1)$$

относительно функции $z(v) \in L_2(S^2)$.

Интегральные уравнения вида (1) с ядрами $K(\langle u, v \rangle)$ тесно связаны с задачами геометрической томографии. Термин *геометрическая томография* введен R.J. Gardner. Это область математики, которая имеет дело с восстановлением компактного множества M в R^n по мерам проекций тела на подпространство и/или по мерам сечений тела подпространствами [1]. Такие задачи относятся к классу обратных задач, когда по информации об объекте можно восстановить сам объект. Ключевым обстоятельством при исследовании обратных задач геометрической томографии является вопрос однозначного восстановления множества M по информации об объекте. Различные постановки задач геометрической томографии и обширный список литературы представлены в монографии [1].

В работе, используя метод сферических гармоник, доказывается теорема единственности решения уравнения (1) с ядром $K(\langle u, v \rangle)$ класса $L_2[-1, 1]$. Теорема является некоторым обобщением известной теоремы единственности с ядром $K(\langle u, v \rangle) = |\langle u, v \rangle|$. Применяя теорему единственности решения уравнения (1), мы доказываем ряд утверждений о восстановлении выпуклых и невыпуклых многообразий по функционалам проекций и освещенных частей многообразия.

1. Единственность решения уравнения первого рода типа свертки.

Пусть $\{Y_k^{(m)}(u)\}$ – полная ортогональная система сферических функций в $L_2(S^2)$ и $Y_k(u) = \sum_{m=-k}^k a_k^{(m)} Y_k^{(m)}(u)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ – сферическая гармоника

порядка k . Введем моменты функции $z(v) \in L_2(S^2)$ по системе сферических гармоник $\{Y_k(u)\}$:

$$\mu_k = \int_{S^2} Y_k(v) z(v) d\sigma, \quad k=0,1,2,\dots \quad (2)$$

Лемма. Функция $z(v) \in L_2(S^2)$ однозначно определяется своими моментами $\mu_k, k=0,1,2,\dots$ по системе $\{Y_k(u)\}$.

Доказательство. Пусть существуют, по крайней мере, две функции z_1 и z_2 моменты которых совпадают. Тогда достаточно доказать, что для функции $z = z_1 - z_2$ из равенств

$$\int_{S^2} Y_k(v) z(v) d\sigma = 0, \quad k=0,1,2,\dots$$

следует равенство $z \equiv 0$. По теореме Стоуна-Вейерштрасса линейная оболочка сферических функций плотна в банаховом пространстве всех непрерывных функций на сфере, поэтому

$$\int_{S^{n-1}} \varphi(v) z(v) d\sigma = 0$$

для любой непрерывной функции $\varphi(v) \in C(S^{n-1})$. Следовательно, $z(v) \equiv 0$.

Теорема 1. Если ядро $K(\langle u, v \rangle) \in L_2[-1,1]$ и система его собственных функций полна в $L_2(S^2)$, то уравнение (1) имеет не более одного решения в $L_2(S^2)$.

Доказательство. Умножим уравнение (1) на $Y_k(u)$, проинтегрируем по сфере S^2 и применим теорему Фубини, получим:

$$\begin{aligned} \int_{S^2} f(u) Y_k(u) d\sigma_u &= \int_{S^2} Y_k(u) \left(\int_{S^2} K(\langle u, v \rangle) z(v) d\sigma_v \right) d\sigma_u = \int_{S^2} d\sigma_u \\ &\left(\int_{S^2} K(\langle u, v \rangle) Y_k(u) z(v) d\sigma_v \right) = \int_{S^2} \left(\int_{S^2} K(\langle u, v \rangle) Y_k(u) d\sigma_u \right) z(v) d\sigma_v. \end{aligned}$$

По формуле Функа-Гекке [2] внутренний интеграл

$$\int_{S^{n-1}} K(\langle u, v \rangle) Y_k(u) d\sigma_u = \lambda_k \cdot Y_k(v),$$

где собственные значения λ_k равны

$$\lambda_k = 2\pi \int_{-1}^1 K(t) P_k(t) dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

а $P_k(t)$ - многочлены Лежандра.

Ввиду формулы Функа-Гекке и равенств (2), имеем

$$f_k = \int_{S^2} Y_k(u) f(u) d\sigma = \lambda_k \mu_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Так как система собственных функций ядра $K(\langle u, v \rangle)$ полна в $L_2(S^2)$, то $\lambda_k \neq 0$. Следовательно, по моментам f_k функции $f(u)$ однозначно определяются моменты μ_k функции $z(u)$: $\mu_k = f_k / \lambda_k$. Согласно лемме, функция $z(v)$ определяется однозначно.

Теорема легко обобщается на случай пространства $L_2(S^{n-1})$. Условия разрешимости в пространстве $L_2(S^{n-1})$ уравнений первого рода с самосопряженным ядром хорошо известны (см., например, [3]).

2. Восстановление поверхности по её функционалам.

В геометрической томографии большое значение имеют интегральные уравнения первого рода типа свертки на сфере. Приведем примеры таких уравнений [1].

В случаях, когда в уравнении (1) ядро $K(\langle u, v \rangle) = \delta(\langle u, v \rangle)$, $\delta(t)$ – дельта-функция; $K(\langle u, v \rangle) = |\langle u, v \rangle|$; $K(\langle u, v \rangle) = |\langle u, v \rangle|^\alpha$; $K(\langle u, v \rangle) = \chi(\langle u, v \rangle)$, $\chi(t)$ – функция Хевисайда, интегральные преобразования хорошо известны и называются соответственно сферическим преобразованием Радона Rz ; косинус-преобразованием Cz ; α -косинус-преобразованием $C_\alpha z$ и полусферическим преобразованием H_z .

Эти преобразования имеют следующий геометрический смысл: если $(n-1)z(v) = \rho^{n-1}(v)$, где $\rho(v)$ – радиальная функция звездного тела B , то преобразование Радона $(Rz)(u)$ есть объем пересечения тела B с подпространством u^\perp ; если функция $z(v)$ равна произведению главных радиусов кривизны замкнутой гладкой выпуклой поверхности ∂B в точке с нормалью v , то $(Cz)(u)$ это $(n-1)$ -мерный объем проекции выпуклого тела B на подпространство u^\perp , а $(Hz)(u)$ является площадью "освещенной" части поверхности ∂B .

Обобщением приведенных выше преобразований (функций) являются проекционные функции $V_i(B,u)$ выпуклого тела и функции кривизны $W_i(\partial B,u)$ освещенной части выпуклой поверхности:

$$V_i(B,u) = \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} |\langle u, v \rangle| \sigma_i(dv), \quad W_i(\partial B,u) = \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} \chi(\langle u, v \rangle) \sigma_i(dv),$$

здесь $B \subset R^n$ – выпуклое тело в пространстве R^n (с не обязательно гладкой границей ∂B); $\sigma_i(\cdot)$ – i -я поверхностная функция кривизны выпуклого тела, $1 \leq i \leq n-1$ [4]. При $n=3$ функция $V_1(B,u)$ равна длине границы $L(u)$ ортогональной проекции, а $V_2(B,u)$ площади $F(u)$, ортогональной проекции тела $B \subset R^n$ на плоскость $\langle x, u \rangle = 0$; функция $W_2(\partial B,u)$ равна площади $S(u)$ освещенной в направлении u части поверхности $S = \partial B$.

В задачах геометрической томографии значительный интерес представляют формулы обращения интегральных уравнений, вопросы единственности и устойчивости их решений.

Если B выпуклое тело, ограниченное поверхностью класса C_+^2 (класса C^2 с положительной гауссовой кривизной), в пространстве R^3 , то для площади $F(u)$, длины границы $L(u)$ ортогональной проекции и площади $S(u)$ освещенной части поверхности имеют место формулы [4, 5]:

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_{S^2} |\langle u, v \rangle| R_1(v) R_2(v) d\sigma_v, \quad L(u) = \frac{1}{2} \int_{S^2} |\langle u, v \rangle| [R_1(v) + R_2(v)] d\sigma_v,$$

$$S(u) = \int_{S^2} \chi(\langle u, v \rangle) R_1(v) R_2(v) d\sigma_v.$$

В таком случае решение уравнения (1) с ядром $K(\langle u, v \rangle) = a|\langle u, v \rangle| + b\chi(\langle u, v \rangle)$ относительно функции $z(u)$ равной произведению главных радиусов кривизны $R_1(u)R_2(u)$ поверхности S может быть найдено в явном виде.

Теорема 2. *Замкнутая выпуклая поверхность S класса C_+^2 в R^3 однозначно с точностью до параллельного переноса восстанавливается по функционалу $f(u) = 2aF(u) + bS(u)$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a + b \neq 0$.*

Доказательство. Для уравнения

$$f(u) = \int_{S^2} [a|\langle u, v \rangle| + b\chi(\langle u, v \rangle)] R_1(v) R_2(v) d\sigma_v = 2aF(u) + bS(u)$$

относительно $R_1(u)R_2(u)$ имеет место формула обращения [6]:

$$R_1(u)R_2(u) = -\frac{1}{8\pi^2} \frac{d}{dt} \int_{\langle u, v \rangle > t} \frac{(\Delta_S + 2)f_1(v) |\langle u, v \rangle| d\sigma_v}{\sqrt{\langle u, v \rangle^2 - t}} \Big|_{t=0} -$$

$$\frac{1}{4\pi^2 b} \int_{\langle u, v \rangle > 0} \frac{\Delta_S f^-(v) d\sigma_v}{\langle u, v \rangle}, \quad f^\pm(v) = \frac{f(v) \pm f(-v)}{2},$$

$$f_1(v) = \frac{a-b}{a(a+b)} f^+(v) - \frac{b}{4\pi a(a+b)} \int_{S^2} f^+(v) d\sigma_v,$$

где Δ_S – поверхностный оператор Лапласа. Следовательно, произведение главных радиусов кривизны $R_1(u)R_2(u)$ выпуклой поверхности S определяется однозначно и конструктивно. Как хорошо известно, замкнутая выпуклая поверхность по гауссовой кривизне $G(u) = [R_1(u)R_2(u)]^{-1}$ (а, следовательно, и по функционалу $f(u)$) определяется однозначно с точностью до параллельного переноса.

Таким образом, в зависимости от вида ядра $K(\langle u, v \rangle)$ и функции $z(v)$, как некоторой функции главных радиусов кривизны, имеется ясная геометрическая интерпретация функции $f(u)$, определяемой уравнением (1).

Что касается физической интерпретации, то функция

$$f(u) = \int_{S^2} K(\langle u, v \rangle) \varphi(R_1(v), R_2(v), v) d\sigma_v \quad (3)$$

может характеризовать интенсивность излучения поверхностью S в направлении $u \in S^2$ при наличии на S излучателей или при рассеянии поверхностью S . Так в работе [7] показано, что в случае рассеяния плоских волн на строго выпуклом теле B при $\lambda \gg 1$ (высокие частоты) амплитуда рассеяния в «прямом направлении» в приближении Кирхгоффа дается формулой:

$$A(u, u, \lambda) = 2i\lambda \int_{\partial B^+} \langle u, \nu(x) \rangle dS_x,$$

где $\nu(x)$ – единичный вектор нормали в точке $x \in \partial B$, $\partial B^+ = \{x \in \partial B : \langle u, \nu(x) \rangle \geq 0\}$. Интеграл в этой формуле есть в точности площадь проекции ∂B^+ на плоскость с нормалью направления u .

Из сказанного выше ясно, что вопрос определения выпуклой поверхности S сводится к возможности обращения уравнения (3) и к проблеме определения поверхности по функции $\varphi(R_1, R_2, v)$. В случае

$\varphi(R_1, R_2, v) = R_1(v)R_2(v)$ – это проблема Минковского, в случае $\varphi(R_1, R_2, v) = R_1(v) + R_2(v)$ – проблема Христоффеля.

Теорема 3. Пусть S – замкнутая строго выпуклая поверхность класса C_+^2 в R^3 и $\varphi(R_1(v), R_2(v), v)$ – строго монотонная функция главных радиусов кривизны R_1, R_2 поверхности S и непрерывная функция единичного вектора $v \in S^2$. Тогда поверхность S по функции

$$f(u) = \int_{S^2} K(\langle u, v \rangle) \varphi(R_1(v), R_2(v), v) d\sigma_v,$$

где $K(\langle u, v \rangle)$ – полное ядро, определяется однозначно с точностью до параллельного переноса

Доказательство. По теореме 1 уравнение (3) однозначно разрешимо относительно функции $\varphi(R_1, R_2, v)$. Функция $\varphi(R_1(v), R_2(v))$ удовлетворяет условиям теоремы единственности замкнутых выпуклых поверхностей с заданной функцией главных радиусов кривизны [8]. Согласно этой теореме поверхность S определяется однозначно с точностью до параллельного переноса.

Сформулируем следующую задачу. Определяется ли однозначно связное компактное аналитическое многообразие без края в $R^n, n \geq 2$, функцией $f(u) = 2aF(u) + bS(u)$, где $F(u)$ – площадь ортогональной проекции многообразия на плоскость $\langle x, u \rangle = 0$, а $S(u)$ – площадь освещенной части многообразия S в направлении u ? Мы рассмотрим частный случай.

Пусть S – связная компактная аналитическая поверхность без края в R^3 . Существуют поверхности, ортогональные проекции которых на любую плоскость $\langle x, u \rangle = 0$ являются выпуклыми. Примером такой поверхности является аналитическая поверхность, заданная в прямоугольной декартовой системе координат уравнением:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2c^2(x^2 + z^2 - y^2) = a^4 - c^4, c < a < \sqrt{2}c.$$

Эта поверхность получается вращением вокруг оси OY овала Кассини с «талией» $(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = a^4 - c^4, c < a < \sqrt{2}c$.

Невыпуклые аналитические поверхности с выпуклыми проекциями можно построить также следующим образом. Рассмотрим аналитический овалويد и отсечем от него конечное число шапочек с непересекающимися плоскими контурами L_1, L_2, \dots, L_m . Заклеим плоские контуры кусками плоскостей – крышками. Слегка вдавим эти плоские куски внутрь, так,

чтобы получилась невыпуклая аналитическая поверхность. Сферическое изображение поверхности, которая не содержит вдавненных частей, покрывает всю сферу S^2 и её полная кривизна равна 4π . Класс таких поверхность обозначим T .

Пусть T_1 - подмножество T -поверхностей, которые получаются отсечением конечного числа центрально симметричных шапочек от аналитического центрально симметричного овалоида.

Теорема 4. T_1 -поверхность определяются площадями ортогональных проекций на плоскости всевозможных направлений однозначно с точностью до параллельного переноса.

Доказательство. Площадь $F(u)$ ортогональной проекции T -поверхности на любую плоскость $\langle x, u \rangle = 0, u \in S^2$, совпадает с площадью $F_{co}(u)$ ортогональной проекции выпуклой оболочки T -поверхности. По построению выпуклая оболочка T_1 -поверхности – выпуклая центрально симметричная кусочно-аналитическая поверхность. Площадь $F_{co}(u)$ её ортогональной проекции на плоскость $\langle x, u \rangle = 0, u \in S^2$, дается формулой:

$$F(u) = F_{co}(u) = \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} |\langle u, v \rangle| \sigma_2(dv), \quad (4)$$

где $\sigma_2(\cdot)$ - симметричная поверхностная функция выпуклой оболочки. Уравнение (4) однозначно разрешимо относительно меры $\sigma_2(\cdot)$ [4]. По теореме единственности А.Д. Александрова поверхностная функция $\sigma_2(\cdot)$ определяет выпуклую оболочку поверхности однозначно с точностью до параллельного переноса. Таким образом, по функции $F(u) = F_{co}(u)$ определяется выпуклая оболочка T_1 -поверхности. Как доказано в [9], связная аналитическая поверхность однозначно определяется своей выпуклой оболочкой.

Аналогично можно показать, что T_1 -поверхность определяются длинами границ своих ортогональных проекций на плоскости всевозможных направлений.

Отметим, что в работе [10] предложен метод восстановления формы выпуклой оболочки невыпуклого тела и рассеивающих параметров по фотометрическим измерениям и обобщенной функции яркости.

Литература

1. Gardner, R.J. Geometric tomography / R.J. Gardner - New York: Cambridge Univ. Press. Cambridge, 1995. – 424 p.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974. – 296 с.
3. Интегральные уравнения / П. П. Забрейко, А.И. Кошелев, М.А. Красносельский и др. // Москва : Наука, 1968. - 448 с.
4. Александров А.Д. К теории смешанных объемов выпуклых тел.
5. Бляшке В. Круг и шар. // Москва : Наука. 1967. – 232 С.
6. Аниконов Ю.Е., Степанов В.Н. Геометрия выпуклых поверхностей и обратные задачи теории рассеяния. Сиб. ма-тем. Журнал. – 1994. – Т. 35. – № 5. – с. 955–973.
7. Majda A.&Taylor M. The asymptotic behavior of the diffraction peak in classical scattering Comm. Pure and Appl. Math. 1977. – Vol 30, № 5. – pp. 639-669.
8. Бакельман И.Я., Вернер А.П., Кантор Б.Е. Введение в дифференциальную геометрию «в целом». // Москва : Наука. 1973. – 440 с.
9. Golubyatnikov V.P. Uniqueness questions in reconstruction of multidimensional objects from tomography-type projection data, Inverse and ill-posed problems series, VSP, Utrecht, 2000. – 120 p.
10. Kaasalainen Mikko. Shape reconstruction from generalized brightness functions: extension of geometric tomography. RNI/Observatory, University of Helsinki www.astro.helsinki.fi/~kaselain

Степанов Владимир Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент, кафедра высшей математики ОмГТУ, г. Омск 644010, ул. Масленникова, дом 66, кв. 112. тел. 8 913 605-11-70, 8-923-045-18-97. email: stpnv@yandex.ru

Stepanov Vladimir Nikolaevich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, OmSTU

ПОВЕРХНОСТИ В КВАЗИГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ ${}^{11}S_3^1$

Аннотация. Квазигиперболические пространства являются проективными пространствами с распадающимся абсолютом. В данной работе рассмотрены поверхности в одном из этих пространств методами внешних форм и подвижного репера. Построен и геометрически характеризуется полуканонический репер поверхности, который является каноническим репером для произвольной линии на поверхности. Построены и геометрически характеризованы два канонических репера поверхности в трехмерном квазигиперболическом пространстве ${}^{11}S_3^1$, доказана теорема существования, получена полная система инвариантов поверхности, определены геометрические значения инвариантов. Найдены и геометрически характеризованы две первые квадратичные формы и вторая квадратичная форма поверхности. Получены геометрические характеристики для инвариантов линии на поверхности. Рассмотрен один простейший класс поверхностей, доказано существование этого класса с широтой в три функции одного аргумента.

Ключевые слова: квазигиперболическое пространство; абсолют; поверхность; канонический репер; инварианты; кривизна.

© V. B. Tsyrenova

SURFACES IN THE QUASI-HYPERBOLIC SPACE ${}^{11}S_3^1$

Abstract. Quasi-hyperbolic spaces are projective spaces with a decomposable absolute. In this paper we consider the surface in one of these spaces by methods of external forms and moving frame. We construct and geometrically characterize a semi-canonical frame of the surface, which is a canonical frame for any line on the surface. Then we construct and geometrically characterize two canonical frames of the surface. The theorem of existence is proved, full system of surface invariants is obtained, and the geometric values of the invariants are determined. The first two quadratic forms and the second quadratic form of the surface are found and geometrically characterized. We received the geometric characteristics of the invariants of lines on surfaces. We found one special class of surfaces. The latitude of this class is three functions of one argument.

Key words: quasi-hyperbolic space, absolute, surface, the canonical frame, invariants, curvature.

Введение

Квазигиперболические пространства изучались многими учениками Б.А. Розенфельда и Р.Н. Щербакова. Автором была наиболее полно изучена дифференциальная геометрия квазиэллиптического пространства. Построена теория поверхностей, регулюсов, конгруэнций и комплексов методом внешних форм. Далее, во всех перечисленных пространствах нами изучены линейчатые поверхности и конгруэнции, построены и геометрически характеризованы их канонические реперы, получены геометрические характеристики инвариантов и простейшие классы.

В данной работе рассмотрим поверхности в трехмерном квазигиперболическом пространстве ${}^{11}S_3^1$.

1. Квазигиперболическое пространство ${}^{11}S_3^1$

Квазигиперболическое пространство ${}^{11}S_3^1$ это проективное 3-пространство, в котором метрика определяется абсолютом, заданным совокупностью пары действительных плоскостей и пары действительных точек на прямой их пересечения.

Будем пользоваться такой системой координат, в которой абсолютные плоскости q_1, q_2 , абсолютная прямая T_0 и абсолютные точки на ней Q_1, Q_2 имеют соответственно уравнения:

$$(X, X)_1 = (x^0)^2 + 2x^0x^1 = 0, x^0 = x^1 = 0, (X, X)_2 = (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0. (1)$$

Абсолютные плоскости пространства ${}^{11}S_3^1$ разбивают многообразие точек проективного пространства, не принадлежащих абсолюту, на две связные области. Мы рассматриваем ту область, для точек которой $(X, X)_1 > 0$, а их координаты и координаты точек абсолютной прямой будем нормировать соответственно условиям $(X, X)_1 = 1$ и $(X, X)_2 = 1$.

Расстояния δ_0, d и δ_1 между точками X и Y с нормированными координатами гиперболической, абсолютной и евклидовой прямых находятся по формулам

$$ch\delta_0 = (X, Y)_1, ch\delta_1 = (X, Y)_2, d^2 = (X, Y)_2, (2)$$

Деривационные формулы наиболее общего репера пространства ${}^{11}S_3^1$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
dA_0 &= \omega_0^0(A_0 - A_1) + \omega_0^2 A_2 + \omega_0^3 A_3, \\
dA_1 &= -\omega_0^0 A_1 + \omega_1^2 A_2 + \omega_1^3 A_3, \\
dA_2 &= \omega_2^3 A_3, \\
dA_3 &= \omega_2^3 A_2.
\end{aligned} \tag{3}$$

2. Поверхности в пространстве ${}^{11}S_3^1$

Будем задавать поверхность параметрическим уравнением $A = A(u^1, u^2)$. Включим точку поверхности и касательную плоскость (а, следовательно, и нормаль) в репер в качестве точки A_0 и плоскости $(A_0 A_1 A_2)$. Тогда получаем деривационные формулы полуканонического репера поверхности в виде

$$\begin{aligned}
dA_0 &= \omega_0^0 A_0 - \omega_0^0 A_1 + \omega_0^2 A_2, \\
dA_1 &= -\omega_0^0 A_1 + (\mu \omega_0^0 + \nu \omega_0^2) A_2 + (\alpha \omega_0^0 + \beta \omega_0^2) A_3, \\
dA_2 &= (-\beta \omega_0^0 + \gamma \omega_0^2) A_3, \\
dA_3 &= (-\beta \omega_0^0 + \gamma \omega_0^2) A_3.
\end{aligned}$$

Для базисных форм ω_0^0 и ω_0^2 имеем $D\omega_0^0 = 0, D\omega_0^2 = (1 - \nu)\omega_0^0 \wedge \omega_0^2$, а основная система дифференциальных уравнений [1] принимает вид

$$\begin{aligned}
d\alpha \wedge \omega_0^0 + d\beta \wedge \omega_0^2 &= (\gamma\mu + \beta(\nu - 1)\omega_0^0 \wedge \omega_0^2); \\
d\beta \wedge \omega_0^0 - d\gamma \wedge \omega_0^2 &= \gamma(1 - \nu)\omega_0^0 \wedge \omega_0^2; \\
d\mu \wedge \omega_0^0 + d\nu \wedge \omega_0^2 &= (\nu^2 - 2\nu + \alpha\gamma + \beta^2)\omega_0^0 \wedge \omega_0^2.
\end{aligned}$$

Решение этой системы существует с произволом в две функции двух аргументов, что соответствует произволу существования поверхности, отнесенной к произвольному семейству линий [1].

Полную систему инвариантов поверхности образуют инварианты $\gamma, I = \beta^2 + 2\alpha\gamma$ и значения μ и ν при какой-либо канонизации репера.

При $\alpha = 0, \beta \neq 0$ и $\beta = 0, \alpha \neq 0$ получаем канонические реперы R_1 и R_2 .

Полную систему инвариантов линии $\omega_0^2 = 0$ на поверхности составляют значения коэффициентов α, β, μ , вычисленных вдоль этой линии. Линии $\omega_0^0 = 0$ высекаются на поверхности евклидовыми плоскостями и называются евклидовыми сечениями [5]. В [4] они названы изотропными линиями кривизны.

На поверхности определены две первые квадратичные формы $\varphi_1 = (dA_0, dA_0)_1 = -(\omega_0^0)^2$; $\varphi_1' = (dA_0, dA_0)_2 = (\omega_0^2)^2$. Вторая квадратичная форма поверхности имеет вид $\varphi_2 = (d^2 A_0, A_0, A_1, A_2) = -\alpha(\omega_0^0)^2 - 2\beta\omega_0^0\omega_0^2 + \gamma(\omega_0^2)^2$. Геометрическое значение второй квадратичной формы получается из соотношения $\varphi_2 = \pm 2\delta$, где δ - расстояние между точками A_0 и $B = pr_{A_0 A_1 A_2}^{A_3} (A_0 + dA_0 + \frac{1}{2}d^2 A_0 + [3])$.

Уравнения торсов конгруэнции $\{A_0 A_3\}$ нормалей поверхности имеют вид $\omega_0^0 = 0$ и $\beta\omega_0^0 - \gamma\omega_0^2 = 0$, фокусами образующих являются точки $F_1 = A_0 + \frac{1}{\gamma}A_3$ и $F_2 = A_3$, это означает, что одна из эволют вырождается в абсолютную прямую.

Инвариант $a = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}$ называют нормальной кривизной линии $\omega_0^0 : \omega_0^2$ на поверхности [1]. Для линии $\omega_0^0 = 0$ форма $\varphi_1 = 0$, а нормальная кривизна $a = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \gamma$.

Поверхности $\nu = 0$ характеризуются тем, что евклидово сечение $\omega_0^0 = 0$ является горловой линией регулюса $(A_0 A_1)$ касательных к асимптотической линии $\omega_0^2 = 0$ и существуют с произволом трех функций одного аргумента.

Далее, в докладе предполагается сделать обзор результатов по теории поверхностей всех четырех пространств ${}^{\alpha\beta}S_3^1$.

Литература

1. Розенфельд Б.А. Неевклидовы пространства. Москва : Наука, 1969. – 548 с.
2. Щербаков Р.Н. Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии. Томск: Изд-во Томского ун-та, 1960. – 194 с.
3. Гурьева В.П., Абдурахманова Х.К. К теории поверхностей в трехмерных квазиэллиптическом и квазигиперболических пространствах. // Геометр. сб., 17. Изд-во Томск. ун-та. – 1976. – С. 132-139.
4. Слободской В.И. Теория поверхностей в трехмерном квазигиперболическом пространстве ${}^{10}S_3^1$. // Геометр. сб., 21. Изд-во Томск. ун-та. – 1980. – С. 55-67.

5. Цыренова В.Б., Щербаков Р. Н. Основы теории поверхностей трехмерного квазиэллиптического пространства. // Геометр. сб., 15. Изд-во Томск. ун-та. – 1975. – С. 183-204.

6. Цыренова В.Б. К теории поверхностей в квазиэллиптическом пространстве. // Геометр. сб., 19. Изд-во Томск. ун-та. – 1978. – С. 96-108.

Цыренова Валентина Бабасановна, кандидат физико-математических наук, доктор педагогических наук, доцент, профессор кафедры алгебры, геометрии и методики преподавания математики Бурятского государственного университета, 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5, e-mail: v.ts@mail.ru.

Tsyrenova Valentina Babasanovna, Candidate of Physics and Mathematics, Doctor of Pedagogics, Associate Professor, Buryat State University

ПОЛУГОЛОНОМНОСТЬ ФАКТОР-МНОГООБРАЗИЯ ГОЛОНОМНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ БЕЗ КРУЧЕНИЯ

Аннотация. Рассмотрено пространство аффинной связности без кручения. Показано, что его база является полуголономным гладким многообразием. Введен тензор полуголономности этого пространства, при обращении которого в нуль база становится голономным гладким многообразием.

Исследуется распределение на базе, т.е. в касательных пространствах к базе выделяются подпространства фиксированной размерности. Распределение определяется фундаментальным тензором, содержащим подтензор, альтернирование которого дает тензор неголономности распределения. Аннулирование этого тензора приводит к голономному распределению. В этом случае база имеет фактор-многообразие, состоящее из подмногообразий, огибающих подсемейства распределения, размерность которых равна размерности образующих подпространств.

Доказано, что фактор-многообразие голономного распределения полуголономно. Введен объект полуголономности этого многообразия, который не является тензором. Найдено условие тензорности объекта полуголономности фактор-многообразия, состоящее в равенстве нулю подтензора тензора кривизны пространства аффинной связности без кручения с заданным распределением. Аннулирование этого подтензора выделяет специальное пространство аффинной связности с распределением. Если в специальном пространстве тензор полуголономности обратится в нуль, то фактор-пространство будет голономным.

Ключевые слова: голономное и полуголономное гладкие многообразия, тензор полуголономности пространства аффинной связности без кручения, тензор неголономности распределения, объект полуголономности фактор-многообразия голономного распределения.

© Ju. I. Shevchenko, E. V. Skrydlova

SEMI-HOLONOMICITY OF THE FACTOR-MANIFOLD OF HOLONOMIC DISTRIBUTION IN THE SPACE OF AN AFFINE CONNECTION WITHOUT TORSION

Abstract. The space of an affine connection without torsion is considered. It is shown that its base is a semi-holonomic smooth manifold. A tensor of the semi-holonomicity of this space is introduced, with the inversion of which to zero the base becomes a holonomic smooth manifold.

The distribution on the base is investigated. In the tangent spaces to the base, subspaces of fixed dimension are distinguished. The distribution is determined by the fundamental tensor containing the sub-tensor, the alternation of which gives the non-holonomicity tensor of the distribution. The annihilation of this tensor leads to a holonomic distribution. In this case the base has a factor-manifold consisting of submanifolds enveloping the subfamilies of a distribution whose dimension is equal to the dimension of the generators subspaces.

It is proved that the quotient variety of a holonomic distribution is semi-holonomic. An object of semi-holonomicity of this manifold is introduced, which is not a tensor. The tensor property of the object of semi-holonomicity of a factor manifold is found, consisting in the vanishing of the subtensor of the curvature tensor of a torsion-free affine connection space with a given distribution. The cancellation of this subtensor allocates a special space of affine connection with the distribution. If in a special space the semi-holonomicity tensor vanishes, then the quotient space will be holonomic.

Keywords: holonomic and semi-holonomic smooth manifolds, the semi-holonomicity tensor of an affine-connection space without torsion, the non-holonomicity tensor of a distribution, the object of semi-holonomicity of the factor manifold of a holonomic distribution.

1. Тензор полуголомности пространства аффинной связности

Рассмотрим пространство аффинной связности без кручения $A_{n,n}^0$ со структурными уравнениями Картана (см., напр., [1, с.64, 111, 112]):

$$d\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I \quad (I, \dots = \overline{1, n}), \quad (1)$$

$$d\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + R_{JKL}^I \omega^K \wedge \omega^L, \quad (2)$$

где R_{JKL}^I – тензор кривизны, компоненты которого удовлетворяют следующим соотношениям:

$$R_{J(KL)}^I = 0, \quad R_{\{JKL\}}^I = 0, \quad \nabla R_{JKL}^I = R_{JKLM}^I \omega^M, \quad (3)$$

причем круглые скобки обозначают симметрирование, фигурные скобки определяют циклирование, а ковариантный дифференциал ∇ действует следующим образом:

$$\nabla R_{JKL}^I = dR_{JKL}^I + R_{JKL}^M \omega_M^I - R_{MKL}^I \omega_J^M - R_{JML}^I \omega_K^M - R_{JKM}^I \omega_L^M.$$

Условие антисимметрии (3₁) объясняется тем, что в структурных уравнениях (2) по индексам K, L происходит суммирование с антикоммутативными внешними произведениями. Тожества Риччи (3₂) получаются при внешнем дифференцировании структурных уравнений (1) с использованием уравнений (2), что дает

$$R_{JKL}^I \omega^J \wedge \omega^K \wedge \omega^L = 0 \leftrightarrow R_{[JKL]}^I = 0,$$

где квадратные скобки обозначают альтернирование. Откуда с помощью условия (3₁) получаются тождества (3₂).

Дифференцируя внешним образом структурные уравнения (2), найдем

$$\nabla R_{JKL}^I \wedge \omega^K \wedge \omega^L = 0.$$

Подставляя дифференциальные уравнения (3₃), получим $R_{JKLM}^I \omega^K \wedge \omega^L \wedge \omega^M = 0$, откуда следуют тождества Бьянки: $R_{J\{KLM\}}^I = 0$.

Структурные уравнения (2) представим в виде

$$d\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \omega^K \wedge \omega_{JK}^I, \quad \omega_{JK}^I = R_{JKL}^I \omega^L.$$

Утверждение 1. *Пространство аффинной связности без кручения $A_{n,n}^0$ имеет n -мерную базу M_n со структурными уравнениями (1), которая является полуголономным [2] гладким многообразием M_n^S , т.к. $\omega_{[JK]}^I = R_{[JK]L}^I \omega^L \neq 0$. Если обратится в нуль тензор полуголономности: $R_{[JK]L}^I = 0$, то полуголономное многообразие M_n^S будет голономным [3] гладким многообразием M_n^H . Если аннулируется тензор кривизны: $R_{JKL}^I = 0$, то голономное многообразие M_n^H превратится в аффинное пространство A_n (или его часть), которое является тривиальным [2] гладким многообразием.*

2. Деривационные формулы Акивиса

Структурные уравнения Картана (1, 2) согласуются с деривационными формулами [4]:

$$dA = \omega^I e_I, \quad de_I = \omega_I^J e_J + \omega^J e_{IJ}, \quad (4)$$

где точка $A \in M_n$, а на векторы e_I натянуто касательное пространство T_n к многообразию M_n в точке A . При дифференцировании формул (4₁) с помощью структурных уравнений (1) имеем

$$(de_I - \omega_I^J e_J) \wedge \omega^I = \bar{0},$$

откуда по векторной лемме Картана получается формула (4₂), причем выполняется условие симметрии: $e_{[IJ]} = \bar{0}$. Число симметричных векторов

2-го порядка e_{IJ} равно $\frac{1}{2}n(n+1)$. На векторы 1-го порядка e_I и 2-го

порядка e_{II} , совместное число которых равно $\frac{1}{2}n(n+3)$, натянуто соприкасающееся пространство $T_{\frac{1}{2}n(n+3)} = [e_I, e_{II}] \supset [e_I] = T_n$.

Замечание. При $n=1$ соприкасающееся пространство $T_{\frac{1}{2}n(n+3)}$ соответствует соприкасающейся плоскости кривой. Векторы второго порядка, называемые также диффузорами (см., напр., [5]), используются в стохастической дифференциальной геометрии Шварца. Они интерпретируются с помощью дифференциальных операторов 2-го порядка.

Дадим интерпретацию касательным векторам 2-го порядка e_{II} , используя последовательность касательных расслоений. Касательное расслоение $T_n(M_n)$ к n -мерному гладкому многообразию M_n является $2n$ -мерным многообразием M_{2n} . Касательное расслоение $T_{2n}(M_{2n})$ к многообразию M_{2n} есть $4n$ -мерное многообразие M_{4n} . Это многообразие можно рассматривать как расслоение над исходной базой M_n :

$$M_{4n} = T_{2n}(M_{2n}) = T_{2n}(T_n(M_n)) = T_{3n}(M_n) = T_{(2^2-1)n}(M_n).$$

На k -ом шаге имеем касательное расслоение порядка k :

$$T_{(2^k-1)n}(M_n), T_n \subset T_{3n} \subset \dots \subset T_{(2^{k-1})n}.$$

Найдутся такие числа k , что

$$T_{\frac{1}{2}n(n+3)} \subset T_{(2^k-1)n}, \frac{1}{2}n(n+3) \leq (2^k-1)n, 2^k \geq \frac{1}{2}(n+3) + 1.$$

Утверждение 2. Соприкасающееся расслоение $T_{\frac{1}{2}n(n+3)}(M_n)$ можно вложить в касательное расслоение k -го порядка $T_{(2^k-1)n}(M_n)$ при $k \geq \log_2 \left[\frac{1}{2}(n+3) + 1 \right]$.

3. Распределение

В каждом касательном пространстве T_n выделим m -мерное подпространство T_m , тогда имеем n -мерное семейство D_n подпространств T_m , которое называется неголономным многообразием, неголономной поверхностью или, короче, распределением. Расположим векторы e_i

подвижного репера $\{A, e_i, e_\alpha\}$ в подпространстве T_m . Из деривационных формул (4₂) следует

$$de_i = \omega_i^j e_j + \omega_i^\alpha e_\alpha + \omega^j e_{i,j} \quad (i, \dots = \overline{1, m}; \alpha, \dots = \overline{m+1, n}). \quad (5)$$

Формулы (4₁, 5) дают уравнения стационарности подпространства T_m : $\omega^l = 0$, $\omega_i^\alpha = 0$, поэтому пфаффовы уравнения семейства D_n имеют вид

$$\omega_i^\alpha = A_{ij}^\alpha \omega^j. \quad (6)$$

Замкнем их с помощью структурных уравнений (1, 2):

$$(\nabla A_{i,j}^\alpha + R_{i,jk}^\alpha \omega^k) \wedge \omega^j = 0, \quad (7)$$

где ковариантный дифференциал действует по формуле

$$\nabla A_{i,j}^\alpha = dA_{i,j}^\alpha + A_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha - A_{j,i}^\alpha \omega_i^j - A_{i,j}^\alpha \omega_j^k.$$

Разрешим квадратичные уравнения (7) по лемме Картана

$$\nabla A_{i,j}^\alpha + R_{i,jk}^\alpha \omega^k = A_{i,jk}^\alpha \omega^k, \quad A_{i[jk]}^\alpha = 0. \quad (8)$$

В подробной записи

$$\nabla A_{ij}^\alpha = \tilde{A}_{ijk}^\alpha \omega^k, \quad \tilde{A}_{ijk}^\alpha = A_{ijk}^\alpha + A_{i\beta}^\alpha A_{jk}^\beta - R_{ijk}^\alpha; \quad (9)$$

$$\nabla A_{ij}^\alpha - A_{ij}^\alpha \omega_j^i = \tilde{A}_{i\beta k}^\alpha \omega^k, \quad \tilde{A}_{i\beta k}^\alpha = A_{i\beta k}^\alpha - R_{i\beta k}^\alpha; \quad (10)$$

Утверждение 3. *Фундаментальный объект $\{A_{ij}^\alpha, A_{i\beta}^\alpha\}$ распределения D_n является тензором, содержащим подтензор A_{ij}^α .*

Пространство аффинной связности без кручения $A_{n,n}^0$, на базе M_n которого задано распределение D_n касательных подпространств T_m обозначим ${}_m A_{n,n}^0$.

4. Тензор неголономности распределения

Альтернирование фундаментального подтензора A_{ij}^α дает тензор неголономности $N_{ij}^\alpha = A_{[ij]}^\alpha$ распределения D_n , который появляется в структурных уравнениях для части ω^α базисных форм ω^l :

$$d\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \Omega_\beta^\alpha + N_{ij}^\alpha \omega^i \wedge \omega^j, \quad \Omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha - A_{i\beta}^\alpha \omega^i. \quad (11)$$

Альтернируем дифференциальные уравнения (9₁):

$$\Delta N_{ij}^\alpha = \tilde{A}_{[ij]k}^\alpha \omega^k. \quad (12)$$

Если $N_{ij}^\alpha = 0$, то распределение D_n называется голономным распределением D_n^H . В этом случае пространство ${}_m A_{n,n}^0$ обозначим через ${}_m A_{n,n}^0$, а из дифференциальных уравнений (12) с учетом обозначения (9₂) получим

$$A_{[ij]k}^\alpha + A_{i\beta}^\alpha A_{j\beta}^\alpha - R_{[ij]k}^\alpha = 0. \quad (13)$$

Здесь и в дальнейшем альтернирование производится по крайним индексам в скобках.

Для голономного распределения D_n^H структурные уравнения (11₁) упрощаются

$$d\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \Omega_\beta^\alpha. \quad (14)$$

Это структурные уравнения $(n-m)$ -мерного гладкого многообразия, которое интерпретируется так (см. [6]). Вполне интегрируемая система уравнений $\omega^\alpha = 0$ позволяет записать структурные уравнения остальных базисных форм в виде

$$d\bar{\omega}^i = \bar{\omega}^j \wedge \bar{\omega}_j^i \quad (\bar{\omega} = \omega|_{\omega^\alpha=0})$$

Получили структурные уравнения m -мерного гладкого подмногообразия $V_m \subset M_n$, огибающего m -мерное подсемейство семейства D_n^H , причем подпространства $T_m \subset T_n$ служат касательными пространствами многообразия V_m . Следовательно, многообразие F_{n-m} есть фактор-многообразие базы V_n , состоящее из подмногообразий V_m . Касательными пространствами фактор-многообразия F_{n-m} являются линейные фактор-пространства $\tau_{n-m} = T_n / T_m$.

5. Объект полуголономности фактор-многообразия

С помощью структурных уравнений (1, 2) возьмем внешние дифференциалы от форм Ω_β^α

$$d\Omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha + \omega^\gamma \wedge (R_{\beta\gamma\delta}^\alpha \omega^\delta + 2R_{\beta\gamma i}^\alpha \omega^i - 2A_{i(\beta}^\alpha \omega_{\gamma)}^i) + \omega^i \wedge (dA_{i\beta}^\alpha - A_{j\beta}^\alpha \omega_i^j - A_{j i}^\alpha \omega_\beta^j) + R_{\beta j}^\alpha \omega^i \wedge \omega^j. \quad (15)$$

Преобразуем 1-е слагаемое, используя обозначение (11₂):

$$\omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha = \Omega_\beta^\gamma \wedge \Omega_\gamma^\alpha + A_{i\beta}^\gamma \omega^i \wedge \omega_\gamma^\alpha + \omega_\beta^\gamma \wedge A_{i\gamma}^\alpha \omega^i - A_{i\beta}^\gamma \omega^i \wedge A_{j\gamma}^\alpha \omega^j.$$

Подставим эти выражения в структурные уравнения (15):

$$d\Omega_\beta^\alpha = \Omega_\beta^\gamma \wedge \Omega_\gamma^\alpha + \omega^\gamma \wedge (R_{\beta\gamma\delta}^\alpha \omega^\delta + 2R_{\beta\gamma i}^\alpha \omega^i - 2A_{i(\beta}^\alpha \omega_{\gamma)}^i) + \\ + \omega^i \wedge (\nabla A_{i\beta}^\alpha - A_{j i}^\alpha \omega_\beta^j) + (R_{\beta i j}^\alpha - A_{i\beta}^\gamma A_{j\gamma}^\alpha) \omega^i \wedge \omega^j.$$

Воспользуемся дифференциальными уравнениями (10₁) и обозначениями (10₂):

$$d\Omega_\beta^\alpha = \Omega_\beta^\gamma \wedge \Omega_\gamma^\alpha + \omega^\gamma \wedge \Omega_{\beta\gamma}^\alpha + N_{\beta i j}^\alpha \omega^i \wedge \omega^j, \quad (16)$$

$$\Omega_{\beta\gamma}^\alpha = R_{\beta\gamma\delta}^\alpha \omega^\delta + (2R_{\beta\gamma i}^\alpha + R_{i\beta\gamma}^\alpha - A_{i\beta\gamma}^\alpha) \omega^i - 2A_{i(\beta}^\alpha \omega_{\gamma)}^i, \quad (17)$$

$$N_{\beta i j}^\alpha = R_{\beta i j}^\alpha - A_{i\beta}^\gamma A_{j\gamma}^\alpha + A_{i\beta j}^\alpha - R_{i\beta j}^\alpha. \quad (18)$$

Преобразуем третье слагаемое в формуле (18), используя условие симметрии (8₂) и тождества (13):

$$A_{i\beta j}^\alpha = A_{i j \beta}^\alpha = R_{[i j] \beta}^\alpha - A_{i\gamma}^\alpha A_{j\beta}^\gamma.$$

Подставим это выражение в формулу (18), воспользуемся условием симметрии (3₁) и тождеством Риччи (3₂):

$$N_{\beta i j}^\alpha = R_{\beta i j}^\alpha + 2R_{[i j] \beta}^\alpha = 0.$$

Значит, структурные уравнения (16) для продолжений Ω_β^α базисных форм ω^α фактор-многообразия F_{n-m} имеют вид

$$d\Omega_\beta^\alpha = \Omega_\beta^\gamma \wedge \Omega_\gamma^\alpha + \omega^\gamma \wedge \Omega_{\beta\gamma}^\alpha.$$

Проальтернируем формы (17) с учетом условия симметрии (8₂) и тождеств Риччи (3₂):

$$\Omega_{[\beta\gamma]}^\alpha = R_{[\beta\gamma]\delta}^\alpha \omega^\delta + (2R_{[\beta\gamma]i}^\alpha + R_{i\beta\gamma}^\alpha) \omega^i = R_{[\beta\gamma]\delta}^\alpha \omega^\delta.$$

Совокупность коэффициентов $R_{[\beta\gamma]\delta}^\alpha$ назовем объектом полуголономности фактор-многообразия F_{n-m} .

Теорема 1. *Фактор-многообразия F_{n-m} голономного распределения D_n^H подпространств $T_m \subset T_n$, касающихся базы M_n пространства аффинной связности без кручения $A_{n,n}^0$, полуголомно, короче, многообразия F_{n-m} в пространстве ${}^H_m A_{n,n}^0$ является полуголономным гладким многообразием F_{n-m}^S .*

6. Условия голономности фактор-многообразия

Дифференциальные уравнения (3₃) компонент тензора кривизны R_{JKL}^I , условия антисимметрии (3₁), тождества Риччи (3₂) и пфаффовы уравнения

(6) распределения D_n дают дифференциальные сравнения тех подобъектов тензора R_{JKL}^I , которые определяют объект полуголономности $R_{[\beta\gamma]\delta}^\alpha$ и сравнения для его компонент:

$$\begin{aligned} \nabla R_{\beta\gamma\delta}^\alpha - R_{i\gamma\delta}^\alpha \omega_\beta^i - R_{\beta i\delta}^\alpha \omega_\gamma^i - R_{\beta\gamma i}^\alpha \omega_\delta^i &\cong 0 \pmod{\omega^I}, \\ \nabla R_{i\beta\gamma}^\alpha - R_{ij\gamma}^\alpha \omega_\beta^j - R_{i\beta j}^\alpha \omega_\gamma^j &\cong 0, \\ \nabla R_{\beta\gamma i}^\alpha - R_{j\gamma i}^\alpha \omega_\beta^j - R_{\beta j i}^\alpha \omega_\gamma^j &\cong 0, \\ \nabla R_{i\beta\gamma}^\alpha - R_{ijk}^\alpha \omega_\beta^k &\cong 0, \\ \nabla R_{\beta ij}^\alpha - R_{kij}^\alpha \omega_\beta^k &\cong 0, \quad \nabla R_{ijk}^\alpha \cong 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Утверждение 4. Тензор кривизны R_{JKL}^I пространства ${}_m A_{n,n}^0$ имеет 6 подтензоров:

$$\begin{aligned} R_1 &= \{R_{ijk}^\alpha\}, \quad R_2 = \{R_{ij\beta}^\alpha, R_1\}, \quad R_3 = \{R_{\beta ij}^\alpha, R_1\}, \quad R_4 = \{R_{i\beta\gamma}^\alpha, R_2\}, \\ R_5 &= \{R_{\beta\gamma i}^\alpha, R_2, R_3\}, \quad R_6 = \{R_{\beta\gamma\delta}^\alpha, R_4, R_5\}. \end{aligned}$$

Проальтернируем дифференциальные сравнения (19₁) по индексам β и γ , перегруппируем слагаемые и используем условия (3₁₋₂):

$$\nabla R_{[\beta\gamma]\delta}^\alpha + \frac{1}{2}(R_{i\beta\gamma}^\alpha \omega_\delta^i + R_{\delta\alpha\gamma}^\alpha \omega_\beta^i + R_{\delta\beta i}^\alpha \omega_\gamma^i) \cong 0.$$

Пространство ${}_m A_{n,n}^0$ назовем специальным и обозначим ${}_m \bar{A}_{n,n}^0$, если составной тензор $R_4 \cup R_5$ обратится в нуль. В этом пространстве объект $R_{[\beta\gamma]\delta}^\alpha$ будет тензором, в частности, в пространстве ${}_m \bar{A}_{n,n}^0$ он называется тензором полуголономности.

Теорема 2. Пусть дано пространство ${}_m \bar{A}_{n,n}^0$, т.е. пространство ${}_m A_{n,n}^0$, в котором равен нулю составной тензор $R_4 \cup R_5 = \{R_{ijk}^\alpha, R_{\beta ij}^\alpha, R_{ij\beta}^\alpha, R_{\beta\gamma i}^\alpha, R_{i\beta\gamma}^\alpha\} = 0$, тогда при аннулировании тензора полуголономности $R_{[\beta\gamma]\delta}^\alpha = 0$ полуголономное фактор-многообразие F_{n-m}^S превращается в голономное гладкое многообразие F_{n-m}^H .

Литература

1. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Пробл. геом. ВИНТИ. – 1979. – Т.9. – С. 5-247.

2. Шевченко Ю.И. Голономные и полуголономные подмногообразия гладких многообразий // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград. – 2015. – Вып. 46. – С. 168-177.

3. Шевченко Ю.И. Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. Калининград, 1998. – 83 с.

4. Акивис М.А. Многомерная дифференциальная геометрия. – Калининград, 1977. – 84 с.

5. Emery M. An invitation to second-order stochastic differential geometry. – 2007 – 42 p. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00145073>

6. Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М., Распределения m -мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I // Тр. геом. семин., 1971. – Т. 3. – С. 49-94.

Шевченко Юрий Иванович, кандидат физико-математических наук, доцент института физико-математических наук и информационных технологий, Балтийский федеральный университет им. И. Канта, 236016, г. Калининград, ул. А.Невского, 14, e-mail: ESkrydlova@kantiana.ru

Скрьдлова Елена Викторовна, кандидат физико-математических наук, доцент института физико-математических наук и информационных технологий, Балтийский федеральный университет им. И. Канта, 236016, г. Калининград, ул. А.Невского, 14, e-mail: ESkrydlova@kantiana.ru

Shevchenko Yuri Ivanovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, I. Kant Baltic Federal University

Skrydlova Elena Viktorovna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, I. Kant Baltic Federal University

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ

УДК 514.142:004.942

© *И. И. Баглаев*

МОДЕЛИРОВАНИЕ АФФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПЛОСКОСТИ В СРЕДЕ SMALL BASIC

Аннотация. В евклидовой геометрии наряду с основным инвариантом – расстоянием между двумя точками, можно рассматривать и аффинные инварианты – простое отношение трех точек, параллельность. Также в евклидовой геометрии, кроме движений плоскости, используются аффинные преобразования (в школьной геометрии – подобия, гомотетии, при изображении пространственных фигур на евклидовой плоскости – преобразования родства).

В данной статье рассматривается задача моделирования аффинных преобразований евклидовой плоскости в среде программирования Small Basic.

Решение данной задачи сводится к представлению произвольного аффинного преобразования в виде композиции четырех преобразований: сжатия к осям координат, сдвига вдоль оси абсцисс, поворота вокруг начала координат и параллельного переноса. В качестве иллюстрации рассматривается пошаговое преобразование данного квадрата в произвольный параллелограмм посредством указанной выше композиции в графическом окне Small Basic.

Ключевые слова: аффинное преобразование, сжатие, сдвиг, поворот, параллельный перенос, Small Basic.

© *I. I. Baglaev*

MODELING OF AFFINE PLANE TRANSFORMATIONS IN SMALL BASIC ENVIRONMENT

Abstract. In Euclidean geometry along with the basic invariant – a distance between two points, we can also consider affine invariants – a simple relation of three points, parallelism. Also affine transformations are used (in school geometry – similarities, homotheties, in depiction of spatial figures on the Euclidean plane – transformation of affinity) along with plane motions.

In the article we consider the problem of modeling affine transformations of the Euclidean plane in Small Basic programming environment.

The solution of this problem is reduced to representation of the arbitrary affine transformation as a composition of four transformations: compression to the coordinate axes, shift along the abscissa axis, rotation around the origin and parallel transfer. We

present a step-by-step transformation of the given square into an arbitrary parallelogram by means of the above composition in Small Basic graphics window as an illustration.

Keywords: affine transformation; compression; shift; rotation; parallel transport; Small Basic.

В общем случае аффинное преобразование f евклидовой плоскости задается формулами вида:

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{01} \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{02} \end{cases} \quad (1)$$

Вектор $\begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{02} \end{pmatrix}$ задает параллельный перенос, а матрица $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ задает

центраффинное преобразование с центром в начале координат.

Если при аффинном преобразовании f сохраняется ориентация плоскости, то оно называется преобразованием первого рода. Если же ориентация плоскости меняется на противоположную, то f называется аффинным преобразованием второго рода.

Известно, что существует единственное преобразование, переводящее один треугольник в другой. Как следствие можно сформулировать утверждение, что существует единственное аффинное преобразование f евклидовой плоскости переводящее квадрат $OABC$ в произвольный параллелограмм $O'A'B'C'$ (рис. 1).

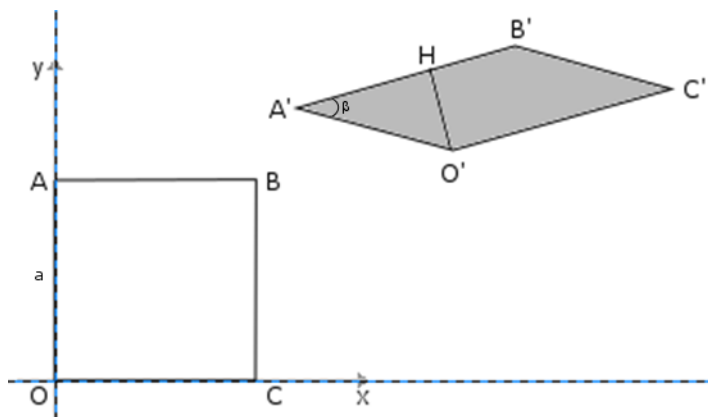


Рисунок 1. – Преобразование квадрата в параллелограмм

В параллелограмме $O'A'B'C'$ отрезок $O'H$ – высота, угол β - острый угол параллелограмма.

Менее известно предложение утверждающее, что любое аффинное преобразование f евклидовой плоскости можно представить как композицию четырех аффинных преобразований в виде

$$f = t_{OO'} \circ r_O^\theta \circ p_k \circ c_{k_2}^{k_1}, \quad (2)$$

где $c_{k_2}^{k_1}$, представляет собой сжатие к осям координат, p_k является сдвигом вдоль оси Ox , r_O^θ - поворот вокруг точки O и $t_{OO'}$ - параллельный перенос на вектор $\overline{OO'}$, с учетом того, что движения также являются аффинными преобразованиями.

Если квадрат $OABC$ и параллелограмм $O'A'B'C'$ одинаково ориентированы, то f будет преобразованием первого рода, если противоположно ориентированы – второго рода.

Уточним смысл каждого из этих преобразований.

Сжатие $c_{k_1}^{k_2}$ переводит квадрат $OABC$ стороной a в прямоугольник со сторонами $m = |O'C'|$ и $n = |O'H|$ (рис. 2), причем $k_1 = \frac{m}{a}$, $k_2 = \frac{n}{a}$ и задается формулами

$$\begin{cases} x' = k_1 x, \\ y' = k_2 y. \end{cases} \quad (3)$$

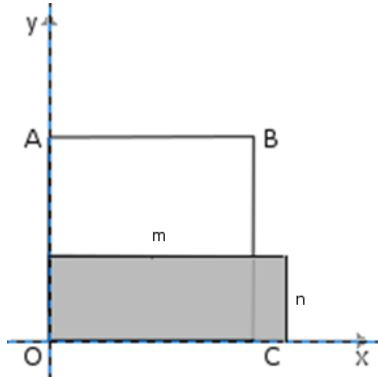


Рисунок 2. – Сжатие квадрата

Коэффициент $k_1 > 0$, если f преобразование первого рода и $k_1 < 0$ если f – второго рода.

Сдвиг p_k вдоль оси Ox преобразует прямоугольник в параллелограмм со сторонами m , $\frac{n}{\cos \alpha}$ (рис. 3), коэффициент $k = \operatorname{tg} \alpha$ и $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$, где β - острый угол параллелограмма. Сдвиг задается формулами

$$\begin{cases} x' = x + \operatorname{tg} \alpha \cdot y, \\ y' = y. \end{cases} \quad (4)$$

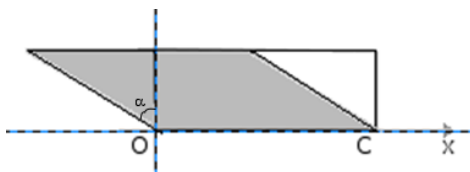


Рисунок 3. – Сдвиг прямоугольника

Поворот r_O^φ вращает параллелограмм, полученный сдвигом, вокруг точки O на угол φ равный углу между $O'C'$ и осью Ox (рис. 1). Его формулы имеют вид

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos \varphi - y \cdot \sin \varphi, \\ y' = x \cdot \sin \varphi + y \cdot \cos \varphi. \end{cases} \quad (5)$$

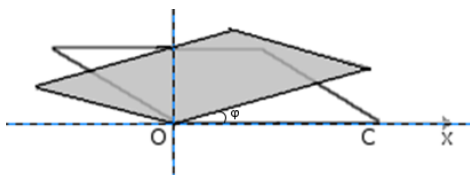


Рисунок 4. – Поворот

Параллельный перенос $t_{\overline{OO'}}$ перемещает повернутый параллелограмм на вектор с $\overline{OO'}$ координатами p_1, p_2 . Формулы переноса имеют вид

$$\begin{cases} x' = x + p_1, \\ y' = y + p_2. \end{cases} \quad (6)$$

Среда разработки Microsoft©Small Basic, не смотря на простоту, предоставляет мощные и современные сервисы, позволяющие решать содержательные задачи компьютерного моделирования. В листинге 1. приведен код программы реализации аффинного преобразования f квадрата в параллелограмм, заданного условием (2) с использованием формул (3) – (6).

```
Sub sqr 'Преобразование квадрата в параллелограмм
GraphicsWindow.Height=800
GraphicsWindow.Width=800
A[1][1] = 400
```

```

A[1][2] = 400
A[2][1] = 400
A[2][2] = 300
A[3][1] = 500
A[3][2] = 300
Sub par 'Построение параллелограмма по 3 вершинам
v[1][1] = A[3][1] - A[2][1]
v[1][2] = A[3][2] - A[2][2]
A[4][1] = A[1][1] + v[1][1]
A[4][2] = A[1][2] + v[1][2]
For i = 1 To 3
GraphicsWindow.DrawLine(A[i][1], A[i][2], A[i+1][1], A[i+1][2])
EndFor
GraphicsWindow.DrawLine(A[4][1], A[4][2], A[1][1], A[1][2])
EndSub
par()
Program.Delay(1000)
k1=1.16
k2=0.41
x0 = 400
y0 = 400
Sub comp 'Сжатие
For i=1 To 3
x= A[i][1]
y= A[i][2]
x1 = (x-x0)*k1+x0
y1 = (y-y0)*k2+y0
A[i][1]=x1
A[i][2]=y1
"TextWindow.WriteLine(x1)
EndFor
EndSub
comp()
Program.Delay(1000)
par()
Program.Delay(1000)
k=71/41
Sub slp 'Сдвиг
For i=1 To 3
x= A[i][1]
y= A[i][2]
x1 = (x-x0)+(y-y0)*k+x0
y1 = y
A[i][1]=x1

```



```

A[i][2]=y1
  EndFor
EndSub
slp()
Program.Delay(1000)
par()
Program.Delay(1000)
phi = -0.27
Sub rot 'Поворот'
  For i=1 To 3
    x= A[i][1]
    y= A[i][2]
x1 = (x-x0)*Math.Cos(phi)- (y-y0)*Math.Sin(phi)+x0
y1 = (x-x0)*Math.Sin(phi)+ (y-y0)*Math.Cos(phi)+x0
A[i][1]=x1
A[i][2]=y1
  EndFor
EndSub
rot()
par()
xt = 210
yt = -100
Sub tran 'Перенос'
  For i=1 To 3
    x= A[i][1]
    y= A[i][2]
x1 = x+xt
y1 = y+yt
A[i][1]=x1
A[i][2]=y1
  EndFor
EndSub
tran()
Program.Delay(1000)
par()

```

Листинг 1. Преобразование квадрата в параллелограмм

Литература

1. Базылев В.Т., Дуничев К.И., Иваницкая В.П. Геометрия, I. – Москва : Просвещение, 1974. – 351 с.
2. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы и приложения. – Москва : Наука, 1978. – 760 с.
3. Ефимов Н. В. Высшая геометрия – Москва : Наука, 1974. – 576 с.
4. Культин Н. В., Цой Л. В. Small Basic для начинающих. – СПб.: БХВ-

Петербург, 2011. – 160 с.

Баглаев Игорь Ильич, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры алгебры, геометрии и методики преподавания математики Бурятского государственного университета, 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5, e-mail: bii@bsu.ru.

Baglaev Igor Il'ich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Buryat State University

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ ПОЛНОТЫ МНОЖЕСТВА МУЛЬТИФУНКЦИЙ РАНГА 2¹

Аннотация. Данная статья посвящена проблеме полноты в одном классе мультифункций. В последнее время, под термином мультифункция понимают отображение из декартовой степени конечного множества A во множество подмножества A , при этом одноэлементные подмножества отождествляются с элементами множества A , а остальные подмножества принимают за неопределенности. Очевидно, что на наборах с неопределенностями обычная суперпозиция функций k -значной логики для мультифункций не подходит, поэтому для них требуется несколько расширить стандартное понятие суперпозиции. Обычно рассматривается два способа расширения понятия суперпозиции: в основе первого лежит объединение подмножеств A , в основе второго – пересечение. Множества мультифункций, содержащие все функции проекции и замкнутые относительно суперпозиции первого вида называют мультиклонами, а относительно второго – частичными ультраклонами. В данной статье рассматривается второй вид суперпозиций. Сформулировано необходимое и достаточное условие полноты произвольного множества мультифункций на $\{0,1\}$, содержащего все одноместные булевы функции, относительно данной суперпозиции.

Ключевые слова: булева функция, мультифункция, суперпозиция, полное множество.

© S. A. Badmaev, I. K. Sharankhaev

ON SOME COMPLETENESS CRITERION FOR SET OF MULTIFUNCTIONS OF RANK 2

Abstract. This article is devoted to the completeness problem in one class of multifunctions. Recently, the term multifunction means the mapping from the Cartesian power of a finite set A to the set of a subset A , while one-element subsets are identified with the elements of the set A , and the remaining subsets are taken as uncertainties. It is obvious that on sets with uncertainties the usual superposition of functions of k -valued logic for multifunctions is not suitable, therefore for them it is required to expand the

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ проект №18-31-00020

standard concept of superposition somewhat. Usually two ways of expanding the concept of superposition are considered: the basis of the first is the union of subsets of A , the basis of the second is the intersection. The sets of multifunctions containing all the projection functions and closed with respect to the superposition of the first kind are called multiclones, and with respect to the second one they are called partial ultraclones. In this paper we consider the second kind of superposition. A necessary and sufficient condition for the completeness of an arbitrary set of multifunctions on $\{0,1\}$ containing all one-place Boolean functions with respect to a given superposition is formulated.

Keywords: boolean function, multifunction, superposition, completeness set.

Введение

В теории дискретных функций активно развивается направление с исследованиями мультифункций – отображений из декартовой степени конечного множества A во множество подмножества A , причем одноэлементные подмножества отождествляются с элементами множества A , а остальные подмножества понимаются как неопределенности. Очевидно, что в случае с двухэлементным множеством A возможны два вида неопределенности. Для первого вида неопределенности на тех наборах, на которых значение функции является неопределенным, неопределенность понимается как возможность принятия и значения 0, и значения 1, т. е. образом для таких наборов будет множество $\{0,1\}$. Двухзначные функции с этим видом неопределенности рассматривались, например, в работе [1]. Второй вид неопределенности связан с пустым множеством, обычно означает запретность данных, и исследовался, например, в [2]. В данной статье рассматриваются двухзначные функции с двумя видами неопределенности, которые, следуя общей теории, называются мультифункциями ранга 2. Исследуется проблема нахождения эффективных критериев полноты множеств мультифункций. Приведено необходимое и достаточное условие полноты произвольного множества мультифункций ранга 2, содержащего все одноместные булевы функции, относительно суперпозиции, которая изучалась, например, в работах [3, 4].

1. Основные понятия

Пусть F - множество всех подмножеств $E_2 = \{0,1\}$, в том числе \emptyset . Отображение $f : E^n \rightarrow E$ называется булевой функцией, а отображение $f : E^n \rightarrow F$ - мультифункцией ранга 2.

В данной статье будет использоваться следующая кодировка: $\emptyset \leftrightarrow *, \{0\} \leftrightarrow 0, \{1\} \leftrightarrow 1, \{0,1\} \leftrightarrow -$. Тогда $F = \{*, 0, 1, -\}$.

Суперпозиция мультифункций $f(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$ задает некоторую мультифункцию $g(x_1, \dots, x_n)$, если для любого набора $(a_1, \dots, a_n) \in E_2^n$, значение мультифункции $g(x_1, \dots, x_n)$ вычисляется по правилу:

$$g(a_1, \dots, a_n) = \begin{cases} \bigcap_{b_i \in f_i(a_1, \dots, a_n)} f(b_1, \dots, b_m); \\ \bigcup_{b_i \in f_i(a_1, \dots, a_n)} f(b_1, \dots, b_m), \end{cases}$$

выбираем пересечение если оно не пусто, в противном случае выбираем объединение. Если хотя одно из значений b_1, \dots, b_n совпадает с $*$, то значение мультифункции равно $*$.

Это определение является корректным и позволяет вычислить значение мультифункции на любом наборе $(a_1, \dots, a_n) \in F^n$.

Пусть m -местный предикат R^m задан матрицей M размерности $m \times k$, состоящей из элементов $a_{i,j} \in F$. Если для любых n наборов $(a_{11}, \dots, a_{m1}), \dots, (a_{1n}, \dots, a_{mn})$ принадлежащих предикату набор $(f(a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, f(a_{s1}, \dots, a_{sn}))$ также принадлежит R^m , то будем говорить, что функция $f(x_1, \dots, x_n)$ сохраняет предикат R^m .

Через $Pol(R)$ обозначим множество функций, сохраняющих предикат R .

2. Основной результат

Введем в рассмотрение предикат

$$R^4 = \begin{pmatrix} 00001111 - \alpha \\ 00111100 - \beta \\ 01011010 - \gamma \\ 01101001 - \delta \end{pmatrix},$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{0, 1, -, *\}$ такие, что среди них как минимум два принимают значение $*$ и, если хотя бы одно равно 0 или 1, то оставшиеся равны либо 0, либо 1, либо $*$.

Справедлива следующая основная

Теорема. *Для того, чтобы множество мультифункций B , содержащее все унарные булевы функции, было полным, необходимо и достаточно, чтобы в B содержались следующие мультифункции:*

- 1) f_1 , не принадлежащая классу $Pol(R^4)$;
- 2) f_2 , принимающая значение – хотя бы на одном наборе;
- 3) f_3 , принимающая значение *, но не на всех наборах.

Заключение

Одной из основных задач в теории дискретных функций является проблема выразимости: заданную функцию или класс функций требуется выразить, используя суперпозицию функций некоторого имеющегося множества. В данной работе приведено необходимое и достаточное условие полноты произвольного множества мультифункций ранга 2, содержащего все одноместные булевы функции.

Литература

1. Тарасов В. В. Критерий полноты для не всюду определенных функций алгебры логики // Проблемы кибернетики. – 1975. – Вып. 30. – С. 319–325.
2. Фрейвалд Р. В. Критерий полноты для частичных функций алгебры логики и многозначной логики // Доклады АН СССР. – 1966. – Т.167. – № 6. – С. 1249–1250.
3. Бадмаев С. А., Шаранхаев И. К. Минимальные частичные ультраклоны на двухэлементном множестве // Известия Иркутского гос. университета. Серия Математика. – 2014. – № 9. – С. 3–9.
4. Пантелеев В. И. О двух максимальных мультиклонах и частичных ультраклонах // Известия Иркутского гос. университета. Серия Математика. – 2012. – № 4. – С. 46–53.

Бадмаев Сергей Александрович, аспирант Бурятского государственного университета, 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5, тел.: +7(3012)219757, e-mail: badmaevsa@mail.ru

Шаранхаев Иван Константинович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры, геометрии и методики преподавания математики Бурятского государственного университета, 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5, тел.: +7(3012)219757, e-mail: goran5@mail.ru

Badmaev Sergey Alexandrovich, post-graduate student, Buryat State University

Sharankhaev Ivan Konstantinovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Buryat State University

ПОЛИГОНАЛЬНАЯ ГРАФИКА КАК ИНСТРУМЕНТ ТРЕХМЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Аннотация. Изложены принципы полигональной графики, конкретизированы понятия полигонов и полигональных сеток. Сформулированы топологические требования к полигональным сеткам. Раскрыты возможности полигональной графики в 3D-моделировании оригинальных конструкций и композиций. Показаны возможности полигональной графики в ситуациях, требующих соблюдения смысловых акцентов. Изложена простая и эффективная методика построения трехмерной полигональной модели с последующей визуализацией. Особенностью предлагаемой методики являются имитация лепки объекта из пластичного материала. Приведен конкретный пример трехмерного полигонального моделирования сувенирного изделия. Предложено у готовой модели снижать количество полигонов с помощью определенного алгоритма редукции. Интерактивная визуализация трехмерной модели осуществляется общедоступными программами, обеспечивающими фотографическое качество итогового изображения. Графическую доработку рендеров предлагается осуществлять в традиционных растровых редакторах. Сделан вывод о целесообразности использования полигональной графики в прикладной геометрии, в цифровом дизайне, в трехмерном моделировании компьютерных игр.

Ключевые слова: моделирование, графика, полигоны, полигональные сетки, трехмерная геометрия, 3D- программа, визуализация.

© *E. G. Berdichevsky*

POLYGONAL GRAPHICS AS INSTRUMENT OF THREE-DIMENSIONAL MODELLING

Abstract. The principles of polygonal graphics are stated, the concepts of polygons and polygonal meshes are concretized. Topological requirements to polygonal meshes are formulated. Possibilities of polygonal graphics in 3D - modeling of original designs and compositions are opened. The possibilities of polygonal graphics in a situation that require observing semantic accents are shown. A simple and effective technique for constructing a three-dimensional polygonal model with subsequent visualization is outlined. A feature of the proposed technique is the simulation of modeling an object from a plastic material. A concrete example of a three-dimensional polygonal modeling of a souvenir item is given. A concrete example of a three-dimensional polygonal modeling of a souvenir item is given. It was suggested to reduce the number of polygons in the finished model with the help of a certain reduction algorithm. Interactive visualization of

the three-dimensional model is carried out by publicly available programs that ensure the photographic quality of the resulting image. Graphic revision of the renderers is proposed to be implemented in traditional raster editors. The conclusion is made about the expediency of using polygonal graphics in applied geometry, in digital design, in three-dimensional modeling of computer games.

Keywords: modeling, graphics, polygons, polygonal meshes, three-dimensional geometry, three-dimensional program, visualization.

Под полигональной графикой понимаются графические модели, состоящие из такого количества полигонов, которое достаточно для однозначного визуального восприятия трехмерных объектов. К полигонам относят замкнутую ломаную линию, т.е. многоугольник. В 3D - графике полигон – это минимальная поверхность, из которой складываются каркасы форм любой сложности. С увеличением числа полигонов повышается детализация модели. В современной компьютерной графике в качестве полигонов чаще всего применяют треугольники.

Важнейшим понятием полигональной графики является полигональная сетка, представляющая собой визуально воспринимаемую поверхность геометрических объектов, состоящую из состыкованных друг с другом плоских полигонов. Описание полигональной модели трехмерного объекта является иерархическим и включает списки вершин, ребер, граней. Сетки могут состоять как из выпуклых, так и из вогнутых многоугольников или из многоугольников с дырками. Множество операций, проводимых над сетками, могут включать булеву алгебру, сглаживание, упрощение и т.д. Полигоны сетки представляют лишь поверхность моделируемого объекта, но не представляют его объем.

Математический эквивалент полигональных сеток – неструктурированные сетки или неориентированный граф – изучают методами комбинаторной геометрии [1].

К полигональным сеткам предъявляют определенные топологические требования. В частности, сетка должна быть равномерной и оптимальной по числу полигонов. Полигоны не должны загибаться и пересекаться. Гранями полигонов должны быть плавные линии.

Предтечей полигональной графики можно считать кубизм, характеризующийся подчеркнутым использованием геометрических форм и раздроблением реальных объектов на стереометрические примитивы. Полигональная графика широко использовалась в первой трети прошлого века художниками-экспрессионистами как средство упрощения форм с целью выражения эмоционального состояния и переживаний авторов [2].

Современная полигональная графика использует технику 3D - визуализации при создании компьютерных игр, в цифровом искусстве, в прикладной геометрии. Используя популярные программы 3D - моделирования, можно создавать упрощенные и угловатые модели оригинальных конструкций и композиций. Эффект достигается за счет последовательного заполнения пространства гладкими остроугольными фигурами. Объект не выглядит одномерным благодаря технике контрастов и уровневому распределению. Это позволяет применять полигональную графику в ситуациях, требующих соблюдения смысловых акцентов.

На рис. 1 и рис. 2 приведены примеры объектов, смоделированных с помощью полигональной графики.



Рисунок 1 – Низкополигональная модель мебели

Низкое разрешение таких объектов увеличивает скорость рендеринга. Отображение в виде каркаса позволяет экономить ресурсы компьютера и облегчает работу с моделью.



Рисунок 2. – Низкополигональная модель скульптурного объекта

Недостатком полигональных трехмерных объектов является необходимость создания большого количества полигонов для представления сложных криволинейных поверхностей [3]. Иногда отображение пространственной сцены может потребовать сотни тысяч и даже миллионы полигонов. Из-за этого при синтезе динамических композиций геометрические параметры нужно пересчитывать у большого числа примитивов в режиме реального времени. Частичным выходом из положения является использование мощной вычислительной техники.

Задачей настоящей работы является изложение простой и эффективной методики построения трехмерной полигональной модели в программе Pixologie Zbrush 4R7 и с последующей визуализацией в Keyshot S и обработкой Adobe Photoshop CS6. Особенностью выбранной программы является тот факт, что она имитирует лепку объекта из пластичного материала, что упрощает процедуру моделирования и усиливает творческие возможности программы. В качестве примера выбрано сувенирно-скульптурное изделие «остров», аналог которого показан на рисунке 3.



Рисунок 3. – Аналог модели объекта «Остров»

Каждая точка моделируемого объекта содержит информацию не только о своих координатах X Y и значениях цвета, но так же и о глубине Z , ориентации и материале. Таким образом, возможно не только «лепить» трехмерный объект в цифровом формате, но и «раскрасить» его. Предусмотренные программой кисти позволяют быстро моделировать геометрию, текстуру и материалы. Программа позволяет добиться интерактивности при большом количестве полигонов. Используя специальные методы, можно поднять детализацию до десятков миллионов полигонов, что позволяет четко выявлять мельчайшие рельефы и элементы сложного объекта.

Процесс компьютерной «лепки» начинается с создания специального инструмента – Z Spheres (Z - сферы), который позволяет конструировать каркас объекта. На полученный каркас накладывается полигональная сетка, параметры которой можно редактировать. Z Spheres особо полезна для создания органических моделей любой сложности.

Добавив Z Spheres на холст, нужно нажать на кнопку Edit, чтобы войти в режим редактирования (или воспользоваться горячей клавишей T).

Сферу можно поворачивать и масштабировать. Если навести кружок в центр, то он меняет свой цвет на зеленый. Этим обозначается лучшее место для присоединения еще одной сферы.

Чтобы активировать режим предпросмотра полигональной сетки, необходимо нажать клавишу A.

После того как необходимая каркас-заготовка будет готова, важно превратить ее в редактируемые полигоны. Во время построения модели

необходимо периодически выполнять команду DynaMesh. Это позволит равномерно распределять полигоны по поверхности модели, так как в процессе моделирования они деформируются [4].

Когда высокополигональная модель готова, необходимо снизить количество полигонов и превратить их в треугольники с помощью алгоритма редукции Polygon Reduction. Принцип редукции заключается в замещении группы полигонов одним, наиболее близким к исходной группе по расположению вершин. Всегда при создании низкополигональных моделей следует стремиться к минимизации вершин и ребер при сохранении подобия сформированной модели реальному прототипу.

В программе Pixologic Z Brach 4R7 минимизацию вершин и ребер рекомендуется выполнить с помощью плагина Decimation Master [5]. Данный плагин позволяет достичь качественного результата не прибегая к сложным вычислениям. Такой подход позволяет создавать трехмерные модели малой пластики, иллюстраций, игровых персонажей в статике и в движении.

Для визуализации трехмерной модели аналога (острова) была применена программа Key Short, нацеленная на интерактивную визуализацию 3D-сцен и моделей [1]. Результат рендеренга можно просматривать в реальном времени. Учитывая, что в приложении к программе используется глобальное освещение и материалы, обладающие реальными физическими параметрами, итоговые изображения получают фотографического качества. На рис. 4 показана конечная модель сувенирно-скульптурного объекта «Россия», основанная на ранее принятом аналоге (рис.3) и полученная по описываемой методике.



Рисунок 4. – Реалистичная низкополигональная модель скульптурно-сувенирного объекта

Программа Key Short позволяет видеть и оценить результаты моделирования в тот самый момент, когда производятся изменения геометрии, цвета, материалов и т.д. Программа позволяет импортировать трехмерные модели, созданные в различных 3D - редакторах и в разных форматах.

Последний этап полигонального трехмерного моделирования – графическая доработка рендеров. Предлагается этот этап выполнять в многофункциональном графическом редакторе Photoshop CS6. В описываемом примере с помощью Photoshop CS6 редактировались яркость и контрастность итоговых рендеров. Цвета некоторых элементов композиции были изменены. Добавлены шрифтовые композиции. Подчеркнем, что основной формат Photoshop CS6, PSD, может быть экспортирован и импортирован большинством программных продуктов.

Выводы

Полигональная графика является эффективным и сравнительно легко реализуемым инструментом трехмерного моделирования. Оригинальные композиционно-геометрические и дизайнерские решения могут быть получены с использованием типовых трехмерных программ. Область применения низкополигональных трехмерных статистических и динамических моделей непрерывно расширяется.

Литература

1. Шикин А.В., Боресков А.В. Компьютерная графика. Полигональные модели. Москва : Диалог-МИФИ, 2001. – 464 с.
2. Эшли Басси. Экспрессионизм. Москва : Изд-во БММ, 2007. – 288 с.
3. Эрик Келлер. Введение в Зпруше. – Москва : МДК-Пресс, 2012. 202 с.
4. Подборка советов и уроков по Zbrush 4R7: [Электронный ресурс] // Интернет-портал URL: <http://3dpara.ru/> (Данные обращения: 12.02.2018).
5. Ванников А.В. Процессы и технологии цифровой печати / А. В. Ванников. – Москва : МГУП, 2006. - 261 с.

Бердичевский Евсей Григорьевич, кандидат технических наук, профессор, заведующий кафедрой художественной и пластической обработки материалов, ФГБОУ ВО «Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого», 173004, Великий Новгород, ул. Б.Московская, д.56/12, кв.3, e-mail: bersev@mail.ru

Berdichevsky Evsey Grigoryevich, Candidate of Technical Sciences, Professor, Yaroslav-the-Wise Novgorod State University

ПРОНИЦАЕМОСТЬ МЕМБРАНЫ ИЗ ПЛОТНО УЛОЖЕННЫХ ЗАКРЫТЫХ УГЛЕРОДНЫХ НАНОТРУБОК¹

Аннотация. Нанотрубки подобно фуллеренам могут укладываться в потенциальные ямы смежных с ними трубок, образуя новый материал, имеющий треугольные туннели. Такой способ образования кластеров из нанотрубок называется режимом самоукладки. В данной работе предложено два способа расчета проницаемости такого материала молекулами и атомами газовой смеси. В рамках первого подхода проведенные расчеты позволили определить эффективные радиусы трубок по отношению к гелию и метану. Этот способ опирается на определение величин площадей зон свободного прохождения молекул, второй на набор полной статистики по одиночным пускам, реализующим прохождение молекул. Исследованная идеальная углеродная структура показала высокую селективность в отношении разделения метан-гелиевой смеси и оказалась практически непроницаемой по отношению к метану.

Ключевые слова: молекулярная динамика, нанотрубки, потенциал взаимодействия, укладка трубок, проницаемость укладки, разделение газов, селективность разделения метан-гелиевой смеси.

© *A. M. Bubenchikov, M. A. Bubenchikov,
D. V. Mamontov, A. S. Chelnokova*

PERMEABILITY OF THE MEMBRANE OF COMPACTED CLOSED CARBON NANOTUBES

Abstract. Nanotubes like fullerenes can fit into the potential wells of adjacent tubes forming a new material with triangular tunnels. This method of forming clusters of nanotubes is called the self-cladding mode. In this article two methods for calculating permeability of such material by molecules and atoms of a gas mixture are proposed. Within the framework of the first approach the calculations carried out made it possible to determine the effective radii of the tubes with respect to helium and methane. This method is based on the determination of free-passing zones areas of molecules; the

¹ Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России (госзадание №1.12877.2018/12.1).

second method is based on a set of complete statistics on single starts that realize the passage of molecules. This ideal carbon structure showed a high selectivity for the separation of the methane-helium mixture and proved practically impenetrable to methane.

Keywords: molecular dynamics, nanotubes, interaction potential, packing of tubes, packing permeability, gas separation, selectivity of methane-helium mixtures separation.

Введение

В последние годы многие исследователи сходятся на том, что углеродные трубки обладают механической и биологической совместимостью с живыми тканями, и в этом смысле являются наиболее долговечными [1-3]. В настоящее время планируется провести ряд экспериментов с внедрением многослойных углеродных нанотрубок в живые нервные ткани, что позволит разработать практические технологии ускорения регенерации нервных тканей [4].

Если короткие трубки, находящиеся в вакууме, предоставить самим себе, под действием сил Ван-дер-Ваальса они будут сближаться и, в конце концов, попадут в потенциальные ямы уже зафиксировавших свое положение трубок. Примерно такой способ образования кластеров из трубок называется режимом самоукладки трубок. Обеспечивая соответствующие условия самоукладки, можно добиться образования суперкластера. Он будет представлять собой фрагмент мембраны, которую в дальнейшем мы будем использовать для разделения метан-гелиевой смеси.

1. Численная модель

Исследования процесса взаимодействия перемещающейся молекулы с атомами рассматриваемой углеродной структуры, основано на применении математической модели и численных методов решения основной задачи динамики молекулы. Взаимодействие между отдельными атомами или молекулами определяется классическим потенциалом Леннарда-Джонса. Взаимодействие же со структурой описывается по закону независимости действий как сумма воздействий каждого атома структуры на рассматриваемую пробную молекулу. Согласно этому закону, если на материальную точку действует несколько сил, то они сообщают ей ускорение, равное геометрической сумме тех ускорений, которые они сообщили бы ей, действуя отдельно.

В проекциях на оси координат уравнения движения взаимодействующей с карбоновой структурой молекулы запишутся следующим образом:

$$m \frac{dU}{dt} = X', m \frac{dV}{dt} = Y', m \frac{dW}{dt} = Z',$$

$$\text{где } X' = \sum_{j=1}^{N_p} X'_j, Y' = \sum_{j=1}^{N_p} Y'_j, Z' = \sum_{j=1}^{N_p} Z'_j. \quad (1)$$

Здесь X', Y', Z' – проекции равнодействующей ван-дер-ваальсовских сил от атомов углеродной структуры, которые определяются как простые суммы силовых вкладов от узлов поверхностной кристаллической сети, N_p – количество атомов в рассматриваемом углеродном материале. Далее, введем в рассмотрение величины X, Y, Z : $mX = X', mY = Y', mZ = Z', m$ – опереписать в виде:

$$\frac{dU}{dt} = X, \frac{dV}{dt} = Y, \frac{dW}{dt} = Z,$$

$$\text{где } X = \sum_{j=1}^{N_p} a_j \frac{x - x_j^0}{\rho_j}, Y = \sum_{j=1}^{N_p} a_j \frac{y - y_j^0}{\rho_j}, Z = \sum_{j=1}^{N_p} a_j \frac{z - z_j^0}{\rho_j} \quad (2)$$

Здесь индексом ноль отмечены координаты узлов углеродной сети, a_j – величина ускорения, которое приобретает пробная молекула под действием j -го атома рассматриваемой сетчатой структуры. Эта величина через параметры потенциала Леннарда–Джонса и расстояния до атома структуры выражается следующим образом:

$$a_j = 24 \frac{\varepsilon}{m\rho_j} \left(\frac{\sigma}{\rho_j} \right)^6 \left[2 \left(\frac{\sigma}{\rho_j} \right)^6 - 1 \right]. \quad (3)$$

В формуле (3) ρ_j – расстояние между рассматриваемой пробной молекулой и j -тым атомом углеродной структуры; σ и ε – параметры взаимодействия пар веществ, входящие в LJ - потенциал.

Если уравнения (2) дополнить кинематическими соотношениями, определяющими скорость точки:

$$\frac{dx}{dt} = U, \frac{dy}{dt} = V, \frac{dz}{dt} = W, \quad (4)$$

то получим систему шести обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно шести неизвестных: x, y, z, U, V, W . Для решения этой системы будем использовать метод Рунге-Кутты стандартного четвертого порядка точности.

В случае, когда исследуемая система состоит из разнородных молекул (атомов), то для параметров ε и σ справедливы правила усреднения Лорентца-Бершелло (Lorentz-Berthelot mixing rule).

2. Проницаемость плотной укладки закрытых углеродных нанотрубок

Под проницаемостью обычно понимается относительная величина потока массы падающих на мембрану молекул к потоку прошедших молекул. В рассматриваемых задачах уместно выделить период обновления термодинамического состояния газа $\tau = \lambda/v$ (λ – средняя длина свободного пробега молекул, v – средняя тепловая скорость их движения). В рамках этого периода обновления можно говорить о количестве падающих и прошедших молекул. Тогда определение проницаемости будет выглядеть следующим образом. Относительная проницаемость есть доля прошедших молекул от числа падающих на λ^2 -поверхность, изначально находившихся в λ^3 -объеме газовой среды, прилегающем к поверхности мембраны.

Режим самоупкладки нанотрубок может быть реализован в вакууме. Для этого необходимо иметь трубки одинакового поперечного размера и примерно одинаковой длины. Такие трубки сами должны соединиться в устойчивую структуру (суперкластер из нанотрубок).

На рис. 1 показана система однослойных закрытых нанотрубок сложенных в режиме самоупкладки, когда каждая из трубок попадает в потенциальные ямы смежных с ней трубок. Минимальные расстояния между ними 0,32 нм.

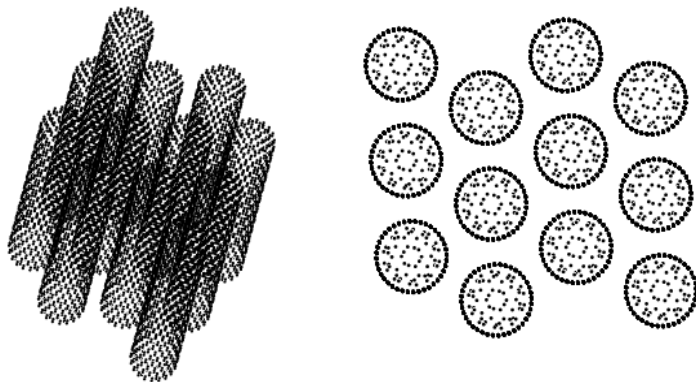


Рисунок 1. – Плотная укладка закрытых нанотрубок радиусом 0,452 нм.

В случае, когда трубки примерно одинакового размера и силы Ван-дер-Ваальса удерживают их в равновесных положениях, делая параллельными друг другу, то получаем более или менее однородный слой толщиной равный длине трубки. Такая укладка является туннельной структурой, поскольку содержит непроходимые с боков треугольные туннели, где

свободные молекулы могут перемещаться в осевом направлении по отношению к трубкам.

Для закрытых нанотрубок лишь межтрубное пространство является свободным при прохождении атомов гелия, молекул водорода и еще некоторых других простых веществ. Молекулы же метана уже не проходят через получившиеся туннели. Этот факт можно установить простым обстрелом рассматриваемой системы, либо найти окна проницаемости треугольных туннелей для гелия и метана. Границы этих окон, т.е. криволинейные рамы, определяются величинами эффективных радиусов трубок по отношению к рассматриваемым компонентам. Упомянутые радиусы определялись как половины предельных расстояний между осями трубок, обеспечивающих не прохождение молекул и атомов в зазор между поверхностями трубок. Оказалось, что эффективные радиусы зависят еще от скоростей подвижных частиц. В представительном диапазоне по скоростям это 4,5% по величине радиуса.

Рассчитанные значения радиусов по отношению к рассматриваемым компонентам показаны на рис. 2. Видно, что величины радиусов с изменением скорости в представительном диапазоне отличаются на 7%, но при плотной укладке трубок это отличие оказывается критическим в отношении прохождения молекул метана.

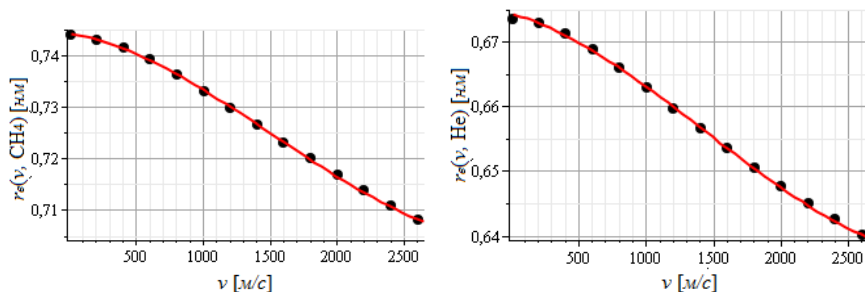


Рисунок 2. – Эффективный радиус закрытой нанотрубки по отношению к молекуле метана и атому гелия

На рис. 3 показаны окна проницаемости рассматриваемой системы по отношению к атомам гелия. Видно, что треугольные окна проницаемости являются достаточно маленькими. Это говорит о том, что производительность мембраны из одинаково ориентированных закрытых нанотрубок будет небольшой, если для оценки производительности использовать закон площадей. Применительно к рассматриваемому случаю закон площадей можно сформулировать следующим образом. Количество

прошедших молекул в единицу времени через удельную поверхность должно быть пропорционально отношению площади окна проницаемости к величине площади паркетирующей поверхности мембраны (площадь треугольника с вершинами на осях трубок). Отношение указанных площадей составляет всего 3%. Однако относительная производительность такой мембраны в принципе может быть выше из-за того, что молекулы могут затягиваться в треугольный туннель, расширяя площадь вхождения молекул в область свободного движения.

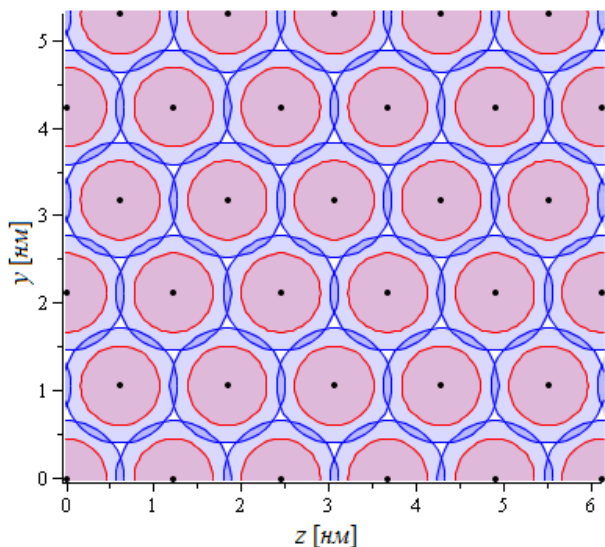


Рисунок 3. – Общий вид окон проницаемости плотной укладки закрытых нанотрубок относительно атомов гелия с начальной скоростью $u_0 = 1360$ м/с.

На рис. 4 показан плоский срез плотной укладки закрытых нанотрубок с радиусами отталкивания, найденными по отношению к молекулам метана, имеющим скорость $u_0 = 680$ м/с. Видно, что эффективные радиусы трубок полностью перекрывают треугольные туннели, обеспечивающие свободное движение молекул метана. Таким образом, по теории окон проницаемости плотная укладка нанотрубок является непроходимой для метана.

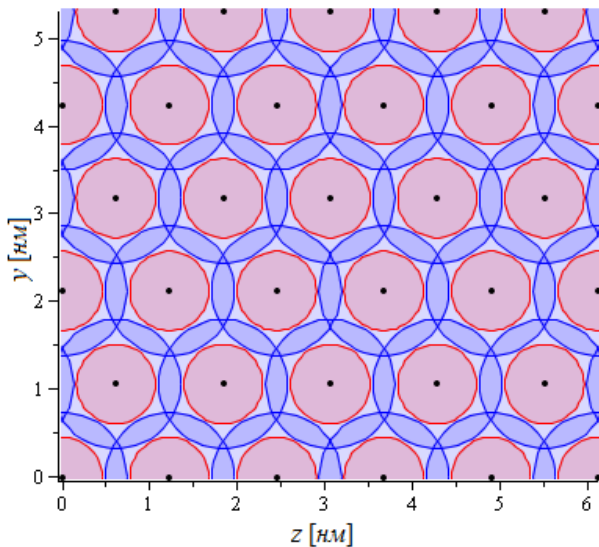


Рисунок 4. – Общий вид псевдо окон проницаемости плотной укладки закрытых нанотрубок относительно молекул метана с начальной скоростью $u_0 = 680$ м/с.

На рис. 5 показана прямоугольная ячейка треугольной укладки трубок. Такими прямоугольниками, как и треугольниками с вершинами на осях трубок, паркетуется вся поверхность мембраны. Прямоугольные ячейки являются существенно более удобными. С их помощью легче строить сетку начальных позиций пучка падающих на поверхность мембраны молекул и легче конструировать входящий паркетующий все пространство туннель для нахождения полного набора статистики.

Однако если падающая молекула CH_4 движется по геометрической оси треугольного туннеля (перпендикулярно поверхности мембраны), и ее скорость не ниже 1940 м/с, то она благополучно проходит туннель. Вероятность реализации такого события чрезвычайно мала, поскольку более простые составляющие этого события маловероятны, но сам факт возможности преодоления сложного пространственного барьера высокоскоростной молекулой метана подтверждается расчетами движения высокоскоростной молекулы по оси туннеля.

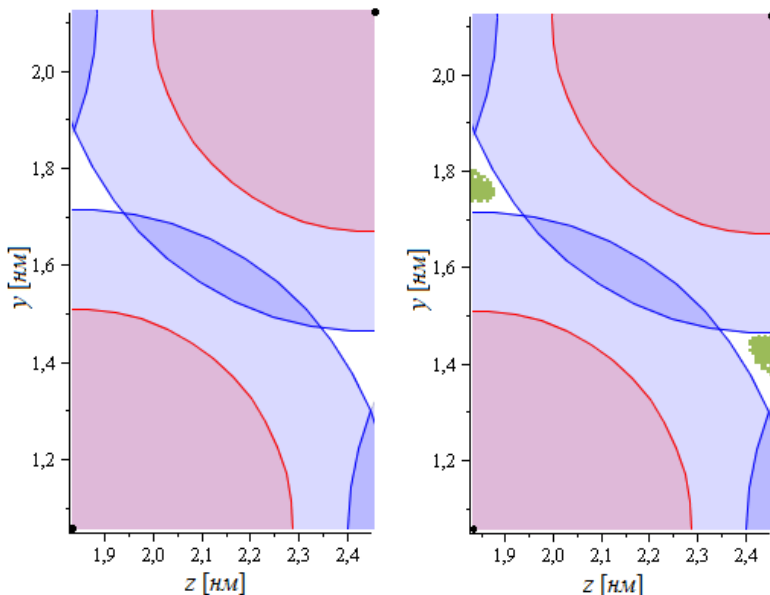


Рисунок 5. – Окно проницаемости плотной укладки закрытых нанотрубок относительно атомов гелия с начальной скоростью $u_0 = 1360$ м/с.

Тем не менее, метод окон проницаемости и закон площадей, как выражающие собой среднестатистические характеристики, дают нулевую проницаемость по метану, следовательно бесконечную степень разделения смеси. В связи с выше сказанным, правильнее будет говорить о почти непроницаемой мембране по отношению к метану и очень высокой степени разделения метан-гелиевой смеси.

Заключение

Проведенные молекулярно динамические расчеты позволили найти эффективные радиусы трубок стандартного поперечного размера по отношению к гелию и метану. Это, в свою очередь, позволило для расчета проницаемости самоупаковки нанотрубок использовать метод окон проницаемости и закон площадей. По найденному методу исследуемая углеродная структура оказалась непроницаемой для метана. Атомы же гелия двигаются внутри треугольных туннелей со скоростью в 1,5 раза выше скорости входа в туннель и поэтому достаточно быстро покидают его. Из-за этого материал как бы самоочищается от частиц, находящихся внутри.

Литература

1. Eom K. Controllable viscoelastic behavior of vertically aligned carbon nanotube arrays. / K. Eom, et al. // Carbon. – 2013. – Vol. 65. – P. 305-14. – DOI: 10.1016/j.carbon.2013.08.030.
2. Sinnott S., Aluru N. Carbon nanotubes as nanoelectromechanical systems components. / S. Sinnott, N. Aluru. // Carbon Nanotechnology. – 2006. – P. 361-488. – DOI: 10.1016/B978-044451855-2/50016-43.
3. Cho J. Characterisation of carbon nanotube films deposited by electrophoretic deposition. / J. Cho, et al. // Carbon. – 2009. - Vol. – 47, № 1. – P. 58-67. – DOI: 10.1016/j.carbon.2008.08.0284.
4. Mark Schulz. Nanotube superfiber materials: changing engineering design / Mark Schulz, Vesselin Shanov, Zhangzhang Yin. – William Andrew Publishing, 2013. – 848 с.

Бубенчиков Алексей Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра ММФ ТГУ, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36 к. 2, тел.: +7 913 110-97-16

Бубенчиков Михаил Алексеевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики Национального исследовательского Томского государственного университета, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36 к. 2, тел.: +7 903 955-59-16, e-mail: michael121@mail.ru

Мамонтов Дмитрий Владимирович, аспирант кафедры теоретической механики Национального исследовательского Томского государственного университета, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36 к. 2, тел.: +7 952 152-64-10, e-mail: oregaore@mail.ru

Челнокова Анна Сергеевна, аспирант кафедры теоретической механики Национального исследовательского Томского государственного университета, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36 к. 2, тел.: +7 913 879-49-11, e-mail: smolina-nyuta@mail.ru

Bubenchikov Alexey Mikhailovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Regional Scientific and Educational Mathematical Center MMF TSU

Bubenchikov Mikhail Alekseevich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, National Research Tomsk State University

Mamontov Dmitry Vladimirovich, post-graduate student of the Department of Theoretical Mechanics, National Research Tomsk State University

Chelnokova Anna Sergeevna, post-graduate student of the Department of Theoretical Mechanics, National Research Tomsk State University

СЕЛЕКТИВНЫЕ СВОЙСТВА ОДНОЙ ИДЕАЛЬНОЙ СЭНДВИЧ СТРУКТУРЫ В ОТНОШЕНИИ МЕТАН-ГЕЛИЕВОЙ СМЕСИ¹

Аннотация. Идеальные туннельные углеродные структуры обладают уникальными физическими свойствами, в частности, в отношении фильтрации газов. В настоящей работе рассматривается материал, который в условиях самосборки представляет собой сэндвич структуру, составленную из графеновых чешуек и коротких закрытых углеродных нанотрубок. Если добиться согласованной по трубкам ориентации в пространстве сэндвич блоков, то можно сконструировать слой, обладающий уникальными свойствами в отношении разделения различных газовых смесей. Методами молекулярной динамики исследуется проницаемость такой структуры. Показано, что рассматриваемый материал, работающий в полупроводниковом режиме, не содержит сорбционных молекул, порождающих диффузию в обычном понимании этого механизма. Предложена статистическая модель и простейшая схема по определению проницаемости структуры молекулами метана и атомами гелия.

Ключевые слова: молекулярная динамика, нанотрубки, потенциал взаимодействия, сэндвич структура, проницаемость структуры, разделение газов, селективность разделения метан-гелиевой смеси.

© *А. М. Bubenchikov, M. A. Bubenchikov,
D. V. Mamontov, A. S. Chelnokova*

SELECTIVE PROPERTIES OF AN IDEAL SANDWICH STRUCTURE FOR METHANE-HELIUM MIXTURE

Abstract. Ideal tunnel carbon structures have unique physical properties, in particular, with respect to the filtration of gases. In this article we consider a material that under self-assembly conditions is a sandwich structure composed of graphene flakes and short closed carbon nanotubes. If orientation of the sandwich blocks in the space coordinated along the tubes is achieved, it is possible to design a layer having unique properties with respect to the separation of various gas mixtures. Methods of molecular dynamics research the permeability of such a structure. It is shown that the material in question, operating in the semiconductor mode, does not contain sorption molecules that generate diffusion in the usual sense of this mechanism. A statistical model and a simple scheme

¹ Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России (госзадание №1.12877.2018/12.1).

for determining the structure permeability by methane molecules and helium atoms are proposed.

Keywords: molecular dynamics, nanotubes, interaction potential, sandwich structure, structure permeability, gas separation, selectivity of methane-helium mixtures separation.

Введение

Гибридизационные наноуглероды, такие как углеродные нанотрубки или графен с неорганическими и органическими соединениями, являются перспективными в плане разработки функциональных материалов следующего поколения, в частности для изготовления мембран. Гибридные структуры могут быть составлены углеродными трубками [1-3] и графенами [4-6].

Обычно под относительной проницаемостью понимают отношение потока массы прошедших молекул к потоку падающих на какую-либо характерную площадь мембраны. Однако поскольку период обновления состояния газа в приповерхностном слое известен, и в задачах о мембранном транспорте он является постоянной величиной, то выражение “поток массы” можно заменить словосочетанием “количество молекул”, имея в виду, что это количество поступает из объема газа за указанный период обновления. Поэтому результирующий вариант определения проницаемости может быть следующим: относительной проницаемостью является доля прошедших молекул от числа падающих на представительную площадку мембраны.

Под селективностью понимается отношение проницаемостей соответствующих компонент смеси. В углеродных структурах селективной является ячейка размером около 1 нм^2 . Такова ячейка молекулярного кристалла низкотемпературного фуллерита или ячейка сэндвич структуры, составленной из фуллеренов и графеновых листов, полученной в режиме самоукладки (когда наночастицы попадают в потенциальные ямы смежных с ними объектов). Такой же будет ячейка сэндвич структуры (рис. 1), составленной стандартными одностенными закрытыми углеродными нанотрубками (ОЗУНТ) и графеновыми пластинками. В настоящей работе исследуется именно такая структура в отношении прохождения молекул метана и атомов гелия.

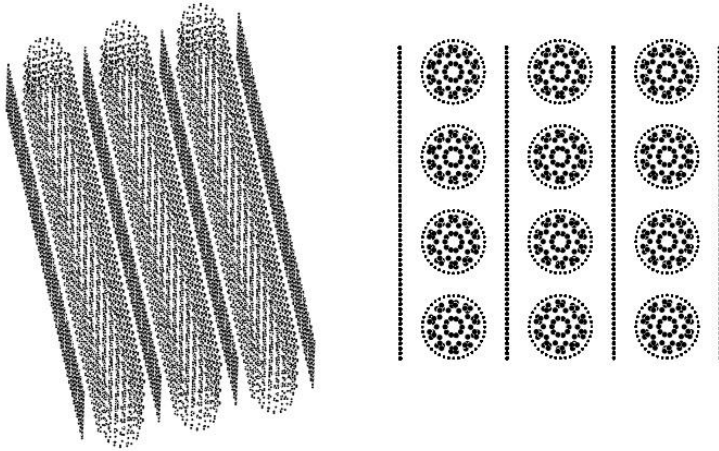


Рисунок 1. – Два ракурса сэндвич структуры, составленной стандартными одностенными углеродными нанотрубками и графеновыми пластинками.

1. Общая схема проведения расчетов

В простейшем случае рассматриваемую углеродную структуру можно представить как совокупность атомов, стоящих в заданных позициях. Это так называемая статическая модель материала. Такая модель является вполне приемлемой при низких и умеренных температурах фильтрации газов через нанопористые материалы. Пусть воздействие от отдельного узла кристаллической структуры определяется классическим потенциалом Леннарда-Джонса:

$$U(\rho_j) = 4\epsilon \left[\left(\frac{\sigma}{\rho_j} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{\rho_j} \right)^6 \right]. \quad (1)$$

Тогда интегральное воздействие от всех атомов пористого материала будет простой суммой их потенциалов:

$$U_{\Sigma}(x, y, z) = \sum_{j=1}^{N_p} U(\rho_j). \quad (2)$$

Здесь $\rho_j = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + (z - z_j)^2}$ – расстояние между перемещающейся молекулой газа и j -ым атомом структуры, N_p – общее количество атомов в структуре.

Для потенциала взаимодействия вила (1) уравнения движения перемещающейся молекулы можно записать следующим образом:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \sum_{j=1}^{N_p} a_j \frac{x - x_j}{\rho_j}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \sum_{j=1}^{N_p} a_j \frac{y - y_j}{\rho_j}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \sum_{j=1}^{N_p} a_j \frac{z - z_j}{\rho_j}, \quad (3)$$

где $a_j = 24 \frac{\varepsilon}{m \rho_j} \left(\frac{\sigma}{\rho_j} \right)^6 \left[2 \left(\frac{\sigma}{\rho_j} \right)^6 - 1 \right]$ – величина ускорения, приобретаемого

перемещающейся молекулой под воздействием j -го атома структуры, N_p – общее количество атомов в структуре, m – масса перемещающейся молекулы; ε, σ – параметры LJ -потенциала.

Три обыкновенных дифференциальных уравнения второго порядка известным приемом сводятся к шести уравнениям первого порядка. Далее их можно проинтегрировать численно, используя технологию Рунге-Кутты стандартного четвертого порядка точности. В любом случае для получения решения эволюционной задачи на основе выписанных уравнений требуется знание начальных условий, которые должны определять исходное положение и начальную скорость пробной молекулы.

2. Расчет проницаемостей по методу свободных зон прохождения молекул

Несмотря на многочисленные упрощения, связанные с правильным выбором и оптимальной дискретизацией полный набор статистики по прохождению молекул провести достаточно трудно. Введем в рассмотрение базовый набор статистики в задачах прохождения туннельных структур. Такой набор по опыту авторов в случаях, не приводящих к диффузионному режиму, вполне приемлемо определяет проницаемость туннельной структуры. Он заключается в нахождении доли прошедших молекул от числа запущенных с входной грани туннеля со скоростью, близкой к средней тепловой скорости движения и по нормали к поверхности мембраны. В рамках этого набора статистики можно предложить инженерную методику расчета проницаемости, вообще не требующую отдельных пусков молекул. Однако для этого предварительно в рассматриваемом случае необходимо найти эффективный радиус нанотрубки и эффективную дистанцию сближения молекулы с графеновым листом.

Рассматриваемая углеродная структура имеет туннели с непроницаемыми (отражающими) боковыми гранями. Поэтому, проходя через структуру, подвижные частицы (атомы или молекулы) могут двигаться только вдоль отдельно взятого туннеля. Сечения этих туннелей, проведенные перпендикулярно осям нанотрубок, показаны на рис. 2.

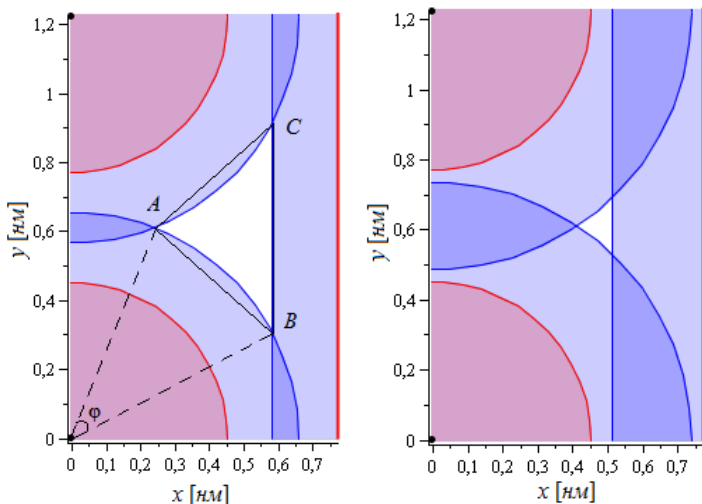


Рисунок 2. – Окна проницаемости для гелия при $v=1367$ м/с (слева) и метана при $v=684$ м/с (справа)

Здесь шаг укладки трубок в структуре $h = 1,224$ нм (расстояние по Oy между осями закрытых нанотрубок), а $p = 0,772$ нм (расстояние по Ox от графенового листа до осей трубок).

Окна проницаемости, как видно из рисунка, имеют вид равнобедренных треугольников с двумя криволинейными боковыми сторонами и прямолинейным основанием. На рассматриваемом интервале изменения скоростей (0;2600 м/с), который неплохо представляет распределение Максвелла, размеры сторон треугольников меняются. Эти изменения могут быть существенны. Однако конкретные размеры окон проницаемости показаны для скоростей частиц близких к средним тепловым. Размер окна определяется эффективным радиусом трубки (см. рис. 3) и эффективной дистанцией сближения с графеновой пластинкой (см. рис. 4).

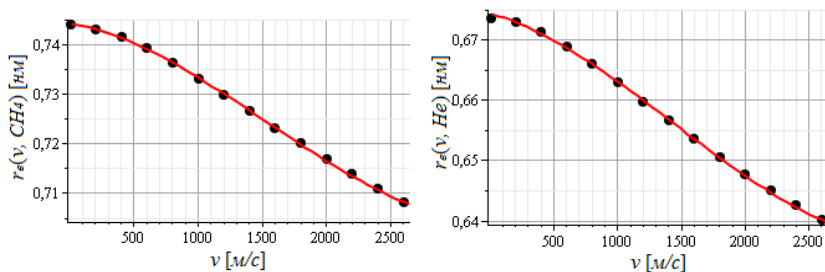


Рисунок 3 – Эффективный радиус закрытой нанотрубки по отношению к метану и гелию.

Расчетами найдена кубическая аппроксимация эффективного радиуса закрытой нанотрубки по отношению к молекуле метана: $r_e(v, CH_4) = a_1 v^3 - a_2 v^2 - a_3 v + a_4$ [нм], где $a_1 = 1,90846560810^{-12}$ [нс³/нм²], $a_2 = 8,70427248 \cdot 10^{-9}$ [нс²/нм], $a_3 = 4,09717198 \cdot 10^{-6}$ [нс], $a_4 = 0,744227336$ [нм] – коэффициенты аппроксимирующего полинома; по отношению к атому гелия: $r_e(v, He) = b_1 v^3 - b_2 v^2 - b_3 v + b_4$ [нм], где $b_1 = 1,69325396810^{-12}$ [нс³/нм²], $b_2 = 7,27835317510^{-9}$ [нс²/нм], $b_3 = 5,65898019 \cdot 10^{-6}$ [нс], $b_4 = 0,674352341$ [нм] – коэффициенты аппроксимирующего полинома.

Далее приведены результаты расчетов эффективной дистанции сближения с графеновой пластиной.

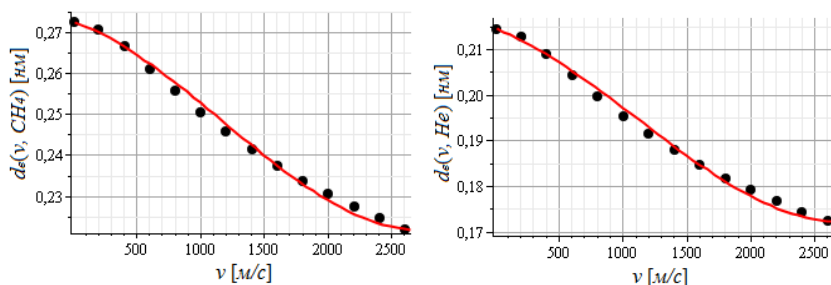


Рисунок 4. – Эффективная дистанция для графеновой пластины по отношению к метану и гелию.

Расчетами найдена кубическая аппроксимация эффективной дистанции сближения для графенового листа по отношению к молекуле метана: $d_e(v, CH_4) = a_1 v^3 - a_2 v^2 - a_3 v + a_4$ [нм], где $a_1 = 3,67716768910^{-12}$ [нс³/нм²], $a_2 = 12,9662627610^{-9}$ [нс²/нм], $a_3 = 10,5640757410^{-6}$ [нс], $a_4 = 0,272585383$ [нм] – коэффициенты аппроксимирующего полинома; по отношению к атому гелия: $d_e(v, He) = b_1 v^3 - b_2 v^2 - b_3 v + b_4$ [нм], где $b_1 = 2,8870604810^{-12}$ [нс³/нм²], $b_2 = 9,6869110410^{-9}$ [нс²/нм], $b_3 = 10,5808472 \cdot 10^{-6}$ [нс], $b_4 = 0,214658954$ [нм] – коэффициенты аппроксимирующего полинома.

Приведенные выше характеристики зависят как от сорта сближающейся частицы, так и от ее скорости. Далее по методу окон проницаемости могут

быть найдены площади свободных зон прохождения молекул, а по ним определены проницаемости и селективность.

Свободные зоны прохождения могут быть рассчитаны следующим образом. Вершины A и B $\triangle ABC$ лежат на окружности радиуса r_e с центром в начале координат (см. рис. 2). Кроме того, точка A расположена симметрично относительно нанотрубок, поэтому:

$$y_A = \frac{h}{2}, z_A = \sqrt{r_e^2 - \frac{h^2}{4}}. \quad (4)$$

Учитывая также, что точка B отходит от правого края ячейки на расстояние d_e , можем записать:

$$y_B = \sqrt{r_e^2 - (p - d_e)^2}, z_B = p - d_e. \quad (5)$$

Тогда длина отрезка AB будет равна:

$$l_{AB} = \sqrt{(y_A - y_B)^2 - (z_A - z_B)^2}. \quad (6)$$

Из $\triangle AOB$ по координатам его вершин легко найти центральный угол φ , лежащий напротив основания равнобедренного треугольника AOB :

$$\varphi = 2 \arcsin\left(\frac{l_{AB}}{2r_e}\right). \quad (7)$$

Площадь сегмента ограниченного стороной AB есть разность площадей кругового сектора и треугольника:

$$S_{seq} = \frac{r_e^2}{2} \left(\varphi - \frac{\sin \varphi}{2} \right). \quad (8)$$

Поэтому свободная зона для прохождения молекул будет иметь размер:

$$S_f = S_{ABC} - 2S_{seq}. \quad (9)$$

Тогда с учетом полученных распределений $r_e = r_e(v)$, $d_e = d_e(v)$, относительные значения величин проницаемостей для гелия и метана можно найти по формулам:

$$D(He) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \alpha^{3/2} \int_0^{\infty} e^{-\alpha v^2} v^2 \left[\frac{S_f(He)}{hp} \right] dv, \quad (10)$$

$$D(CH_4) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \alpha^{3/2} \int_0^{\infty} e^{-\alpha v^2} v^2 \left[\frac{S_f(CH_4)}{hp} \right] dv. \quad (11)$$

Здесь $\alpha = \frac{m}{2kT}$, m – молекулярная масса выбранной компоненты, k – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура, h – расстояние между

осями нанотрубок, p – расстояние между листом графена и осями нанотрубок.

Зная относительные проницаемости отдельных компонент смеси, можно определить селективность мембраны в отношении гелия по следующей формуле:

$$\chi = \frac{D(He)}{D(CH_4)}. \quad (12)$$

Вообще говоря, шаг плотной укладки нанотрубок h является постоянной величиной, однако, для определения возможных зон высокой селективности, рассмотрим h в качестве варьируемого параметра. Распределение $D(h)$, представленное на рис. 5, находим на интервале от 0,904 до 1,864 нм.

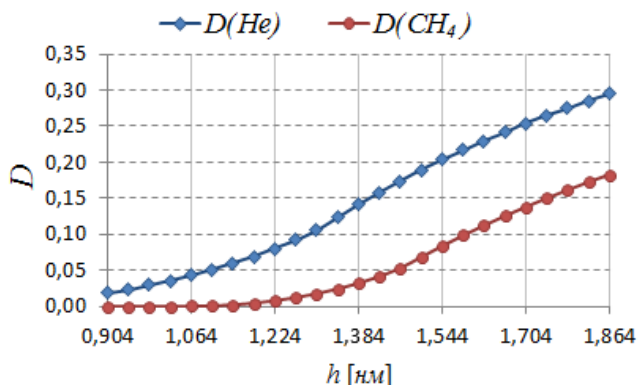


Рисунок 5. – Коэффициенты прохождения гелия и метана в зависимости от расстояния между осями закрытых нанотрубок.

Рис. 6 показывает, что если бы сэндвич структура находилась в сжатом состоянии, а именно в таком, при котором параметр h вместо 1,224 нм имел бы значение 1,104 нм, то степень разделения была бы высокой (почти 90 безразмерных единиц). В то же время в обычном состоянии мембрана обеспечивает разделение метан-гелиевой смеси со степенью $\chi = 11$ единиц.

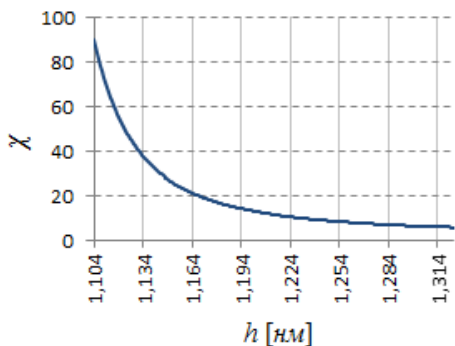


Рисунок 6. – Степень разделения метан-гелиевой смеси χ .

3. Полная статистика по начальным данным

Полная статистика обеспечивается тогда, когда континуальные диапазоны и по начальным положениям, и по начальным скоростям представлены достаточно полно набором дискретных значений. В рассматриваемом случае ячейка структуры, показанная на рис. 2 покрывается сеткой, содержащей примерно 500 узлов, обозначающих начальные положения молекул. Она выносится на расстояние около 10 нм от мембраны. Теперь можно выделить прямоугольный туннель, проходящий через всю мембрану и имеющий поперечное сечение в виде рассматриваемой ячейки. По крайней мере, на расстоянии 10 нм от начальных позиций молекул и до поверхности мембраны этот туннель будет иметь свободные боковые грани. На них ставятся условия зеркального отражения, которые имитируют боковые переходы из смежных туннелей. Таким образом, для нахождения проницаемости можно использовать всего один туннель, находящийся обычно в центре рассматриваемого пористого образца. Но для того, чтобы получить полную статистику прохождения молекул необходимо из каждой начальной позиции выпускать молекулы с различными скоростями. Причем весь набор скоростей должен в полном объеме представлять распределение Максвелла по компонентам скоростей.

На рис. 7 показаны начальные позиции прошедших атомов на двойной ячейке структуры, полученные в рамках набора базовой статистики прохождения, т.е. для случая, когда скорости всех атомов имели близкую к средне тепловой величину, а их направления были перпендикулярны слою.

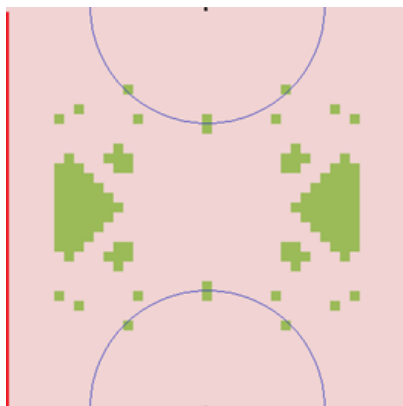


Рисунок 7. – Положения атомов гелия (темным цветом отмечены позиции прошедших структуру атомов, светлым – нет) на двоянной ячейке структуры.

Получившиеся результаты относительной проницаемости слоя по гелию в рамках полной статистики: $D(He) = 7,95\%$, по методу окон проницаемости: $D(He) = 8,2\%$. Проведенные расчеты показали, как в рамках базовой, так и полной статистики, молекулы метана через рассматриваемую туннельную структуру не проходят.

Заключение

В данной работе предложена схема расчета проницаемости и селективности углеродной туннельной структуры. Выделены минимальные наборы статистик, обеспечивающие приемлемую величину проницаемости. Предложен также инженерный подход по определению проницаемости, требующий лишь умеренного числа предварительных статистических расчетов.

Литература

1. Zhou M. Carbon nanotubes for sensing applications. / M. Zhou, Z. Wang, X. Wang. // Industrial applications of carbon nanotubes. – 2017. – Vol.129. – p. 150. – DOI: 10.1016/B978-0-323-41481-4.00005-8.
2. Eom K. Controllable viscoelastic behavior of vertically aligned carbon nanotube arrays. / K. Eom, et al. // Carbon. – 2013. – Vol. 65. – P. 305–314. – DOI: 10.1016/j.carbon.2013.08.030.
3. Sinnott S., Aluru N. Carbon nanotubes as nanoelectromechanical systems components. / S. Sinnott, N. Aluru. // Carbon Nanotechnology. – 2006. – P. 361–488. – DOI: 10.1016/B978-044451855-2/50016-43.
4. Soldano C. Production, properties and potential of grapheme. / C. Soldano, A. Mahmood, E. Dujardin. // Carbon. – 2010. – Vol. 48, №8. – P. 2127–2150. – DOI: 10.1016/j.carbon.2010.01.058.

5. Wang Y. Molecular dynamics study on water desalination through functionalized nanoporous grapheme. / Y. Wang, Z. He, K.M. Gupta, Q. Shi, R. Lu. // Carbon. – 2017. – Vol. 116. – P. 120–127. – DOI: 10.1016/j.carbon.2017.01.099.

6. Bubenchikov A. M. The effect of graphene shape on its ability to separate gases. / Bubenchikov A. M., et al. // Russian Physics Journal. – 2016. – Vol. 58, №12. – P. 1711–1719. – DOI: 10.1007/s11182-016-0706-y.

Бубенчиков Алексей Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра ММФ ТГУ, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36 к. 2, тел.: +7 913 110-97-16

Бубенчиков Михаил Алексеевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики Национального исследовательского Томского государственного университета, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36 к. 2, тел.: +7 903 955-59-16, e-mail: michael121@mail.ru

Мамонтов Дмитрий Владимирович, аспирант кафедры теоретической механики Национального исследовательского Томского государственного университета, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36 к. 2, тел.: +7 952 152-64-10, e-mail: oregaore@mail.ru

Челнокова Анна Сергеевна, аспирант кафедры теоретической механики Национального исследовательского Томского государственного университета, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36 к. 2, тел.: +7 913 879-49-11, e-mail: smolina-nyuta@mail.ru

Bubenchikov Alexey Mikhailovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Regional Scientific and Educational Mathematical Center MMF TSU

Bubenchikov Mikhail Alekseevich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, National Research Tomsk State University

Mamontov Dmitry Vladimirovich, post-graduate student of the Department of Theoretical Mechanics, National Research Tomsk State University

Chelnokova Anna Sergeevna, post-graduate student of the Department of Theoretical Mechanics, National Research Tomsk State University

© *М. А. Бубенчиков, А. В. Лебедев, С. В. Орлов, А. В. Половко,
В. А. Потеряева, Д. А. Промзелева, А. А. Тайлашев*

ДВИЖЕНИЕ МОЛЕКУЛ КАРБИНА ЧЕРЕЗ УГЛЕРОДНУЮ НАНОТРУБКУ И ПОРЫ В ГРАФЕНЕ¹

Аннотация. В работе рассмотрено движение многоатомной молекулы карбина через нанотрубку и поры в графене (в виде двух удаленных углеродных циклов). Такого рода движение можно разложить на две части: поступательное перемещение вместе с центром масс и вращательное движение вокруг него. Для каждой перемещающейся молекулы уравнения движения содержат шесть скалярных уравнений: три для проекций скорости центра масс и три для проекций вектора угловой скорости на подвижные (связанные с молекулой) оси координат. Эти шесть дифференциальных уравнений замыкаются еще тремя дифференциальными кинематическими равенствами, определяющими проекции скорости центра масс молекулы через его координаты, и тремя скалярными дифференциальными соотношениями для проекций угловой скорости и углов Эйлера. Полученная таким образом замкнутая система двенадцати уравнений первого порядка интегрируется с использованием схемы Рунге-Кутты четвертого порядка точности. Выполненные расчеты позволяют получить статистические данные по прохождению вытянутых молекул через нанотрубку или поры графена.

Ключевые слова: молекулярная динамика, нанотрубки, потенциал взаимодействия, пористый графен, проницаемость, разделение газов, селективность разделения метан-гелиевой смеси.

© *М. А. Bubenchikov, A. V. Lebedev, S. V. Orlov, A. V. Polovko,
V. A. Poteryaeva, D. A. Promseleva, A.A. Tailashev*

MOVEMENT OF CARBIN MOLECULES THROUGH CARBON NANOTUBE AND GRAPHENE PORES

The article discusses the motion of a polyatomic carbene molecule through a nanotube and pores in graphene (in the form of two remote carbon cycles). This kind of motion can be decomposed into two parts: translational movement with the center of mass and rotational motion around it. The equations of motion for each moving molecule contain

¹ Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России (госзадание №1.12877.2018/12.1).

six scalar equations: three for the center of mass velocity projections and three for the angular velocity vector projections onto the moving coordinate axes (associated with the molecule). These six differential equations are closed by three more differential kinematic equations that determine the projections of the velocity of the molecule's center of mass through its coordinates, and three scalar differential relations for the angular velocity projections and Euler angles. The thus obtained closed system of twelve first-order equations is integrated using the Runge-Kutta scheme of the fourth order of accuracy. The performed calculations make it possible to obtain statistical data on the passage of elongated molecules through a nanotube or pores of graphene.

Keywords: molecular dynamics, nanotubes, interaction potential, porous graphene, permeability, gas separation, selectivity of methane-helium mixtures separation.

Введение

Детальное рассмотрение задачи взаимодействия многоатомной молекулы со сложной системой наноразмерных фрагментов приводит к необходимости учета всех атомных взаимодействий с внешними элементами системы, которые генерируют вращение молекулы в стесненном пространстве пористой структуры [1-2]. Следует отделить задачу поступательного перемещения молекулы от ее вращения около собственного центра масс, хотя бы для целей упрощения рассмотрения общей ситуации [3].

1. Поступательное движение молекулы вместе с центром масс

Взаимодействие молекул с нанопористыми структурами, состоящих из тех или иных фрагментов можно представить как взаимодействие системы атомов, входящих в молекулу с теми же фрагментами структуры. Такой подход является простым как при теоретическом описании, так и в практической реализации. Архитектура расположения атомов известна для каждой молекулы. Поэтому многоатомную молекулярную систему удобно рассматривать как недеформируемую стержневую конструкцию, в узлах которой сосредоточена основная масса молекулы, а сами стержни моделируют устойчивые химические связи. При этом тепловые колебания атомов составляют не более 10% от межатомных расстояний.

В результате, для такой динамической системы, уравнение движения центра масс многоатомной молекулы можно записать следующим образом:

$$m \frac{dv_C}{dt} = - \sum_{j=1}^{N_p} \sum_{k=1}^S \text{grad} U(r_{jk}), \quad (1)$$

где m – масса молекулы, v_C – скорость центра масс перемещающейся молекулы, S – число атомов в молекуле, N_p – количество атомов,

составляющих структуру исследуемого пористого материала, $r_{jk} = \sqrt{(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2 + (z_j - z_k)^2}$, $U(r)$ – потенциал атом-атомного взаимодействия, зависящий от сорта атомов (в нашем случае углерод-углеродное взаимодействие).

Теорема о движении центра масс (центра инерции) системы звучит следующим образом: произведение массы системы на ускорение её центра масс равно геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил.

Как видим из (1), движение центра масс многоатомной молекулы определяется воздействием на каждый атом молекулы всех атомов структуры.

Если рассматривается проникновение молекулы карбина, то в первом приближении ее можно представить как стержень с насаженными на него бусинками атомов углерода. Для описания движения любой молекулы можно использовать подход Эйлера, ставший классическим в случае рассмотрения движения тел в пространстве.

Согласно этому подходу положение тела наряду с тремя координатами центра масс определяется еще и тремя углами Эйлера. Следовательно, в общем случае наряду с уравнением (1) должны использоваться еще три скалярных уравнения для проекций вектора угловой скорости на подвижные, связанные с каркасной структурой молекулы оси координат (динамические уравнения Эйлера). Полученная таким образом система уравнений динамики дополняется связями проекций вектора мгновенной угловой скорости с углами Эйлера, получившими название кинематических соотношений Эйлера.

В случае проникновения пятиатомной молекулы метана через нанопоры потенциальное поле весьма грубо, но все-таки можно принять сферическим, поскольку в такой молекуле атомы водорода имеют весьма компактную укладку вокруг атома углерода, при этом все же следует считать разнесенными в пространстве, поскольку ближние взаимодействия молекулы метана будут реализовываться непосредственно через атомы водорода. Если принять, что повороты молекулы метана не так важны, и рассматривать ее движение как поступательное, то перемещение пирамидальной конструкции будет определяться уравнением (1). Однако в настоящей работе мы рассмотрим проникновение через поры в графене карбиновой нити. Уравнение движения центра масс необходимо дополнить кинематическими векторными соотношениями:

$$\frac{dr_C}{dt} = v_C. \quad (2)$$

Тогда система (1), (2) будет замкнутой и ее можно будет интегрировать численно.

Система (1), (2) должна интегрироваться со следующими начальными условиями:

$$t = 0, v_C = v_C^0, r_C = r_C^0. \quad (3)$$

Здесь r_C – радиус-вектор центра масс молекулы; v_C – скорость центра масс, индексом «0» отмечены величины, относящиеся к начальному моменту времени.

2. Вращение молекулы около центра масс

Силы ван-дер-ваальсовского притяжения действуют на сравнительно больших расстояниях. Однако при сближении молекул с поверхностными фрагментами структуры на каждый атом молекулы начинают действовать мощные силы отталкивания. Из-за несимметричности воздействий молекула начинает вращаться. Величины силовых воздействий на отдельный атом молекулы определяются как суммы градиентов парных потенциалов взаимодействия отмеченных атомов с атомами углеродной структуры. На основе этих данных рассчитываются вращающие моменты и далее применяется теорема Эйлера.

Молекула карбина имеет вид плоской зигзагообразной цепочки атомов углерода

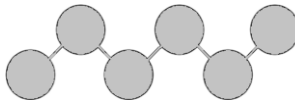


Рисунок 1. – Общий вид молекулы карбина.

Расстояние между центрами соседних атомов углерода 0,142 нм. Углы, образуемые тройкой атомов по 120°. Для удобства в молекуле карбина возьмем нечетное количества атомов углерода. Ось ζ направим по оси зигзагообразной цепочки, ось η в плоскости цепочки, а ось ξ перпендикулярно этой плоскости, тогда:

$$\zeta_k = -\left(\frac{S-1}{S}\right) \cdot 0,142 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0,142 \cdot (k-1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (4)$$

$$\eta_k = \frac{0,142}{4} \cdot (-1)^k, \quad (5)$$

$$\xi_k = 0. \quad (6)$$

Здесь k – номер атома в молекуле, S – количество атомов в молекуле карбина. Для стержневой модели молекулы карбина координаты отдельных атомов найдутся по следующим формулам:

$$x_k = x_C + \zeta_k \sin \varphi \sin \theta, \quad (7)$$

$$y_k = y_C + \zeta_k \cos \psi \sin \theta, \quad (8)$$

$$z_k = z_C + \zeta_k \cos \theta. \quad (9)$$

3. Результаты расчетов прохождения молекулы карбина через открытую нанотрубку и графен

На рис. 2-4 показаны результаты расчетов движения линейных молекул карбина взаимодействующих с отдельно стоящей нанотрубкой. Во всех случаях, изначально, молекула движется поступательно, т.е. не имеет никаких вращений, включая собственное вращение. Рисунок 2 относится к случаю движения молекулы имеющей 25 атомов углерода, рисунок 3 относится к случаю движения короткой молекулы имеющей 9 атомов углерода. Во всех случаях (рис. 2,3) из числа здесь рассмотренных, молекула направлена в центр нанотрубки и изначально двигалась по её оси. Именно поэтому траектории концов молекулы, при её движении внутри трубки, и на участке до трубки совпадают. После выхода из трубки молекула теряет устойчивость, что выражается в том, что движение перестает быть поступательным. Возникает вращение молекулы вокруг всех главных центральных осей инерции молекулярной структуры.

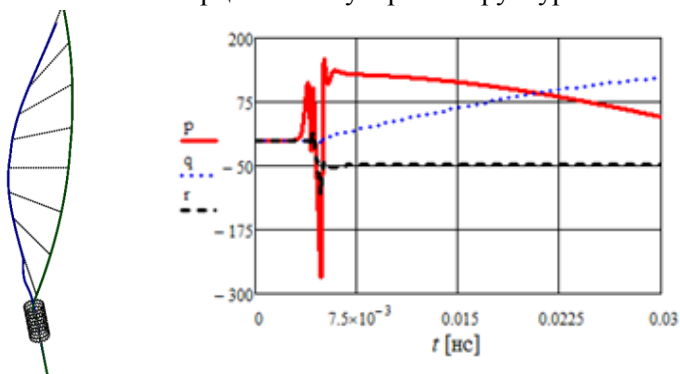


Рисунок 2. – Положение молекулы карбина при взаимодействии с трубкой (слева) и проекции угловых скоростей на подвижные оси (справа).

Это вращение индуцируется потенциальным полем межатомных взаимодействий. При этом собственное вращение остаётся постоянным в течение всего периода взаимодействия с трубкой. Постоянной в этой

период является и полная энергия вращательного движения. Таким образом, с одной стороны проходя по осевой линии трубки молекула теряет устойчивость, с другой за счёт генерации собственного вращения происходит авто стабилизация движения (см. рис. 2).

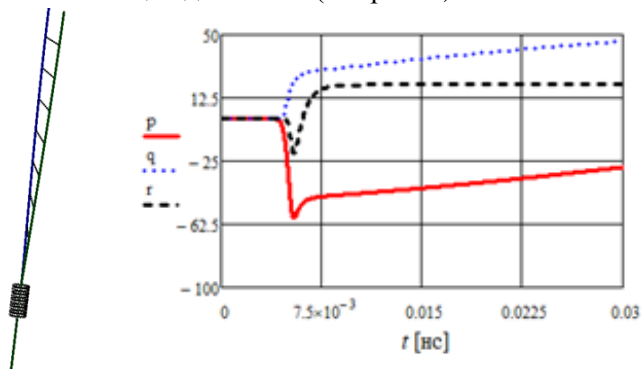


Рисунок 3. – Короткая молекула карбина после выхода из трубки (слева) и проекции угловых скоростей на подвижные оси (справа).

На рис. 4 показан случай отражения 9 атомной молекулы карбина от края углеродной трубки. В отличие от предыдущего случая мы наблюдаем здесь большую потерю устойчивости и генерацию более интенсивного собственного вращения. В третьем варианте молекула из девяти атомов была направлена в край углеродной нанотрубки.

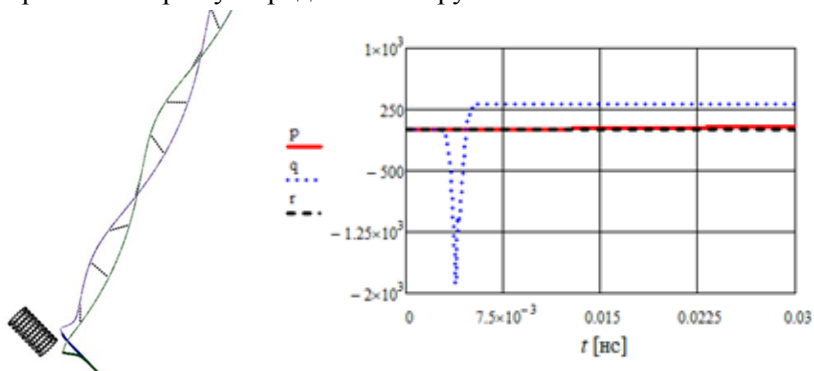


Рисунок 4. – Положение молекулы карбина после столкновения с трубкой (слева) и проекции угловых скоростей на подвижные оси (справа).

В этом случае появилось незначительное собственное вращение, которым в сущности можно пренебречь, а сгенерирована лишь одна

компонента угловой скорости молекулы, поэтому вращательное движение можно считать простым, не имеющим автостабилизации.

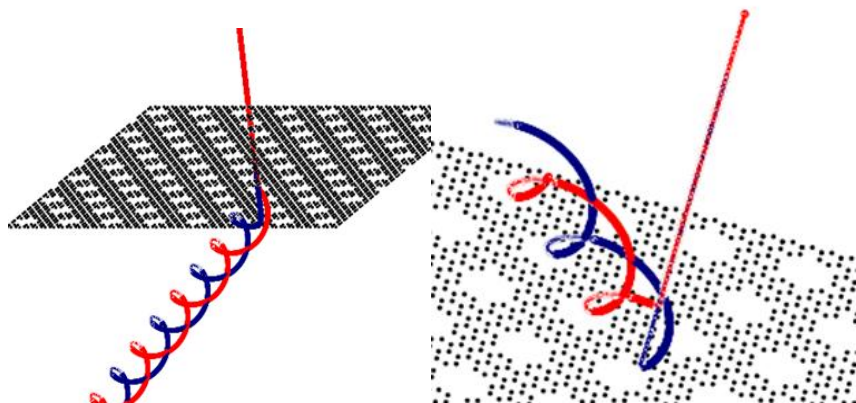


Рисунок 5. – Прохождение молекулы карбина через сверхтонкий слой графена (слева) и отражение молекулы карбина от графена (справа).

На рис. 5 показано проникновение длинной молекулы углерода через сверхтонкий слой пористого графена. Как показывают вычисления, в момент прохождения через структуру карбиновый стержень приобретает вращение во всех направлениях. Здесь же приведены траектории концов карбинового стержня при его отражении от пористой графеновой пластины. Вращение генерируется уже при подходе к поверхности. Расчетная частота генерируемых вращений в обоих случаях $10^{11} \div 10^{12} \text{ c}^{-1}$.

Заключение

Применение теории Эйлера, разработанной первоначально для движения абсолютно твёрдых тел в пространстве к динамике несферических молекул позволяет получить новый инструмент при наборе статистики по прохождению молекул сложной формы через нанопористые структуры. Проведенные расчеты показали, что при прохождении стержневых молекул карбина через открытую нанотрубку часть кинетической энергии поступательного движения переходит в энергию вращений. Причем прохождение молекулы через трубку всегда заканчивается автостабилизацией движения, т.е. генерацией значительного собственного вращения. Несквозные взаимодействия молекул с трубкой заканчиваются отражением с вращением без автостабилизации.

Расчетами показано, что ближайшие к поверхности мембраны атомы длинной молекулы реагируют на дальнедействующие силы притяжения и молекула, если ее энергия вращения не слишком большая, часто поворачивается своей вершиной, что способствует достаточно свободному вхождению в простое отверстие в графене. При прохождении через пористый графен, а так же при отражении от него генерируется одна частота вращений, включая собственное вращение.

Литература

1. Мартинсон Л.К., Смирнов Е.В. Квантовая физика: учеб. пособие. Москва : Изд-во МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2004. – 496 с.
2. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики: в двух томах. Т. 2. Москва : Книга по Требованию, 2012. – 942 с.
3. Бубенчиков М.А. Об идеальных колебаниях нанотрубок в естественном магнитном поле / М. А. Бубенчиков // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2010. – №2(10) – С. 38–44.

Бубенчиков Михаил Алексеевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики Национального исследовательского Томского государственного университета, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36 к.2, тел.: +7 903 955-59-16, e-mail: michael121@mail.ru

Лебедев Александр Вячеславович, магистрант кафедры теоретической механики Национального исследовательского Томского государственного университета, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36 к. 2, тел.: +7 913 108-77-48, e-mail: a.lebedev@gtt.gazprom.ru

Орлов Станислав Владимирович, магистрант кафедры теоретической механики Национального исследовательского Томского государственного университета, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36 к. 2, тел.: +7 913 813-69-69, e-mail: orlovesv@mail.ru

Половко Андрей Львович, магистрант кафедры теоретической механики Национального исследовательского Томского государственного университета, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36 к. 2, тел.: +7 905 089-60-69, e-mail: SNAB70@list.ru

Потеряева Валентина Александровна, аспирант кафедры теоретической механики Национального исследовательского Томского государственного университета, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36 к.2, e-mail: valentina.poteryaeva@gmail.ru

Промзелева Дарья Алексеевна, студент кафедры теоретической механики Национального исследовательского Томского государственного университета, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36 к. 2, e-mail: dashka140796@mail.ru

Тайлашев Анатолий Алексеевич, магистрант кафедры теоретической механики Национального исследовательского Томского государственного университета,

634050, г. Томск, пр. Ленина, 36 к. 2, тел.: +7 906 959-52-32,
e-mail: tailashev@gmail.ru

Bubenchikov Mikhail Alekseevich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, National Research Tomsk State University

Lebedev Alexander Vyacheslavovich, master's degree student of the Department of Theoretical Mechanics, National Research Tomsk State University

Orlov Stanislav Vladimirovich, master's degree student of the Department of Theoretical Mechanics, National Research Tomsk State University

Polovko Andrey Lvovich, master's degree student of the Department of Theoretical Mechanics, National Research Tomsk State University

Poteryaeva Valentina Aleksandrovna, post-graduate student of the Department of Theoretical Mechanics, National Research Tomsk State University, 634050, Tomsk, Lenin ave., 36, 2, e-mail: valentina.poteryaeva@gmail.ru

Promzeleva Daria Alexeevna, student of the Department of Theoretical Mechanics, National Research Tomsk State University

Tailashev Anatoly Alekseevich, master's degree student of the Department of Theoretical Mechanics, National Research Tomsk State University

КЛЕТОЧНЫЕ АВТОМАТЫ В СИСТЕМЕ “MATHEMATICA”. КОМПЮТЕРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Аннотация. В данной статье рассматриваются вопросы реализации возможностей системы компьютерной алгебры “Mathematica” в процессе преподавания важнейшего раздела математики — дискретной математики. Огромное методологическое значение в реализации дискретной линии в обучении математике играет основной вывод о том, что владение идеями и методами дискретной математики стало неотъемлемой частью содержания подготовки специалиста, умело использующего в своей профессиональной деятельности достижения современной математической и информационной культуры. Особенный интерес вызывает исследование динамики поведения дискретных динамических систем на примере так называемых клеточных автоматов. Важная особенность клеточных автоматов заключается также и в том, что их поведение можно наблюдать визуально. Приведен пример простой программы реализации простого клеточного автомата средствами системы “Mathematica”.

Ключевые слова: система компьютерной алгебры “Mathematica”, дискретная математика, пакет расширения DiscreteMath`Combinatorica, преподавание математики, язык высокого уровня.

© Т. В. Burzalova, A. V. Daneev

CELLULAR AUTOMATA IN "MATHEMATICA" SYSTEM. THE COMPUTER EXPERIMENT

Abstract. The article deals with the possibilities of "Mathematica" computer algebra system in the process of teaching discrete mathematics as the most important division of mathematics. Acquirement of ideas and methods of discrete mathematics has become an integral part of the content of training specialists, who are able to use the achievements of modern mathematical and information culture in their professional activity. The study of the behavior dynamics of discrete dynamical systems on the example of so-called cellular automata is of particular interest. An important feature of cellular automata is that their behavior can be observed visually. We give an example of the simple program for implementing a cellular automaton by means of "Mathematica" system.

Keywords: "Mathematica" computer algebra system; discrete mathematics; "Discrete Math Combinatorica" expansion package; teaching mathematics; high-level language.

Всем понятна роль эксперимента в преподавании и в исследовании естественных наук: физики, химии, биологии, и т. д. Решение большинства школьных задач по математике, по существу есть тоже форма эксперимента. Эта форма задач позволяет учащемуся закрепить и «прочувствовать» теоретический материал по данной теме, выдвигать различные гипотезы, и затем их доказывать или опровергать, строя конкретный контрпример.

При исследовании, как правило, не всегда можно получить аналитическое и даже качественное решение математической задачи. Самый яркий пример – нахождение простых чисел. И здесь на помощь приходит численный эксперимент на компьютере для решения уравнений или исследования динамики дискретных систем. Дальнейший анализ полученных данных эксперимента, еще даже на этапе их визуализации, позволяет установить некоторые закономерности и характеристики. Это, в свою очередь, стимулирует теоретические исследования данной задачи.

Результат эксперимента иногда не только не подтверждают ожидаемого, но вызывает удивление. Это заставляет пересмотреть теоретическую модель. Тому много примеров в естественных науках: эксперимент Майкельсона-Морли по определению скорости Земли по отношению к Солнцу, эксперименты с элементарными частицами, опыты Менделя в биологии, что привело к созданию специальной теории относительности, квантовой механики, генетики.

Предлагаемая далее тема для проведения компьютерных экспериментов, вместе с универсальностью и мощностью, и с простотой программирования, предоставляемых средствами математических пакетов, таких как Mathematica, дают уникальные возможности в образовании. Поскольку эти эксперименты касаются большого диапазона как научных, так и прикладных областей их применения, и не требуют предварительных научных и технических знаний. Полагается, что они могут служить хорошим базисом для ознакомления с широким спектром научных направлений. Действительно, ознакомление и понимание базисных идей приводит к легкому усвоению многих, традиционно изучаемых предметов науки, также как и обучение арифметике при помощи многочисленных примеров в начальной школе.

Предложим учащимся ознакомиться с некоторыми примерами, которые, в дальнейшем, надеемся, помогут им ознакомиться с понятиями и проблемами некоторых дисциплин математики и естествознания. Конечно, многие примеры, с которыми, желательно должны быть они ознакомлены в процессе обучения, трудно, а иногда просто невозможно им представить, имея на вооружении только бумагу и ручку или мел. Но с повсеместным

внедрением в образовательный процесс компьютерной техники, и имея в распоряжении такие программы, как универсальные математические пакеты (Mathematica, Maple, Mathlab, и др.), удобные как для моделирования так и для дальнейшего исследования объектов изучения, можно «поменять местами телегу с кобылой». Действительно, гораздо легче понять и объяснить некоторую тему на примерах, имея возможности для их демонстрации, чем усугублять у некоторых обучаемых непонимание предмета изучения, и конце концов, его полное неприятие. Для компьютерного моделирования и проведения компьютерных экспериментов мы выбрали компьютерную систему Mathematica, с ее встроенными развитыми средствами обработки данных, представленных списками произвольной структуры и богатейшим набором математических функций, от элементарных до функций нахождения решений систем различных уравнений.

Исследуем динамику поведения дискретных динамических систем на примере так называемых клеточных автоматов. Важная особенность клеточных автоматов заключается также и в том, что их поведение можно наблюдать визуально.

Клеточный автомат состоит из ряда черных и белых клеток. На каждом шаге к каждой клетке применяется определенное *правило*, которое определяет цвет текущей клетки в зависимости от ее цвета и цвета непосредственно соседних с ней слева и справа клеток на предыдущем шаге. Всего есть 256 таких правил. Все клетки образуют, так называемую, решетку клеточного автомата. Решетки могут быть разных типов и отличаться как по форме клеток, так и по размерности.

В общем случае клеточные автоматы обладают следующими свойствами.

1. Свойство синхронности. Клетки меняются одновременно после вычисления нового состояния каждой клетки решетки.

2. Свойство однородности. Нельзя отличить никакие два места на решетке по ландшафту.

3. Свойство локальности. Только соседние клетки могут влиять на данную клетку.

4. Свойство конечности. Множество всех состояний клетки является конечным.

Пример 1. (Простой трехцветный клеточный автомат).

Посмотрим на поведение клеточных автоматов с тремя, а не с двумя цветами клеток, добавив третий цвет, допустим серый.

В этом случае есть $3^3 = 27$ различных сочетаний значений трех соседних клеток, и правило может сопоставлять каждому сочетанию одно из трех

значений цветов. Таким образом, получаем $3^{27} = 7\,625\,597\,484\,987$ правил. Ограничимся для простоты «суммирующими» правилами.

Идея этих правил состоит в том, что новый цвет клетки на каждом шаге зависит от среднего значения суммы значений клетки и ее непосредственных соседей на предыдущем шаге. Пусть 0 представляет белый, 1 – серый и 2 – черный цвет. Тогда получаем семь различных средних значений: 0, 1/3, 2/3, 1, 4/3, 5/3, 2. Каждому из них сопоставляется один из трех цветов и, таким образом, мы имеем $3^7 = 2187$ различных правил. Правило можно представить таблицей, например

2	5/3	4/3	1	2/3	1/3	0
1	0	0	1	2	1	0

где во второй строке определены новые значение клетки в зависимости от средних значений. Интерпретируя вторую строку как запись числа в троичной системе исчисления, получаем десятичный код данного правила равный 777.

Ниже приведены некоторые примеры эволюции данного трехцветного автомата.

Реализация простого трехцветного клеточного автомата.

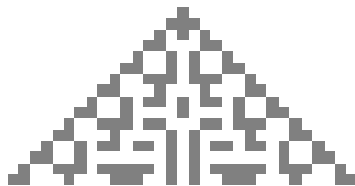
Введем следующие функции:

```
TotalisticRule[num_Integer]:=IntegerDigits[num,3,7]
CAStep[rule_List,a_List]:=rule[[-1-(RotateLeft[a]+a+RotateRight[a])]]
CAEvolveList[rule_,init_List,t_Integer]:=NestList[CAStep[rule,#]&,init,t]
CAGraphics[history_List]:=Graphics[Raster[1-Reverse[history]],AspectRatio -
> Automatic]
```

Умножим значения элементов таблицы на 0.5, так как значения цветов у нас кодируется числами 0, 1, 2, а для корректного их изображения, они должны принадлежать диапазону [0, 1].

```
Show[CAGraphics[0.5 CAEvolveList[TotalisticRule[777], CenterList[31],15]]];
```

Получим:



Оказывается, у учащихся возникают вопросы философского, математического, психологического содержания. Возможно ли, что

окружающий нас мир складывается, начиная с простого состояния? Что будет с ковром Серпинского, если процесс предположить бесконечно? Есть ли предел развитию воображения?

Эти вопросы служат поводом к серьёзным разговорам о порядке и хаосе, о мере и мощности множеств, о возможностях человеческого разума. Исходя из этого интереса, мы организовали элективный курс «Порядок из хаоса» (элементы философии И. Пригожина), по фрактальной геометрии, по теории числовых множеств. Приведём пример, относящийся к числовым множествам. Мы вводим определение счётного множества и рассматриваем простейшие свойства счётных множеств: счётность объединения конечного и счётного множеств, счётность объединения конечного числа счётных множеств, счётность объединения счётного множества счётных множеств, счётность множества рациональных чисел, несчётность множества действительных чисел. Вводим понятие мощности множеств, рассматриваем существование сколько угодно больших мощностей, вводим понятие множества мощности континуума и шкалу мощностей. Рассматриваем «континуум – проблему» и подход к её решению. Затем вводим понятие канторова совершенного множества – одномерный аналог ковра Серпинского. Ставится вопрос о его мере, что приводит к нахождению суммы бесконечной геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots$$

Отсюда делается вывод о том, что мера канторова совершенного множества равна нулю, однако, как известно, его мощность – континуум. Это обстоятельство вызвало особый интерес у учащихся.

Аналогичные вопросы рассматриваются и для ковра Серпинского, что связано с бесконечно убывающей геометрической прогрессией:

$$\frac{1}{9} + \frac{8}{81} + \frac{64}{3^6} + \dots$$

Так компьютерный эксперимент приводит к мотивации учебной деятельности и развитию воображения – источника мышления.

Литература

1. Бурзалова Т.В. Учебно-методический комплекс по решению задач дискретной математики с использованием компьютерной системы «Mathematica». Ч. 2. – Улан-Удэ : Изд-во БГУ, 2007. – 180 с.
2. Бурзалова Т.В., Данеев А.В. Творческое развитие будущего учителя математики и информатики. – Изд-во БГУ, Улан-Удэ, 2008. – 189 с.
3. Перминов, Е.А. Методические основы обучения дискретной математике в системе «школа – вуз». / Е. А. Перминов. – Екатеринбург: изд-во РГППУ, 2006.

Бурзалова Татьяна Васильевна, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующая кафедрой прикладной математики Бурятского государственного университета, 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5, e-mail: burzalova@mail.ru

Данеев Александр Васильевич, доктор технических наук, доцент кафедры информационных технологий Бурятского государственного университета, 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5, e-mail: daneev@mail.ru

Burzalova Tatyana Vasilyevna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Buryat State University

Daneev Alexander Vasilyevich, Doctor of Technical Science, Associate Professor, Buryat State University

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ДИНАМИКА ИЗОБАРИЧЕСКИХ И АДИАБАТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ¹

Аннотация. Классическая молекулярная динамика позволяет довольно просто моделировать изохорические процессы изменения параметров состояния в молекулярных системах. Проведение компьютерных экспериментов, имитирующих процессы изобарического изменения температуры, всестороннего и линейного расширения (в том числе адиабатического) требует проведение более сложных процедур корректировки параметров состояния моделируемой системы. Примеров таких исследований в литературе практически нет. В данной работе предложены алгоритмы МД моделирования изобарического охлаждения и адиабатического расширения в системах со сферически симметричным потенциалом межчастичного взаимодействия и приемов расчета термодинамических свойств системы по результатам моделирования. Представлены результаты расчета изотермической и адиабатической сжимаемости, изобарической теплоемкости по данным компьютерных экспериментов. Зависимость этих величин от температуры отражают известные данные о фазовых переходах в молекулярных системах. Предложенные методы моделирования могут быть использованы для решения задач синтеза новых нано- и метаматериалов.

Ключевые слова: изотермическая и адиабатическая сжимаемость, молекулярная динамика, изопроцессы, фазовые переходы

© *E. I. German, Sh. B. Tsydyпов*

MOLECULAR DYNAMICS OF ISOBARIC AND ADIABATIC PROCESSES

Abstract. Classical molecular dynamics makes it possible to model quite extensively the isochoric processes of changing the state parameters in molecular systems. Carrying out computer experiments simulating the processes of isobaric temperature variation and volume variation (including adiabatic) requires more complicated procedures for adjusting the parameters of the state of the simulated system. There are practically no examples of such studies in the literature. In this paper, we propose MD algorithms for modeling isobaric cooling and adiabatic expansion in systems with a spherically symmetric interparticle interparticle interaction potential and methods for calculating the thermodynamic properties of a system based on simulation results. The results of

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Бурятия в рамках научного проекта № 18-42-030002 p_a.

calculation of isothermal and adiabatic compressibility, isobaric heat capacity are presented according to computer experiment data. Dependence of these values on temperature reflects the data phase transitions in molecular systems. The proposed modeling methods can be used to solve the problems of synthesis of new nano- and metamaterials.

Keywords: isothermal and adiabatic compressibility, molecular dynamics, isoprocesses, phase transitions

Компьютерное моделирование термодинамических процессов, протекающих с различной интенсивностью, может решать ряд задач синтеза наноструктур и метаматериалов. Так, например, с помощью компьютерного моделирования можно подобрать оптимальные условия для процесса закалки вещества с целью получения аморфной фазы с включениями кластеров кристаллов заданных размеров.

Классическая молекулярная динамика позволяет довольно просто моделировать процессы изохорного охлаждения (или нагрева) в молекулярных системах. Это достигается путем пропорционального изменения кинетической энергии частиц системы или путем введения стохастических граничных условий. Проведение компьютерных экспериментов, имитирующих процессы изобарного изменения температуры или расширения (в том числе адиабатного) подразумевает более сложные процедуры корректировки параметров моделируемой системы, поэтому примеры таких исследований в литературе встречаются крайне редко[1].

В работе представлено описание методик проведения моделирования изобарного охлаждения и адиабатного расширения систем частиц и приемов расчета термодинамических свойств по результатам моделирования.

Для исследования выбрана система из 8000 Леннард-Джонсовых частиц с параметрами потенциала $\epsilon/k_B=119.8$ К, $\sigma=3.46$ Å, соответствующим модели взаимодействия атомов аргона. Инициализация системы проводилась в газообразной фазе.

Для моделирования процесса изобарного охлаждения мы проводили пропорциональное изменение скоростей частиц системы каждые 50 итераций моделирования [2], при этом после приведения скоростей производилось изменение размеров ячейки моделирования и расстояний между частицами на коэффициент μ , описанный в [1] как коэффициент приведения линейных размеров при моделировании NPT-ансамбля.

$$\mu = 1 + \frac{P(V) - P}{3P(V) + \sum_{i < j} \Phi_{ij} r_{ij}^2 / 3V}. \quad (1)$$

Проведение экспериментов по изобарному охлаждению открывает возможность расчета таких термодинамических параметров, как изобарная теплоемкость C_p и изотермическая сжимаемость β_T которые, в свою очередь, позволяют получить структурные и упругие параметры системы (C_p и β_T могут быть использованы при расчете скорости звука [3]).

Теплоемкость C_p нами получена путем дифференцирования энтальпии по полученной фазовой траектории

$$C_p = \left(\frac{dH}{dT} \right)_p, \quad (2)$$

где H - энтальпия системы, которая вычислялась по формуле

$$H = E + PV. \quad (3)$$

Полученная зависимость изобарной теплоемкости представлена на рисунке 1, из которого видно, что наши расчетные данные хорошо согласуются с литературными данными [4].

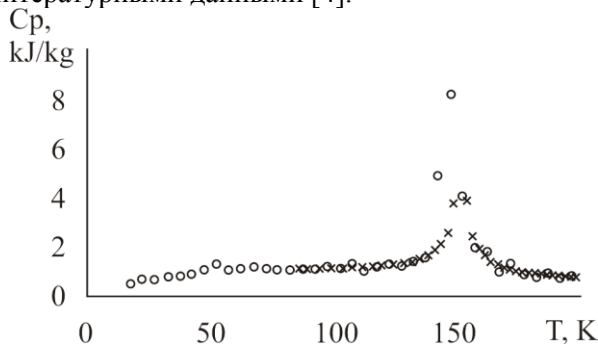


Рисунок 1. – Теплоемкость C_p аргона при давлении 5 МПа: о - расчеты, полученные по результатам компьютерного моделирования охлаждения системы аргона с интенсивностью 10^9 К/с, + - литературные данные [4].

Для расчета изотермической сжимаемости нами были получены две изобары с близкими значениями давления. Значение β_T определялась по разностям плотностей на фазовых кривых

$$\beta_T = \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\rho_{P1} - \rho_{P2}}{P_1 - P_2}. \quad (4)$$

На рис. 2 и 3 представлены результаты расчета сжимаемости по данным моделирования равновесного и неравновесного охлаждения соответственно.

Показательными являются температурные зависимости сжимаемости, полученные при различных скоростях охлаждения. Так, для низкой скорости охлаждения (рис. 2) хорошо выделяются области сжимаемого газа, слабо сжимаемой жидкости, кристалла. При быстром охлаждении со скоростью 10^{12} К/с (рис 3) сложно заметить характерные области стабильных фаз, но в целом прослеживается динамика изменения температурной зависимости сжимаемости (резкое изменение в окрестностях точки ~ 90 К и в окрестностях ~ 30 К) при переходе в более плотные неравновесные фазы.

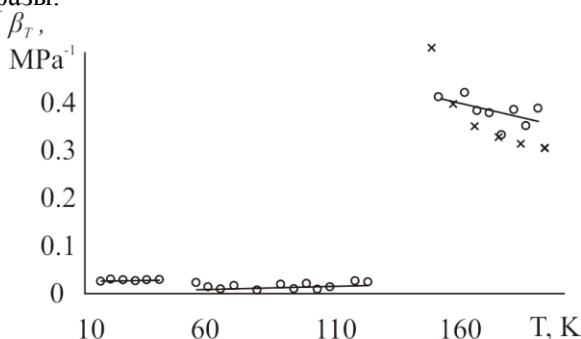


Рисунок 2. – Сжимаемость β_T аргона при давлении 4 МПа: о - расчеты по результатам компьютерного моделирования охлаждения системы частиц аргона с интенсивностью 10^9 К/с, + - литературные данные [5]

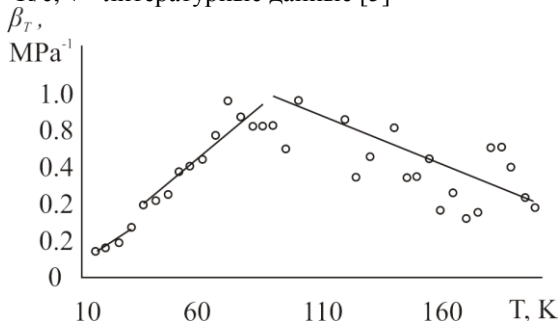


Рисунок 3. – Сжимаемость β_T аргона при давлении 4 МПа по результатам компьютерного моделирования охлаждения системы частиц аргона с интенсивностью 10^{12} К/с.

Нами также предложена методика моделирования процесса адиабатного расширения. Для этого через заданное количество итераций производилось изменение размеров ячейки моделирования и расстояния между частицами на величину dV характеризующую скорость расширения системы, после чего производилась корректировка скоростей частиц системы на множитель k выведенный из условия постоянства энтропии

$$k = \sqrt{\frac{\langle E_1 \rangle - \langle U_2 \rangle - \frac{dV}{2} \left(\langle P_1 \rangle - \frac{\rho}{3N} \left\langle \sum_i \sum_{j>i} r_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial r_{ij}} \right\rangle \right)}{\left(1 + \frac{\rho}{3N} \right) \langle E_{k2} \rangle}}. \quad (5)$$

Безусловно, фазовая траектория участков усреднения, последующих непосредственно после актов изменения объема, будет отлична от траектории адиабатического процесса, но дискретные состояния после корректировки кинетической энергии будут соответствовать адиабате.

Стоит отметить, что данная методика пригодна для моделирования медленного расширения, так как в случае больших значений dV выражение (5) перестает отвечать требованиям корректности численного интегрирования.

Данные моделирования процесса адиабатного расширения дают возможность рассчитать адиабатическую сжимаемость

$$\beta_s = -\frac{1}{V} \left(\frac{dV}{dP} \right)_s. \quad (6)$$

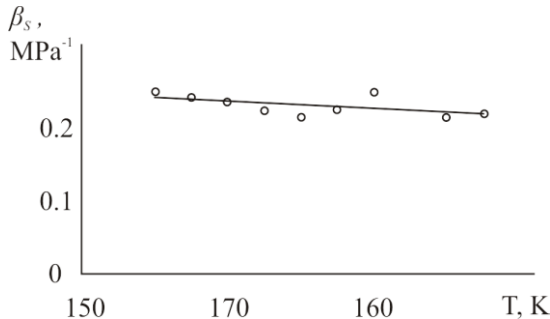


Рисунок 4. – Сжимаемость β_s аргона при давлении 4 МПа по результатам компьютерного моделирования.

Рассчитанные нами значения адиабатической сжимаемости представлены на рис. 4 и соответствуют известным данным о качественной зависимости этой величины от температуры [3].

Предложенные методы моделирования термодинамических процессов в молекулярных системах хорошо себя показали для систем с парным потенциалом взаимодействия. При использовании этих методик для имитации процессов закалки, сжатия и растяжения более сложных веществ и соединений может открыться большое поле для исследования условий синтеза наноструктур с заданными свойствами.

Литература

1. Rapaport D.C. The art molecular dynamics simulation. – Cambridge : Cambridge univ. press, cop., 2004. – 605 p.
2. German E. I. (2016) Molecular systems modeling program MDDX11. Certificate No. 20116617783 of the computer program state registration (Moscow: Federal Institute of Industrial Property)
3. Tsydypov Sh.B., German E.I., Parfenov V.N. Simulation of the molecular dynamics of the evolution of argon structural characteristics in the area of glass transition // Glass Physics and Chemistry. – 2017. – V.43. - № 1. – pp. 43-47.
4. Thermophysical Properties of Fluid Systems [Electronic resource]. – URL: <http://webbook.nist.gov/chemistry/fluid/> (дата обращения: 15.10.2016)
5. Alexandrov A.A., Orlov K.A., Ochkov V.F. (2012) Interactive reference book "Properties and processes of working bodies and materials of nuclear energy" (Moscow: National Research Univercity Press)

Цыдыпов Шулун Балдоржиевич, доктор технических наук, доцент кафедры общей и теоретической физики, Бурятский государственный университет, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а, e-mail: shulun52@gmail.com.

Герман Евгений Иванович, старший преподаватель кафедры общей и теоретической физики Бурятского госуниверситета, инженер лаборатории геосейсмики, Геологический институт СО РАН, г. Улан-Удэ, ул. Сахьяновой, 9а, e-mail: net-admin@list.ru

Tsydipov Shulun Baldorzhievich, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Buryat State University

Herman Yevgeny Ivanovich, Senior Lecturer, Buryat State University

© *T. G. Darmaev, S. V. Kalashnikov, A. V. Nomoev*

МЕТОД ХЛАДНИ РАЗДЕЛЕНИЯ УЛЬТРАДИСПЕРСНЫХ ПОРОШКОВ

Аннотация. Известно, что нанодисперсные порошки являются конденсированной средой, одновременно обладающей свойствами жидкости и твердых тел. Причем свойства такой среды сильно зависят от размера частиц. Большинство методов производства нанопорошков дают продукт с очень широким распределением по размерам, что делает актуальным разделение порошков по размерам частиц. Ввиду очень малого размера и массы частиц нанопорошков известные методы разделения или применимы ограниченно, или неприменимы совсем. В данной работе рассмотрен акустический метод Хладни разделения ультрадисперсных порошков на колеблющейся пластине. Получены экспериментальные данные по эффективности разделения наночастиц диоксида кремния. На основе метода последовательных аппроксимаций уравнений Навье-Стокса для завихренности получены уравнения и граничные условия для колеблющихся пластин с учетом амплитуды до второго порядка. С помощью системы Mathematica получены аналитические решения и построены графики векторных полей скоростей для пластины бесконечной длины.

Ключевые слова: наночастицы, распределение по размерам, фракционирование, сепарация, уравнения Навье-Стокса, метод последовательных аппроксимаций, колеблющаяся пластина, поле скоростей.

© *T. G. Darmaev, S. V. Kalashnikov, A. V. Nomoev*

CHLADNI METHOD OF DIVISION OF ULTRADISPERSIBLE POWDERS

Abstract. It is known that nanodispersible powders are the condensed medium which at the same time have properties of liquid and solid bodies. And properties of such environment strongly depend on particle size. The majority of methods of production of nanopowders give a product with very wide distribution by the sizes that does relevant division of powders according to particle sizes. In view of very mesh size and mass of particles of nanopowders the known methods of division either are applicable restrictedly, or are inapplicable absolutely. In this work the acoustic Chladni method of division of ultradispersible powders on the fluctuating plate is considered. The experimental datas by efficiency of division of nanoparticles of dioxide of silicon are obtained. On the basis of a method of successive approximations of the equations of Navier-Stokes for a vorticity the equations and boundary conditions for the fluctuating plates taking into account amplitude to the second order are received. By means of the Mathematica system

analytical decisions are received and plots of vectors fields of speeds for a plate of the infinite length are constructed.

Keywords: nanoparticles, distribution by the sizes, fractionating, separation, Navier-Stokes equations, method of successive approximations, vibrating plate, fields of speeds.

Введение

Большинство методов производства нанопорошков дают продукт с очень широким распределением по размерам, что делает актуальным разделение порошков по размерам частиц. Ввиду очень малого размера и массы частиц нанопорошков известные методы разделения или применимы ограниченно, или не применимы совсем.

В 1787 г. немецкий физик Хладни показал, что при колебании пластины смычком частицы песка образуют самоорганизующие симметричные структуры. Было так же замечено, что более мелкие частицы песка скапливаются на пучности колебаний пластины. Физические причины распределений частиц по размерам связаны с потоками воздуха или другой среды, находящейся над пластиной. В последнее время появился интерес к данным потокам в рамках создания минивентиляторов в виде вибрирующих пластин бесконечной и конечной длин для микроэлектронных устройств, так, модели потоков газа получены в работе [1]. В работе [2] идея Хладни применяется в наномеханике для разделения наночастиц по размерам акустическими волнами разных частот, однако очень высоких и с малыми размерами пластины, что практически неприменимо.

В данной работе показана возможность разделения наночастиц на пластине сравнительно большого размера и с невысокими частотами, а на основе метода последовательных аппроксимаций [3] уравнений Навье-Стокса для завихренности получены уравнения и граничные условия для колеблющейся пластины с учетом амплитуды до второго порядка. С помощью системы Mathematica получены аналитические решения и построены графики векторных полей скоростей для пластины бесконечной длины, обосновывающие разделение частиц по акустическому методу.

1. Экспериментальная часть

Так как в нашем случае имеет значение практическое разделение нанопорошков по размерам частиц, в качестве колеблющейся плоскости использован луч (кантилевер) длина которого намного больше его ширины. С одного конца кантилевер возбуждается поперечными колебаниями с его резонансной частотой 1,035 кГц. На поверхности кантилевера распылен нанопорошок диоксида кремния, который перераспределится в узловые линии и в виде облаков в пучности (рис.1).

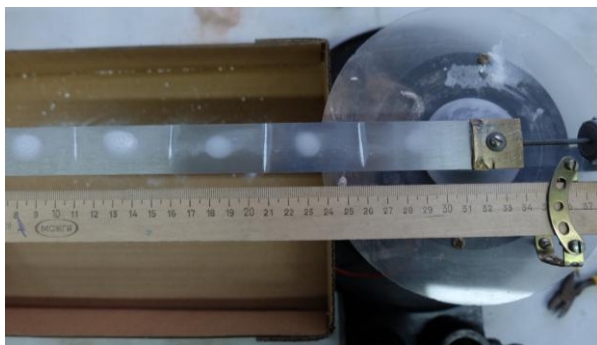


Рисунок 1 – Колеблющийся кантилевер с нанопорошком диоксида кремния на своей поверхности

На рис.2 изображены распределения по размерам порошка, отобранного из узловых линий и из пучностей, полученные методом рассеяния света. Была проведена серия измерений распределений по размерам. Средний размер порошка из узловых линий составил 610 мк (столь большой размер обусловлен агломерацией частиц), в пучностях - 32 мк. Разделение порошка по размерам очевидно.

Целесообразно произвести расчет векторных полей течений газа над поверхностью данного кантилевера, ввиду того, что разделение порошка по размеру частиц на нем подтверждено экспериментально.

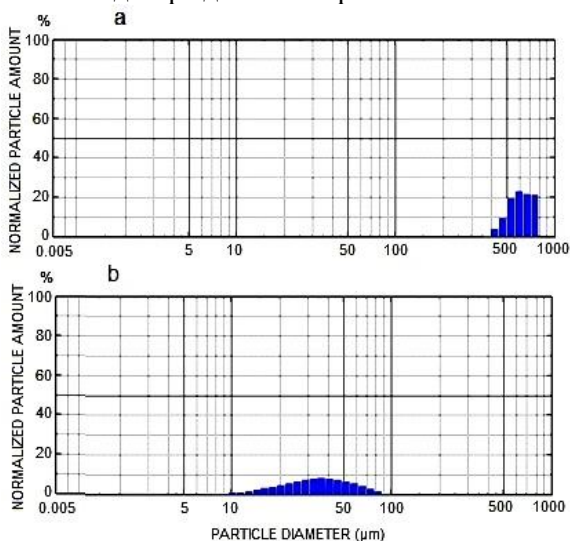


Рисунок 2 – Распределение по размерам нанопорошка из узловой линии (а) и из пучности (б)

2. Численное моделирование потоков газа над пластиной

1. Метод последовательных аппроксимаций

Рассмотрим пластину колеблющейся в продольном направлении по закону $w(x,t)$ с амплитудой $A \ll 1$ и гармонической частотой σ .

В двумерном течении вязкой несжимаемой жидкости вектор завихренности имеет лишь одну ненулевую компоненту:

$$\omega_z = \omega = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \equiv -\nabla^2 \psi,$$

где функция тока $\psi(x,y)$ определяется следующим образом:

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Далее из уравнений Навье-Стокса получаем уравнение для завихренности:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + U \frac{\partial \omega}{\partial x} + V \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \nabla^2 \omega \quad (1)$$

где ν – кинематическая вязкость.

Используя метод последовательных аппроксимаций [3] разлагаем функцию тока:

$$\psi(x, y, t) = \psi_1(x, y, t) + \psi_2(x, y, t) + \psi_3(x, y, t) + \dots, \quad (2)$$

где $\psi_i = O(A^i)$, $i=1,2,\dots$

Подставляя (2) в (1) и приравнивая члены одинакового порядка по амплитуде до 2-го порядка получаем:

$$\begin{cases} \frac{\partial \nabla^2 \psi_1}{\partial t} = \nu \nabla^4 \psi_1, \\ F(x, y, t) + \frac{\partial \nabla^2 \psi_2}{\partial t} = \nu \nabla^4 \psi_2, \end{cases} \quad (3)$$

где $F(x, y, t) \equiv \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \psi_1}{\partial y}$

Из условий прилипания на пластине получаем нелинейные граничные условия при $y = w(x,t)$ (подвижная пластина):

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (4)$$

Учитывая малость амплитуды разлагаем (4) в ряд Тейлора при $y=0$ (неподвижная пластина):

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(x, w, t) = \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, 0, t) + w \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}(x, 0, t) + \frac{w^2}{2!} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}(x, 0, t) + O(A^4)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, w, t) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, 0, t) + w \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}(x, 0, t) + \frac{w^2}{2!} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2}(x, 0, t) + O(A^4)$$

Подставляя далее в (4) и приравнявая одинаковые члены по амплитуде получаем:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial y}(x, 0, t) = 0, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial x}(x, 0, t) = -\frac{\partial w}{\partial t}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial y}(x, 0, t) = -w(x, t) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2}(x, 0, t), \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial x}(x, 0, t) = -w(x, t) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y}(x, 0, t).$$

Из условий затухания колебаний жидкости на бесконечности дополнительно получаем, что ψ_1, ψ_2 и их градиенты стремятся к нулю при $y \rightarrow \infty, x \rightarrow \pm\infty$:

$$\psi_1(x, \infty, t) = \frac{\partial \psi_1}{\partial x}(x, \infty, t) = \psi_2(x, \infty, t) = \frac{\partial \psi_2}{\partial x}(x, \infty, t) = 0, \quad (6)$$

$$\psi_1(\pm\infty, y, t) = \frac{\partial \psi_1}{\partial x}(\pm\infty, y, t) = \psi_2(\pm\infty, y, t) = \frac{\partial \psi_2}{\partial x}(\pm\infty, y, t) = 0.$$

2. Расчеты

Из полученной выше рекуррентной системы краевых задач (3), (5), (6) были вычислены аналитически в системе Mathematica методом разделения переменных функции тока (2) стационарных течений до второго порядка разложения по амплитуде.

На рис.3-4 приведены векторные поля скоростей функций тока 1-го и 2-го порядка разложения по амплитуде соответственно.

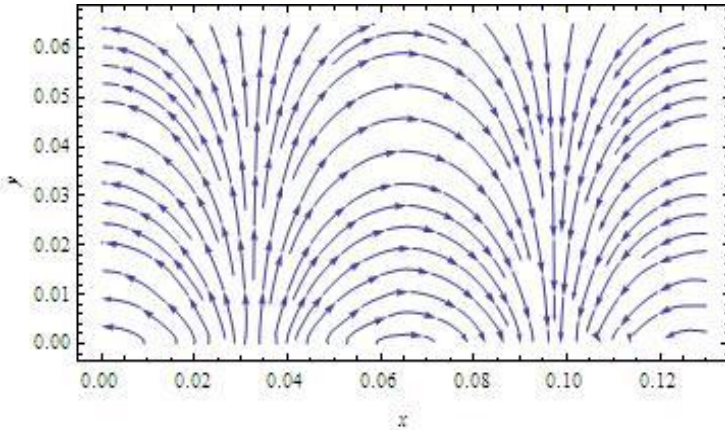


Рисунок 3. – Векторное поле функции тока $\psi_1(x, y)$

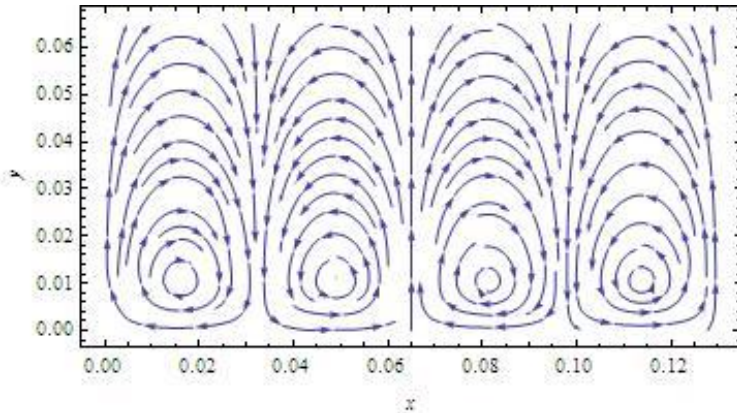


Рисунок 4. – Векторное поле функции тока $\psi_2(x, y)$

В расчетах использовались следующие данные:

$$w(x, t) = A \cos\left(\frac{\pi}{L} x\right) e^{j\sigma t}, \quad j = \sqrt{-1},$$

$$\nu = 1.45 \times 10^{-5} \text{ m}^2 / \text{ s}, \quad L = 6.5 \text{ cm}, \quad A = 0.08 \text{ cm}, \quad \sigma = 120\pi \text{ rad} / \text{ s}.$$

Заключение

Экспериментально показано, что разделение наночастиц по размерам на поверхности колеблющейся пластины возможно, причем с частотой около 1 кГц.

Численное моделирование с учетом разложения по амплитуде до второго порядка показывает (рис. 3-4), что потоки над колеблющейся пластиной

имеют вихревую структуру с периодом равным $L/2$. Соседние вихри вращаются во взаимно противоположных направлениях с центрами вблизи пластины. Отток от пластины происходит в окрестностях узловых точек, а подтекание к пластине в окрестностях пучностей стоячей волны, где и скапливаются частицы мелкой фракции в виде круглых облаков (рис. 1-2).

Литература

1. Acikalin T. Two-dimensional streaming flows induced by resonating thin beams / T. Acikalin, A.Ramah, S.V.Garimella // J.Acoust.Soc. Am. - 2003. – V.114. – №.4 - pt.1 – pp.1785-1795.
2. Dorrestijn M. Chladni Figures Revisited based on nanomechanics / Dorrestijn M. et al // Physical Review Letters. - 2007. – V.98. – 026102
3. Sclichting H. Boundary layer theory. - New-York: McGraw-Hill, 1955.

Дармаев Тумэн Гомбоцыренович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Бурятского государственного университета, тел. +7 (302-1) 221215, e-mail: dtg@bsu.ru

Калашиников Сергей Васильевич, научный сотрудник лаборатории физики наносистем и наноматериалов Бурятского государственного университета

Номоев Андрей Валерьевич, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории физики наносистем и наноматериалов Бурятского государственного университета, тел. +7 (9025) 642462, e-mail: nomoevav@mail.ru

Darmaev Tumen Gombotsyrenovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Buryat State University.

Kalashnikov Sergei Vasilyevich, Research Associate of Laboratory of Physics of Nanosystems and Nanomaterials, Buryat State University.

Nomoev Andrei Valerievich, Doctor of Physics and Mathematics, Senior Research Associate of Laboratory of Physics of Nanosystems and Nanomaterials, Buryat State University.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗЛИЧНЫХ СПОСОБОВ ГЕНЕРАЦИИ N-МЕРНОГО РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Аннотация. Проблема генерации равномерного случайного распределения на различных многомерных поверхностях встает перед исследователями постоянно. В некоторых случаях требуется генерация равномерного распределения на сферах размерности N . Для этого существует много алгоритмов разной сложности. В статье рассмотрены три достаточно простых, но в то же время достаточно эффективных алгоритма: «наивная» реализация, проводящая обычное проецирование на сферу случайных точек в кубе размерности N ; метод отсечений Неймана, также называемый простой метод Монте-Карло; метод нормально распределенных векторов, основанный на инвариантности к поворотам нормального распределения. Также была произведена оценка эффективности этих алгоритмов со стороны качества равномерности и случайности распределения, предложена методика оценки этих распределений на основе обобщения критерия согласия Пирсона. Другим результатом работы является реализованная на языке программирования C библиотека функций, реализующая данные методы.

Ключевые слова: численные методы, случайные числа, равномерное распределение, гиперсфера, N -сфера, критерий Пирсона, качество равномерности

© D. F. Deryugin, F. V. Khandarov, P. S. Burdukovsky

NUMERICAL INVESTIGATION OF DIFFERENT WAYS OF GENERATING AN N-DIMENSIONAL UNIFORM DISTRIBUTION

Abstract. The problem of generating a uniform random distribution on various multidimensional surfaces rises before researchers constantly. In some cases, generation of a uniform distribution on spheres of dimension N is required. For this, there are many algorithms of different complexity. In the article three fairly simple but at the same time quite effective algorithms are considered: a "naive" implementation that carries out the usual projection onto the sphere of random points in a cube of dimension N ; the Neumann cutoff method, also called the simple Monte-Carlo method; method of normally distributed vectors, based on the invariance to rotations of the normal distribution. Also, the effectiveness of these algorithms was evaluated on the part of the quality of uniformity and randomness of distribution, a methodology for estimating these distributions was proposed on the basis of a generalization of Pearson's agreement criterion. Another result of the work is a library of functions implemented in the programming language C, which implements these methods.

Keywords: numerical methods, random numbers, uniform distribution, hypersphere, N-sphere, Pearson's criterion, quality of uniformity

Введение

Случайные числа на сегодняшний день активно используются в различных сферах науки. Они необходимы для моделирования и тестирования, широко используются в численном анализе. Особое место занимает проблема генерации равномерного случайного распределения на N -мерной сфере [6, 7, 9]. В статье рассмотрены три достаточно простых: «наивная» реализация; метод отсечений Неймана, также называемый простой метод Монте-Карло [8]; метод нормально распределенных векторов, основанный на инвариантности к поворотам нормального распределения. Для этих алгоритмов произведена оценка качества равномерности и случайности.

1. Описание подходов к генерации точек, равномерно распределенных в N -мерном пространстве

1. Генерация одномерного распределения

Прежде чем переходить к генерации многомерных равномерных распределений, следует определиться с выбором одномерного распределения, которое будет генерировать каждую координату многомерной точки. В работе использовался генератор Вихрь Мерсенна.

Вихрь Мерсенна является витковым регистром сдвига с обобщенной отдачей. Преобразование, используемое в алгоритме, способно обеспечивать равномерное распределение псевдослучайных чисел в 623 измерениях. Данный алгоритм обеспечивает большой период псевдослучайной последовательности, равный числу Мерсенна, что делает его применение оправданным для практических приложений. Это подтверждается и успешным прохождением статистических тестов DIEHARD. [4]

2. Простое проецирование на сферу

Простое решение, которое, тем не менее, часто используется на практике, состоит в покоординатной генерации равномерно распределенных точек в N -мерном кубе, описывающем N -мерную сферу. Полученный таким образом вектор нормируется, что приводит к его проецированию на поверхность сферы.

3. Алгоритм Монте-Карло (метод отсечений Неймана)

Для генерации подобных распределений широко используются методы Монте-Карло[10-15]. В данной статье рассмотрен один из простейших методов – метод отсечений Неймана.

В случае генерации точек на двумерной плоскости методом отсечений Неймана необходимо:

- 1) Вписать функцию плотности распределения в прямоугольник;
- 2) Получить от генератора псевдослучайных чисел 2 независимых случайных числа равномерно распределенных на интервале (0,1);
- 3) Провести масштабирование полученной точки по сторонам прямоугольника;
- 4) В случае, если полученная точка находится в области, расположенной над графиком функции плотности распределения, тогда точка отбрасывается, в противном случае — принимается;
- 5) Для генерации необходимого количества точек следует повторять пункты 2-4.

В случае генерации точек на N-мерной сфере метод отсечений Неймана обобщается до следующего алгоритма:

- 1) Вписать N-мерную сферу в куб размерности N;
- 2) Получить от генератора псевдослучайных чисел N независимых случайных чисел равномерно распределенных на интервале (0,1) — N-мерный вектор;
- 3) Провести масштабирование полученной точки по сторонам N-мерного куба;
- 4) В случае, если полученная точка находится вне шара, то есть выполняется условие $\|X\| > 1$, то точка отбрасывается, в противном случае производится нормирование точки ($X = X / \|X\|$) и ее последующее принятие;
- 5) Для генерации необходимого количества точек следует повторять пункты 2-4.

Полученные в результате работы вышеописанного алгоритма точки являются равномерно распределенными на сфере размерности N[1,3].

4. Метод нормально распределенных векторов

Для работы метода нормально распределенных векторов требуются случайные числа с распределением $N(0,1)$. Такое распределение имеет функцию плотности следующего вида:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Если каждая координата вектора размерности d имеет распределение $N(0,1)$ и независима, то вектор подчиняется распределению $N(0,1)$ и имеет следующую функцию плотности:

$$f(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d} e^{-\frac{1}{2}\langle x, x \rangle} \quad [2]$$

Вектора с таким распределением инвариантны относительно поворотов[3]. Тогда генерация N -мерного вектора X и его проекция на сферу даст вектор $U = X / \|X\|$, имеющий равномерное распределение на этой сфере.[3]

2. Численная оценка равномерности распределений

Для численной оценки равномерности распределения случайных точек на сфере в работе используется критерий согласия Пирсона («хи-квадрат»).

Алгоритм оценки равномерности:

1. Область случайной величины разбивается на k непересекающихся интервалов;

2. Подсчитываем число n_i случайных величин, которые находятся в i -м интервале, и вероятности попадания в этот интервал, равное отношению длины интервала к полной области случайной величины);

3. Рассчитаем экспериментальный параметр: $\chi_{\text{эксп}}^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - \frac{i_i}{i}N)^2}{\frac{i_i}{i}N}$, где

$\frac{i_i}{i}N$ – идеальное для равномерного распределения число точек, попавших в i интервал;

4. Определим число степеней свободы $m = k - 1$;

5. Проверим, попадает ли вычисленное значение параметра $\chi_{\text{эксп}}^2$ в промежуток $\chi_{p=5\%}^2 \leq \chi_{\text{эксп}}^2 \leq \chi_{p=95\%}^2$. Именно такое, а не классическое правостороннее неравенство дает возможность оценить как случайность, так и равномерность распределения. При близких к 0 значениях параметра можно сделать вывод, что распределение равномерно, но не случайно, так как расстояние между всеми точками практически одинаково. В то же время значения параметра, превышающие табличные при $p=95\%$ позволяют утверждать, что распределение неравномерно.

Обобщение этого критерия на многомерные поверхности требует разбиения поверхности на k областей и подсчет точек, попавших в ту или иную область. Для автоматизации тестирования и оценки равномерности сфера разбивается на 2^s равных частей, где

$s = \begin{cases} 16, & \text{при } N \geq 16 \\ n, & \text{при } N < 16 \end{cases}$ образованных координатными плоскостями. В связи с

этим формула примет вид: $\chi_{\text{эксп}}^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - \frac{n}{2})^2}{\frac{n}{2}}$.

3. Особенности реализации

В результате работы получена библиотека функций, написанная на языке программирования C для компилятора GCC/MinGW. Данная библиотека является кроссплатформенной в силу кроссплатформенности компилятора. Реализованные функции и их сигнатуры описаны в Таблице 1.

Таблица 1. Функции и сигнатуры библиотеки

Функции генерации точек на сфере размерности N

void simple_sphere_N(long n, double *p) Реализация алгоритма простого проецирования на сферу, где

n – размерность пространства,
*p – указатель на массив вещественного типа

Функция производит заполнение массива *p координатами, которые удовлетворяют равномерному случайному распределению

void arm_sphere(long n, double *p){ Реализация метода отсечений Неймана, где

n – размерность пространства,
*p – указатель на массив вещественного типа

Функция производит заполнение массива *p координатами, которые удовлетворяют равномерному случайному распределению

void ndrvc(long n, double *p) Реализация метода нормально распределенных векторов

n – размерность пространства,
*p – указатель на массив вещественного типа

Функция производит заполнение массива *p координатами, которые удовлетворяют равномерному случайному распределению

Вспомогательные функции

double n_distrib_val()	Функция позволяет получать нормально распределенные величины на основе метода отношения случайных равномерно распределенных величин[5]
	Возвращает нормально распределенную величину (0,1)
void cube_N(long n, double *p)	Функция позволяет получать величину, равномерно распределенную в N-мерном кубе n – размерность пространства, *p – указатель на массив вещественного типа
	Функция производит заполнение массива *p координатами, которые удовлетворяют равномерному случайному распределению
double norm(long n, double *p)	Реализация вычисления Евклидовой нормы для вектора в N-мерном пространстве n – размерность пространства, *p – указатель на массив вещественного типа
double generate_random_64_real_1()	Реализация генерации случайной величины вещественного типа в отрезке [0,1] (Вихрь Мерсенна)
double generate_random_64_real_2()	Реализация генерации случайной величины вещественного типа в отрезке [0,1] (Вихрь Мерсенна)
double generate_random_64_real_3()	Реализация генерации случайной величины вещественного типа в отрезке (0,1) (Вихрь Мерсенна)
unsigned long long generate_rand_64_integer_64()	Генерация целого случайного числа в $[0, 2^{64} - 1]$ (Вихрь Мерсенна)

4. Результаты тестирования

Проверка по критерию согласия Пирсона проводилась при генерации 400 тысяч точек на сферах размерности 3, 10, 100 и 1000. Результаты вычисления экспериментального параметра представлены в Таблице 2. Значения экспериментального параметра для использованных при тестировании степеней свободы представлены в Таблице 3.

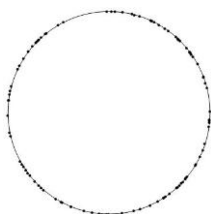
Таблица 2. Значения критерия Пирсона

	N=3 (8 частей)	N=10 (1024 части)	N=100 (65536 частей)	N=1000 (65536 частей)
Простая проекция на сферу	4,32998	1012,44671	65008,37628	65121,77838
Метод отсечений Неймана	0,97989	974,35669	65601,94216	670906,98484
Метод нормально распределенных векторов	3,26786	952,82688	65025,76112	65907,87584

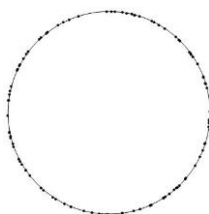
Таблица 3. Таблица значений допустимых критериев

Число степеней свободы	p = 5%	p = 25%	p = 50%	p = 75%	p = 95%
7	2,3680463	4,492271	6,711297	9,536025	14,640682
1023	949,97598	992,1805	1022,364	1053,154	1098,3393
65535	64942,391	65290,62	65534,33	65778,65	66129,869

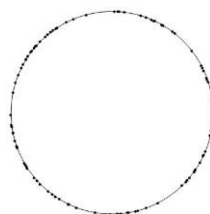
Ниже представлены сгенерированные описанными алгоритмами распределения точек на двумерных и трехмерных поверхностях. Для окружности генерировалось 100 точек, для трехмерной сферы – 1000 точек.



Метод простого проецирования

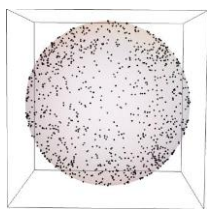


Метод отсечений Неймана

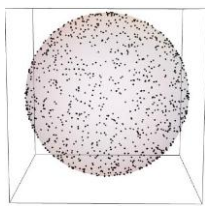


Метод нормально распределенных векторов

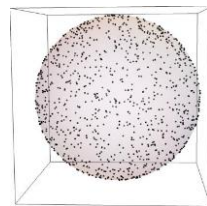
Рисунок 1. – Распределение точек на окружности



Метод простого
проецирования



Метод отсечений
Неймана



Метод нормально
распределенных
векторов

Рисунок 2. – Распределение точек на сфере

Метод отсечений Неймана показывает хорошие результаты при малых размерностях, но в связи с быстрым ростом объема сферы при $N \rightarrow \infty$, время его выполнения показывает экспоненциальный рост с ростом N , что делает его непригодным для использования при генерации точек на сфере размерности больше 10. Простая проекция на сферу при размерностях до 100 показывает результаты хуже, чем метод нормально распределенных векторов, однако при $N = 1000$ его оценка критерия согласия Пирсона показывает результат между $p=5\%$ и $p=25\%$, что может говорить о распределении, далеком от случайного. Наиболее стабильные показатели как при оценке критерием согласия Пирсона (см. таблица 1), так и по визуальному анализу при генерации точек на окружности (см. рис. 1) и сфере (см. рис. 2) демонстрирует метод нормально распределенных векторов.

Заключение

В работе проведено численное исследование различных подходов к генерации равномерного распределения.

Полученные результаты демонстрируют преимущество метода нормально распределенных векторов.

Литература

1. D. Seaman. Topics on sphere distributions. <http://www.math.niu.edu/rusin/known-math/96/sph.rand>.
2. D. E. Knuth. The Art of Computer Programming, volume 2: Seminumerical Algorithms. Addison-Wesley, 1969.
3. Jan Poland. Three Different Algorithms for Generating Uniformly Distributed Random Points on the N-Sphere

4. Makoto Matsumoto, Takuji Nishimura. ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation (TOMACS) - Special issue on uniform random number generation Volume 8 Issue 1, Jan. 1998
5. G. Box, M. Muller. A note on the generation of random normal deviates. Annals of Mathematical Statistics, 29:610-611, 1958.
6. Weisstein E.W. Sphere Point Picking // MathWorld –A Wolfram Web Resource. – URL:<http://mathworld.wolfram.com/SpherePointPicking.html>.
7. Marsaglia G. Choosing a Point from the Surface of a Sphere // Ann. Math. Stat. – 1972. – Vol. 43. – P. 645–646.
8. Rubinstein R.Y., Kroese D.P. Simulation and the Monte Carlo methods. Second Edition. – Wiley-Interscience, 2007. – 345 p.
9. Harald Niederreiter. Recent trends in random number and random vector generation Annals of Operations Research 31 (1991) 323-346
10. Doucet, Arnaud; Freitas, Nando de; Gordon, Neil (2001). Sequential Monte Carlo methods in practice. New York: Springer. ISBN 0-387-95146-6.
11. Eckhardt, Roger (1987). "Stan Ulam, John von Neumann, and the Monte Carlo method" (PDF). Los Alamos Science, Special Issue (15): 131–137.
12. Fishman, G. S. (1995). Monte Carlo: Concepts, Algorithms, and Applications. New York: Springer. ISBN 0-387-94527-X.
13. C. Forastero and L. Zamora and D. Guirado and A. Lallena (2010). "A Monte Carlo tool to simulate breast cancer screening programmes". Phys. In Med. And Biol. 55 (17): 5213–5229. Bibcode:2010PMB...55.5213F. doi:10.1088/0031-9155/55/17/021.
14. Golden, Leslie M. (1979). "The Effect of Surface Roughness on the Transmission of Microwave Radiation Through a Planetary Surface". Icarus. 38 (3): 451–455. Bibcode:1979Icar...38..451G. doi:10.1016/0019-1035(79)90199-4.
15. Gould, Harvey; Tobochnik, Jan (1988). An Introduction to Computer Simulation Methods, Part 2, Applications to Physical Systems. Reading: Addison-Wesley. ISBN 0-201-16504-X.

Дерюгин Даниил Федорович, преподаватель кафедры информационных технологий, Институт математики и информатики, Бурятский государственный университет, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24 «а», тел.: +7 (3012) 221215, e-mail: dandwor@gmail.com

Федор Владимирович Хандаров, кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры информационных технологий, Институт математики и информатики, Бурятский государственный университет, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24 «а», тел.: +7 (3012) 221215, e-mail: webcastor@gmail.com

Бурдуковский Павел Сергеевич, магистрант института математики и информатики, Бурятский государственный университет, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24 «а», тел.: +7 (3012) 221215, e-mail: loluich@gmail.com

Deryugin Daniil Fedorovich, Lecturer of the Department of Information Technologies, Buryat State University

Fedor Vladimirovich Khandarov, Candidate of Technical Sciences, Senior Lecturer of the Department of Information Technologies, Buryat State University

Burdukovsky Pavel Sergeevich, master's degree student of Institute of Mathematics and Informatics, Buryat State University

(EXCEL+ACAD)-ТЕХНОЛОГИЯ ПОСТРОЕНИЯ ИЗОТЕРМИЧЕСКИХ РАЗРЕЗОВ Т-Х-Y-Z ДИАГРАММ СОСТОЯНИЯ ЧЕТЫРЕХКОМПОНЕНТНЫХ СИСТЕМ

Аннотация. Графика фазовых диаграмм четырехкомпонентных систем достаточно сложна, (Excel +AutoCAD)- технология является одним из возможных способов ее построения. В работе продемонстрирована технология применения графического пакета AutoCAD и табличного процессора Excel для воспроизведения ручной графики Д.А. Петрова. AutoCAD-технология рассмотрена на примере аддитивного контура гиперповерхностей диаграммы состояния системы А-В-С-D с шестью эвтектическими разрывами растворимости. С помощью (EXCEL+ACAD)-технологии выполнено построение изотермических разрезов Т-х-у-з фазовых диаграмм четырехкомпонентных систем, представлены z-проекции базовых поверхностей фазовой диаграммы четверной системы с шестью эвтектиками с разных ракурсов. Сделан вывод о том, что Excel-расчет позволяет построить любые изотермические сечения Т-х-у-з диаграмм состояния четырехкомпонентных систем с помощью графического пакета AutoCAD.

Ключевые слова: Т-х-у-з диаграмма, компьютерная модель, Excel, AutoCAD

© *М. V. Lamuyeva, V. I. Lucik, M. D. Parfenova*

(EXCEL+ACAD)-TECHNOLOGY OF CONSTRUCTION OF ISOTHERMAL SECTIONS OF T-X-Y-Z PHASE DIAGRAMS OF QUATERNARY SYSTEMS

Abstract. As the graphics of phase diagrams for the ternary and quaternary systems are rather sophisticated in many cases the AutoCAD+Excel technology is one of the possible ways to build it. The application technology graphical package AutoCAD and Excel Spreadsheet was demonstrated to reproduce D. Petrov's manual graphics. AutoCAD-technology is considered on the additive contour of hypersurfaces of A-B-C-D system phase diagram with six eutectic gaps of solubility. (EXCEL+ACAD)-technology was used for the construction of isothermal sections of T-x-y-z phase diagrams of four-component systems, z-projections of the base surfaces of the phase diagram of the quaternary system with six eutectics from different points of view are presented. It is concluded that Excel-calculation allows you to build any isothermal sections of T-x-y-z phase diagrams of quaternary systems using AutoCAD graphics package.

Keywords: T-x-y-z diagram, computer model, Excel, AutoCAD.

Introduction

AutoCAD+Excel technology is one way to automate the construction of sections of phase diagrams (PD). And as the graphics of phase diagrams for the ternary and quaternary systems are rather sophisticated, in many cases the AutoCAD+Excel technology is the possible way to check the topology of T-x-y and T-x-y-z PD sections [1-9].

The foundation of investigation for the phase diagrams of quaternary systems by means of three-dimensional horizontal (isothermal) and vertical (isopleths) sections were laid by D. A. Petrov [3-4]: "A set of isothermal sections given into all temperature range of system at similar geometry and orientation forms the isopleths. On the contrary, a set of isothermal sections, for all range of the isopleths at one temperature, forms isothermal section" [3, p.4].

1. Construction of concentration tetrahedron

Temperatures of all phases participating in invariant transformations correspond to 15 levels (Table 1).

Table 1. Invariant temperatures

Code	Temperature, °C	Points	Code	Temperature, °C	Points
T15	1000,0	A	T7	450,0	Eac,Ac,Ca,Ebc,Bc,Cb
T14	800,0	B	T6	440,0	Ecd,Cd,Dc
T13	700,0	D	T5	413,1	Ebcd,Bcd,Cbd,Dbc
T12	650,0	Eab,Ab,Ba	T4	410,4	Eabc,Abc,Bac,Cab
T11	600,0	C	T3	394,5	Eacd,Ac,d,Cad,Dac
T10	590,0	Ebd,Bd,Db	T2	387,1	E,Abcd,Bacd,Cabd, Dabc
T9	560,0	Ead,Ad,Da	T1	20,0	Ab0, ..., Dabc0
T8	528,7	Eabd,Abd,Bad, Dab			

The coordinates of tetrahedron tops in Cartesian coordinates system (at the arrangement of tetrahedron on edge BC in plane XOY) have the values: A($a/2$; a ; $a \cdot \sqrt{2}/2$), B(0; $a/2$; 0), C(a ; $a/2$; 0), D($a/2$; 0; $a \cdot \sqrt{2}/2$), where a is an edge's length. We take the length of edge as 100 mm at the tetrahedron visualization in AutoCAD software. In this case the tetrahedron vertexes coordinates are A(50,100,70.71), B(0,50,0), C(100,50,0), D(50,0,70.71).

The barycentric coordinates of any tetrahedron point were converted to Cartesian coordinates (Fig. 1) as follows:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C & x_D \\ y_A & y_B & y_C & y_D \\ z_A & z_B & z_C & z_D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 50 & 0 & 100 & 50 \\ 100 & 50 & 50 & 0 \\ 70.71 & 0 & 0 & 70.71 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} x &= 50 \cdot z_1 + 100 \cdot z_3 + 50 \cdot z_4; y = 100 \cdot z_1 + 50 \cdot z_2 + 50 \cdot z_3; \\ z &= 70.71 \cdot z_1 + 70.71 \cdot z_4 \end{aligned} \quad (2)$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Initial data									
2			<i>Barycentric coordinates</i>				<i>Temperature</i>	<i>Cartesian coordinates</i>		
3	<i>Nb</i>	<i>Point</i>	<i>z1</i>	<i>z2</i>	<i>z3</i>	<i>z4</i>		<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>
4	1	A	1	0	0	0	1000,0	50,0	100,0	70,71
5	2	B	0	1	0	0	800,0	0,0	50,0	0,00
6	3	C	0	0	1	0	600,0	100,0	50,0	0,00
7	4	D	0	0	0	1	700,0	50,0	0,0	70,71
8	5	Eab	0,45	0,55	0	0	650,0	22,5	72,5	31,82
9	6	Eac	0,40	0	0,6	0	450,0	80,0	70,0	28,28
10	7	Ead	0,46	0	0	0,54	560,0	50,0	46,0	70,71
11	8	Ebc	0	0,45	0,55	0	450,0	55,0	50,0	0,00
12	9	Ebd	0	0,49		0,51	590,0	25,5	24,5	36,06
13	10	Ecd	0	0	0,52	0,48	440,0	76,0	26,0	33,94
14	11	Eabc	0,28	0,25	0,47	0	410,4	61,0	64,0	19,80
15	12	Eabd	0,36	0,27	0	0,37	528,7	36,5	49,5	51,62
16	13	Eacd	0,31	0	0,42	0,27	394,5	71,0	52,0	41,01
17	14	Ebcd	0	0,3	0,44	0,26	413,1	57,0	37,0	18,38
18	15	E	0,26	0,16	0,4	0,18	387,1	62,0	54,0	31,11
19	16	Ab	0,76	0,24	0	0	650,0	38,0	88,0	53,74
20	17	Ac	0,77	0	0,23	0	450,0	61,5	88,5	54,45
21	18	Ad	0,75	0	0	0,25	560,0	50,0	75,0	70,71
22	19	Abc	0,68	0,2	0,12	0	410,4	46,0	84,0	48,08
23	20	Abd	0,71	0,16	0	0,13	528,7	42,0	79,0	59,40

62	59	Cb0	0	0,11	0,89	0	20,0	89,0	50,0	0,00
63	60	Cd0	0	0	0,86	0,14	20,0	93,0	43,0	9,90
64	61	Cab0	0,06	0,09	0,85	0	20,0	88,0	53,0	4,24
65	62	Cad0	0,08	0	0,82	0,1	20,0	91,0	49,0	12,73
66	63	Cbd0	0	0,09	0,84	0,07	20,0	87,5	46,5	4,95
67	64	Cabd0	0,06	0,06	0,82	0,06	20,0	88,0	50,0	8,49
68	65	Da0	0,12	0	0	0,88	20,0	50,0	12,0	70,71
69	66	Db0	0	0,13	0	0,87	20,0	43,5	6,5	61,52
70	67	Dc0	0	0	0,15	0,85	20,0	57,5	7,5	60,10
71	68	Dab0	0,06	0,12	0	0,82	20,0	44,0	12,0	62,22
72	69	Dac0	0,18	0	0,1	0,72	20,0	55,0	23,0	63,64
73	70	Dbc0	0	0,19	0,09	0,72	20,0	45,0	14,0	50,91
74	71	Dabc0	0,07	0,17	0,07	0,69	20,0	45,0	19,0	53,74

Figure 1. – Re-calculation of barycentric coordinates of initial points of diagram into three-dimensional Cartesian coordinates using Excel

2. Construction of lines

Z-projection of the main lines of phase diagram is constructed after the automatic recalculation of barycentric coordinates of points in the Cartesian ones in Excel. In this case a high speed and an ease of image creation are demonstrated.

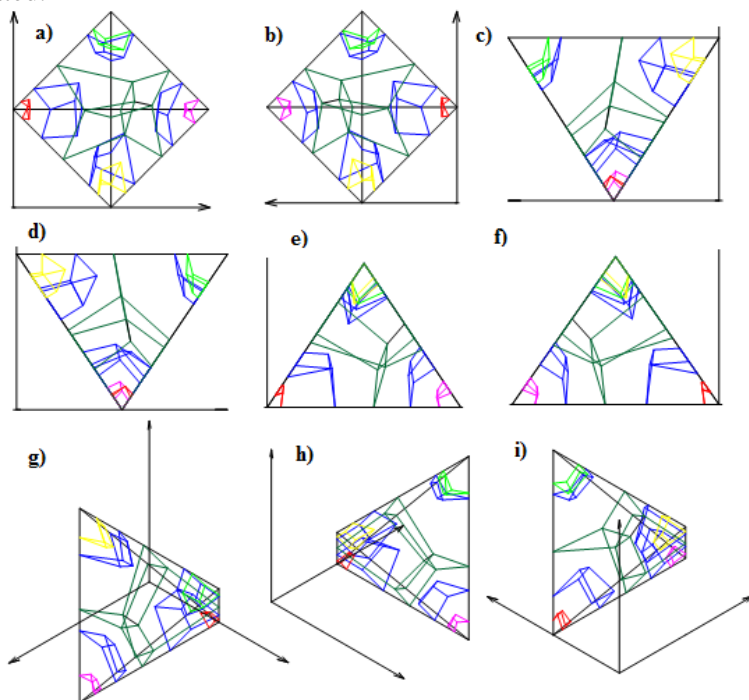


Figure 2. – Representation of z-projections of liquidus, solidus and solvus hypersurfaces of quaternary system with six binary eutectics using AutoCAD: top view (a), bottom view (b), left view (c), right view (d), frontal view (e), isometry (f-i)

In AutoCAD at creation of drawing the plane XOY coincides with the screen and the axis Z is directed at the user. Therefore initially the tetrahedron is visualized in the projection as D.A. Petrov. Then 3D model can be represented in different views (Fig. 2). To visualize 3D- objects in ACAD, use the **3D Point** command located in the horizontal **View** menu.

3. Construction of horizontal sections

The points of phase diagrams by connecting pairs form 100 lines (some of them are repeated): 28 liquidus lines, 48 solidus and 24 solvus lines. Each of

these lines is presented in Excel by the numbers of end points within range **crd** (the range A4:J74).

The number of initial and end points are entered in columns **B** and **D** correspondingly (Fig. 3). Melting point in the initial point must be above the melting temperature in the end point. Formulas of entering of end points temperatures are used for the control of entering of end points numbers in columns **C** and **E**. Formulas of entering of name point of horizontal sections is given in column **F**.

The temperature of horizontal section T_{iz} inputs in cell **F1**. Let's assume that $A(x_1, y_1, z_1)B(x_2, y_2, z_2)$ is one of the phase diagram's, the melting temperature of initial point A equals T_A and the melting temperature of end point B equals T_B . Then the hyperplane intersects the line AB in point $C(x_3, y_3, z_3)$ with coordinates:

$$x_3 = x_1 + (T_A - T_{iz}) \cdot \frac{x_2 - x_1}{T_A - T_B}; y_3 = y_1 + (T_A - T_{iz}) \cdot \frac{y_2 - y_1}{T_A - T_B}; z_3 = z_1 + (T_A - T_{iz}) \cdot \frac{z_2 - z_1}{T_A - T_B} \quad (3)$$

Equation (3) are entered in the columns **G, H, I**.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Temperature of horizontal section =					800				
2	№	beginning of line		end of line		isothermal point	Cartesian coordinates of isothermal point			intersection
3		point number	T	point number	T		x	y	z	
4	1	1	1000	5	650	A-Eab	34,29	84,29	48,49	yes
5	2	1	1000	6	450	A-Eac	60,91	89,09	55,28	yes
6	3	1	1000	7	560	A-Ead	50,00	75,45	70,71	yes
7	4	2	800	5	650	B-Eab	0,00	50,00	0,00	yes
8	5	2	800	8	450	B-Ebc	0,00	50,00	0,00	yes
9	6	2	800	9	590	B-Ebd	0,00	50,00	0,00	yes
10	7	3	600	6	450	C-Eac	126,67	23,33	-37,71	no
11	8	3	600	8	450	C-Ebc	160,00	50,00	0,00	no
12	9	3	600	10	440	C-Ecd	130,00	80,00	-42,43	no
13	10	4	700	7	560	D-Ead	50,00	-32,86	70,71	no
14	11	4	700	9	590	D-Ebd	72,27	-22,27	102,21	no
15	12	4	700	10	440	D-Ecd	40,00	-10,00	84,85	no
16	13	5	650	11	410,4	Eab-Eabc	-1,60	77,82	39,34	no
17	14	5	650	12	528,7	Eab-Eabd	5,19	100,94	7,34	no

Figure 3. – Excel application for the construction of horizontal section

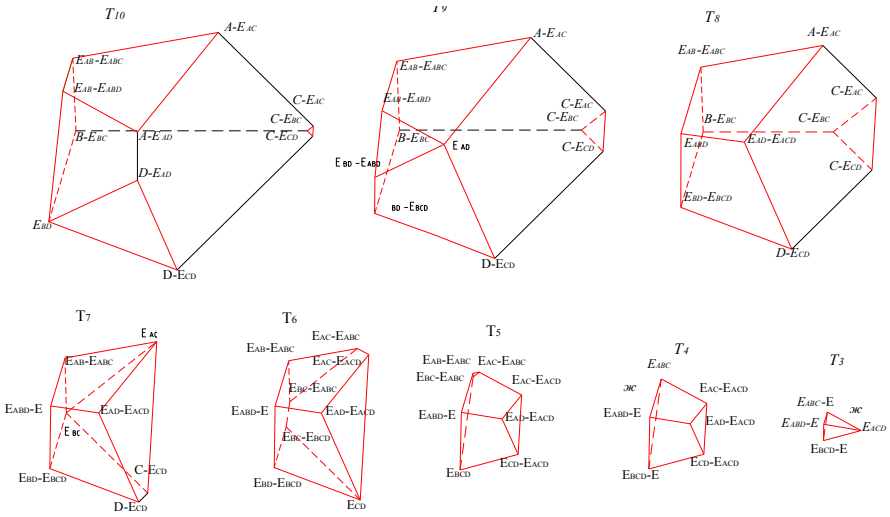


Figure 4. – Horizontal sections of phase region L (T_{10} - T_3)

As a result we obtain the point of horizontal section. Since the hyperplane T_{iz} intersects the lines, for which the condition $T_B < T_{iz} < T_A$ is realized. Formula (4) is entered in column **J** to check this condition:

$$= IF(AND(F\$1 <= C_i; F\$1 >= E_i; C_i > E_i); "YES"; "NO"), \text{ where } i - \text{is number of row (4)}$$

Consideration of phase regions at the change of temperature gives the transformation of hyper-volumes of four-dimensional phase diagram. For example, the transformation of horizontal sections for phase region L, bounded by sections of liquis hypersurfaces (qA, qB, qC, qD), is presented in Fig. 4.

Summary

Calculation of points coordinates on the contours of the hypersurfaces by means of Excel spreadsheet allows to receive any horizontal section of the quaternary PD by the using of the AutoCAD software for visualization.

References

1. Krechko, Y. A., Polishchuk V. V. Autocad. Course of practical work. Moscow: DIALOG-MIFI, 1995. – 256 p.
2. Lantuh-Lyaschenko A. I., Vysokovych E. V. Introduction to AutoCAD versions 12, 13. Moscow: ECOM, 1996.
3. Petrov D.A. Quaternary systems (new approach to the construction and analysis). Moscow: Metallurgy Publ. House, 1991. – 284 p.

4. Petrov D.A. Doklady Akademii Nauk USSR, 1991. – Vol. 321. – № 3. - pp. 552-556
5. Popov A.A. EXCEL: a practical guide. Moscow: DESS COM, 2000. – 301 p.
6. Ian O.Angell. A practical introduction to computer graphics. M.: Radio and communication, 1984. – 141 p.
7. Paragios N., Chen Y., Faugeras O. Handbook of Mathematical Models in Computer Vision. New York: Springer, 2006. – 605 p.
8. Vasil'ev A. Excel 2007 in the Examples. S-Petersburg: BHV Publ. House, 2007. – 656 p.
9. House R. Using AutoCAD 2000. Spec. Ed. +CD. Indianapolis: Macmillan Computer Publ, 2000. – 832 p.

Ламуева Марина Владимировна, аспирант, Институт физического материаловедения СО РАН, Россия, 670047, г. Улан-Удэ, ул.Сахьяновой, д. 6, тел.+7 983 4298834, e-mail: marina_bgu@mail.ru

Луцык Василий Иванович, доктор химических наук, профессор, Институт физического материаловедения СО РАН, Россия, 670047, г. Улан-Удэ, ул.Сахьяновой, д. 6, тел. +7 (3012) 433224, e-mail: vluts@ipms.bscnet.ru

Парфенова Мария Дмитриевна, студент, Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 40, тел. +7 (3012) 433224, e-mail: vluts@ipms.bscnet.ru

Lamueva Marina Vladimirovna, post-graduate student, Institute of Physical Materials Science SB RAS

Lutsyk Vasily Ivanovich, Doctor of Chemical Sciences, Full Professor, Institute of Physical Materials Science SB RAS

Parfenova Mariya Dmitrievna, student, Tomsk State University of Control Systems and Radio-electronics

ПОЛИЭДРАЦИЯ КОНЦЕНТРАЦИОННЫХ КОМПЛЕКСОВ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СИСТЕМ С ОБМЕННЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Аннотация. В статье рассмотрены необходимые при исследовании алгоритмы деления диаграммы состава сложных многокомпонентных систем на подсистемы. Алгоритм Зыкова-Краевой полиэдрации концентрационных комплексов многокомпонентных систем рассмотрен на примере четверной системе с обменным взаимодействием. Отмечено имеющееся несовершенство применения данного алгоритма. Предложен новый алгоритм разделения концентрационного комплекса обратной системы на подсистемы, основанный на соотношениях между числом комплексных вершин многогранников и результирующим числом симплексов. Метод так же продемонстрирован на четверной системе с обменным взаимодействием. Отмечено, что данный алгоритм в отличие от известного алгоритма декомпозиции графа легко осуществим в программном обеспечении, и является достаточно эффективным в случаях с внутренними точками (составами) и с конкуренцией внутренних диагоналей (линий и плоскостей).

Ключевые слова: химическая технология, подсистема многокомпонентной системы, полиэдрация, минералы, триангуляции, взаимные системы.

POLYHEDRATION OF CONCENTRATION COMPLEXES OF MULTICOMPONENT SYSTEMS WITH EXCHANGE INTERACTION

Abstract. The article deals with the necessary algorithms for the study of the diagram of the complex multicomponent systems into subsystems. The algorithm of Zykov-Kraeva polyhedration of concentration complexes of multicomponent systems is considered on the example of a quaternary system with exchange interaction. The existing imperfection of the application of this algorithm is noted. A New algorithm has been offered to divide a concentration complex of reciprocal system for the subsystems. It is based on the relations between the number of complex polyhedron vertexes and resulting number of simplexes. Method is demonstrated on the quaternary systems. It is easy realized in the software, and is very effective in the cases with inner points (compounds) and with the competition of inner diagonals (lines and planes).

Keywords: chemical technology, subsystem of multicomponent system, polyhedration, minerals, triangulations, reciprocal systems.

Introduction

For elaboration of algorithms to manipulate with very complicated physico-chemical systems, additional model systems with specific features are to be used. Usually the adjacency matrix is used for the multicomponent systems polyhedration [1]. As this process is very time-consuming, especially in multi-dimensional spaces or at many additional vertices (new compounds) of polyhedrons, special software has been elaborated [2]. Its input is an adjacency list (formed from the adjacency matrix zero elements) and its output is a list of simplexes. The program makes possible to define interrelations between concentration coordinates of subsystems, formed in the initial system and given by chemical elements, and to determine conditions when the point belongs to the given concentration simplex or complex (at $0 < X_i < 1$ for all solutions of the matrix equation $Z=MX$, where matrixes Z and M correspond to coordinates of the point and concentration subsystem vertices) [3].

Method of A.A. Zykov, used in graph theory to design the independent sub-graphs family on the base of the adjacency matrix R and its list R_L [4], may be applied for multicomponent systems too. A.G. Kraeva was the first, who used it for the concentration polyhedrons dividing (with zero elements in the adjacency list R_L) [5]. So, the algorithm may be named as the ZK Algorithm (of Zykov-Kraeva).

1. Polyhedration by the ZK algorithm

A polyhedron with triangulated faces is represented as a non-oriented graph. The vertices of the polyhedron and the points of new compounds, on edges, faces and inside it are numbered. An adjacency matrix R and an adjacency list R_L are written. The elements of the adjacency list are the zero elements of the adjacency matrix. They are multiplied by the law of absorption. Inversion is applied to the multiplication result. And at last a simplex list of the polyhedron is formed.

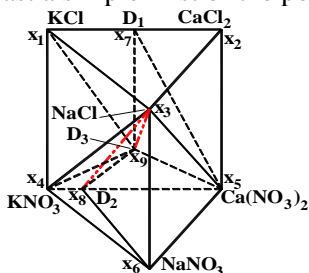


Figure 1. – Polyhedration of the quaternary reciprocal system K,Ca,Na||NO₃,Cl

with two binary and a ternary compounds.

As an example, carry out polyhedration of K,Ca,Na||NO₃,Cl system. The system K,Ca,Na||NO₃,Cl has binary D₁=KCl·CaCl₂, D₂=4KNO₃·Ca(NO₃)₂ [9] and ternary D₃=KNO₃·2Ca(NO₃)₂·KCl [1] compounds (Fig. 1). Connections NaNO₃-D₂, D₂-D₃, KNO₃-D₃, Ca(NO₃)₂-D₃, KCl-D₃, Ca(NO₃)₂-D₁, NaCl-Ca(NO₃)₂, NaCl-KNO₃, D₁-D₃, D₁-NaCl in bordering systems have been defined experimentally. Corresponding to all components and compounds vertices are numerated: x₁=KCl, x₂=CaCl₂, x₃=NaCl, x₄=KNO₃, x₅=Ca(NO₃)₂, x₆=NaNO₃, x₇=D₁, x₈=D₂, x₉=D₃. Three pairs of lines x₆x₇+x₆x₉ or x₃x₈+x₃x₉ or x₃x₉+x₆x₉ are in competition to be the inner diagonals. If to add to zero elements of the adjacency matrix on input into the polyhedration software x₃x₈+x₃x₉, then it outputs only five 3D simplexes (tetrahedrons) and six 2D simplexes (triangles). Hence, the algorithm does not fulfill the polyhedration to the end with inner diagonals x₆x₇+x₆x₉, and the additive connections are to be x₃x₈=NaCl-D₂ and x₃x₉=NaCl-D₃ or x₃x₉=NaCl-D₃ and x₆x₉=NaNO₃-D₃. Then the variant of the adjacency matrix and the adjacency lists R_{L1} (r_{3,8}=1, r_{6,9}=0) or R_{L2} (r_{3,8}=0, r_{6,9}=1) are formed:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \\
 x_1 & * & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 x_2 & & * & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 x_3 & & & * & 1 & 1 & 1 & 1 & ? & 1 \\
 x_4 & & & & * & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 x_5 & & & & & * & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 x_6 & & & & & & * & 0 & 1 & ? \\
 x_7 & & & & & & & * & 0 & 1 \\
 x_8 & & & & & & & & * & 1 \\
 x_9 & & & & & & & & & *
 \end{array} \\
 \end{array}
 \left. \begin{array}{c}
 x_1 \\
 x_2 \\
 x_3 \\
 x_4 \\
 x_5 \\
 x_6 \\
 x_7 \\
 x_8 \\
 x_9
 \end{array} \right\} \begin{array}{c}
 x_2 \\
 x_4 \\
 x_5 \\
 x_7 \\
 x_8 \\
 x_9
 \end{array}
 \end{array}
 , \begin{array}{c}
 \mathbf{R}_{L1} = \begin{array}{c}
 x_4 \\
 x_5 \\
 x_7 \\
 x_9
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 ,
 \begin{array}{c}
 \mathbf{R}_{L2} = \begin{array}{c}
 x_2 \\
 x_4 \\
 x_5 \\
 x_7 \\
 x_8
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

After multiplication of R_{L1} elements according to the absorption law:

$$\begin{aligned}
& (x_1 + x_2x_5x_6x_8)(x_2+x_4x_6x_8x_9)(x_4 + x_5x_7)(x_6+x_7x_9)(x_7+x_8) = \\
& = x_1x_2x_4x_6x_7+x_1x_2x_5x_6x_7+x_2x_5x_6x_7x_8+x_1x_2x_4x_7x_9+ x_1x_2x_5x_7x_9 + \\
& \quad + x_1x_2x_4x_6x_8+x_1x_4x_6x_8x_9+x_2x_4x_5x_6x_8
\end{aligned}$$

and inverse of every product, the polyhedration is finished by dividing the initial complex into eight simplexes:

$$\begin{aligned}
& x_3x_5x_8x_9+x_3x_4x_8x_9+x_1x_3x_4x_9+x_3x_5x_6x_8+x_3x_4x_6x_8+ \\
& \quad +x_3x_5x_7x_9+x_2x_3x_5x_7+x_1x_3x_7x_9
\end{aligned}$$

Analogously eight 3D simplexes finish polyhedration with participation of $R_{1,2}$ elements:

$$\begin{aligned}
& x_3x_5x_6x_9+x_3x_4x_6x_9+x_1x_3x_4x_9+x_4x_6x_8x_9+x_5x_6x_8x_9+ \\
& \quad +x_3x_5x_7x_9+x_2x_3x_5x_7+x_1x_3x_7x_9
\end{aligned}$$

The ZK algorithm is imperfect because it has limitations. The algorithm can not divide polyhedrons with inner points [6,7] or with competition of inner diagonals and inner planes.

2. Topological rules for A,B,C||X,Y polyhedrons

If to present a trigonal prism of the quaternary reciprocal system A,B||X,Y,Z (or A,B,C||X,Y) as a graph and to describe it by the adjacency matrix, then for V Vertices of the graph and L Links between them their numbers are equal to:

$$V=V_0+V_E+V_F+V_I \text{ and } L=L_E+L_F+L_I \quad (1)$$

where V and L are numbers of: V_0 - original vertices of the trigonal prism A,B||X,Y,Z, V_E - vertices (binary compounds) on its Edges, L_E - Edges (or their fragments, namely, binary systems without compounds); V_F - vertices (ternary compounds) on Faces, L_F - diagonals on Faces, S_F - 2D Simplexes (triangles) on Faces; V_I - vertices (quaternary compounds) Inside the prism, L_I - Inner diagonals, S_I - Inner diagonal planes (2D simplexes), T - 3D simplexes or Tetrahedrons.

As an original trigonal prism of a quaternary reciprocal system has $V_0=6$ vertices, $L_E=9$ edges and five faces (two triangles and three squares), then its edges are divided by V_E points to $L_E=9+V_E$ segments (simple binary systems). Numbers of diagonals (L_F) and simplexes (S_F) on faces, inner 2D planes-simplexes (S_I) and 3D tetrahedrons-simplexes (T) are expressed as [6,7]:

$$\begin{aligned}
& L_F=3+2V_E+3V_F, \quad S_F=8+2V_E+2V_F, \quad S_I=2+V_E+V_F \quad 2V_I+2L_I, \quad (2) \\
& T=3+V_E+V_F- V_I+L_I
\end{aligned}$$

So, to define the quantity of tetrahedrons-simplexes T and inner planes S_I in advance, it is enough to know numbers of binary V_E , ternary V_F , quaternary V_I compounds and inner diagonals L_I .

3. New algorithm of polyhedration

Because of ZK Algorithm shortcomings, the New Algorithm has been elaborated. In contrast to the ZK Algorithm the new one works with “1” elements of the adjacency matrix. It consists of three steps:

- 1) All connections $x_i x_j$, including all possible inner diagonals (in other words, lines, connecting every binary compound of both triangular faces of the prism with opposite vertices), are written.
- 2) All possible planes $x_i x_j x_k$ of three types are formed: S_F planes on faces, S_I^* inner planes without inner diagonals on their sides and S_I^{**} inner planes, connected with possible inner diagonals. The last type of planes (S_I^{**}) is analyzed in accordance to formulas (2). Formulas (2) estimate all probable variants of polyhedration and confirm only those combinations of S_I^{**} planes, which can produce together with S_F and S_I^* all possible tetrahedrons.
- 3) All S_F , S_I^* and selected at the second step planes S_I^{**} form tetrahedrons of two types, with and without the inner diagonals.

The New Algorithm put out all possible variants of polyhedration at competition of inner diagonal elements: lines and planes. So, the last step is to find out experimentally which of inner diagonals and planes must participate in polyhedration.

It permits to find tetrahedrons, which the ZK Algorithm can not identify.

4. Polyhedration of the system K,Li,Ba||F,WO₄

All polyhedron vertices of the system K,Li,Ba||F,WO₄ with four binary compounds [8] are enumerated: $x_1=KF$, $x_2=LiF$, $x_3=BaF_2$, $x_4=K_2WO_4$, $x_5=Li_2WO_4$, $x_6=BaWO_4$, $x_7=D_1=LiBaF_3$, $x_8=D_2=K_3FWO_4$, $x_9=D_3=LiKWO_4$, $x_{10}=D_4=K_2Ba(WO_4)_2$ (Fig. 2).

As any binary compound on the side of a ternary system (excluding the common edges of two reciprocal systems!) should be connected with opposite vertices of the prism, then the compound $x_7=D_1=LiBaF_3$ may be connected with vertices x_4 , x_8 , x_9 , x_{10} , and $x_9=D_3=LiKWO_4$ – with x_3 , x_7 , and $x_{10}=D_4=K_2Ba(WO_4)_2$ – with x_2 , x_7 (Fig. 2).

Inner diagonals must not be intersected inside the prism, so it is necessary to enquire all possible variants of their intersections (analytically, by the solving of corresponding equations) and then to analyze them. Results of types “inner cross-section exists” (“+”) or “it is absent” (“-”) are in the Table 1. (Obviously, lines $x_4 x_7$, $x_7 x_8$, $x_7 x_9$, $x_7 x_{10}$ have a common point x_7 , lines $x_2 x_{10}$ and $x_7 x_{10}$ – common point x_{10} , lines $x_3 x_9$ and $x_7 x_9$ – common point x_9 , but the inner intersections on the faces or inside the prism are prohibited).

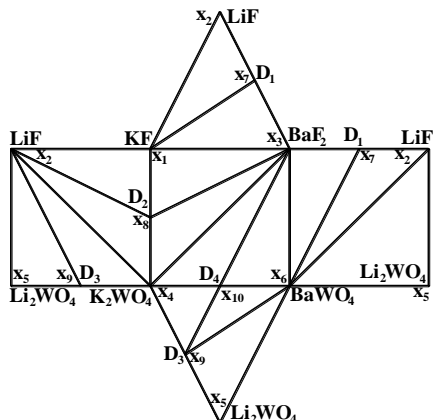


Figure 2. – Faces of the prism $K, Li, Ba || F, WO_4$

Table 1. Variants of possible cross-sections of inner diagonals

	x_2x_{10}	x_3x_9	x_4x_7	x_7x_8	x_7x_9	x_7x_{10}
x_2x_{10}	*	+	–	–	+	–
x_3x_9		*	–	–	–	+
x_4x_7			*	–	–	–
x_7x_8				*	–	–
x_7x_9					*	–

As lines x_4x_7 and x_7x_8 have no inner intersections, they are the doubtless diagonals. The line x_2x_{10} is intersected with x_3x_9 and x_7x_9 . Alternative to x_2x_{10} diagonal x_3x_9 can coexist only with the diagonal x_7x_9 . (Course, they coexist with $x_4x_7+x_7x_8$). So, it is necessary to testify the variants with alternative diagonals x_2x_{10} and x_3x_9 : $x_2x_{10}+x_4x_7+x_7x_8+x_7x_{10}$, $x_3x_9+x_4x_7+x_7x_8+x_7x_9$. And third variant has no both alternative diagonals x_2x_{10} and x_3x_9 : $x_4x_7+x_7x_8+x_7x_9+x_7x_{10}$.

Table 2. Search possible variants of polyhedrons according to interrelations (2)

L_I	Diagonals	Inner planes	Tetrahedrons $S_I=2+V_E+2L_I$
0	-	$x_2x_6x_9$	$1 < 6$
1	x_7x_8	$x_2x_6x_9+x_1x_7x_8$, $x_2x_7x_8, x_3x_7x_8$	$1+3=4 < 8$
1	x_7x_{10}	$x_2x_6x_9+x_3x_7x_{10}, x_6x_7x_{10}$	$1+2=3 < 8$
2	$x_7x_8+x_7x_{10}$	$x_2x_6x_9+x_1x_7x_8, x_2x_7x_8$, $x_3x_7x_8+x_3x_7x_{10}, x_6x_7x_{10}$	$1+3+2=6 < 10$
2	$x_2x_{10}+x_7x_{10}$	$x_2x_6x_9+x_2x_4x_{10}, x_2x_6x_{10}, x_2x_7x_{10}$, $x_2x_9x_{10}+x_3x_7x_{10}, x_6x_7x_{10}$	$1+4+2=7 < 10$
2	$x_3x_9+x_7x_9$	$x_2x_6x_9+x_3x_4x_9, x_3x_6x_9, x_3x_7x_9$,	$1+4+3=8 < 10$

		$x_3x_9x_{10}+x_2x_7x_9, x_6x_7x_9, x_7x_9x_{10}$	
3	$x_2x_{10}+x_7x_8+$ $+x_7x_{10}$	$x_2x_6x_9+x_2x_4x_{10}, x_2x_6x_{10}, x_2x_7x_{10},$ $x_2x_9x_{10}+x_1x_7x_8, x_2x_7x_8,$ $x_7x_8+x_3x_7x_{10}, x_6x_7x_{10}$	$1+4+3+2=$ $=10<12$
3	$x_3x_9+x_7x_8+$ $+x_7x_9$	$x_2x_6x_9+x_3x_4x_9, x_3x_6x_9, x_3x_7x_9,$ $x_9x_{10}+x_1x_7x_8, x_2x_7x_8,$ $x_3x_7x_8+x_2x_7x_9, x_6x_7x_9, x_7x_9x_{10}$	$1+4+3+3=$ $=11<12$
4	$x_2x_{10}+x_4x_7+$ $+x_7x_8+x_7x_{10}$	$x_2x_6x_9+x_2x_4x_{10}, x_2x_6x_{10}, x_2x_7x_{10},$ $x_2x_9x_{10}+x_2x_4x_7, x_3x_4x_7, x_4x_7x_8,$ $x_4x_7x_9, x_4x_7x_{10}+x_1x_7x_8, x_2x_7x_8,$ $x_3x_7x_8+x_3x_7x_{10}, x_6x_7x_{10}$	$1+4+5+3+2=$ $=15-1=14=14$ <i>$x_4x_7x_9$ is excluded</i>
4	$x_3x_9+x_4x_7+$ $+x_7x_8+x_7x_9$	$x_2x_6x_9+x_3x_4x_9, x_3x_6x_9, x_3x_7x_9,$ $x_3x_9x_{10}+x_2x_4x_7, x_3x_4x_7, x_4x_7x_8,$ $x_4x_7x_9, x_4x_7x_{10}+x_1x_7x_8, x_2x_7x_8,$ $x_3x_7x_8+x_2x_7x_9, x_6x_7x_9, x_7x_9x_{10}$	$1+4+5+3+3=$ $=16-2=14=14$ <i>$x_4x_7x_{10}, x_7x_9x_{10}$ are excluded</i>
4	$x_4x_7+x_7x_8+$ $+x_7x_9+x_7x_{10}$	$x_2x_6x_9+x_2x_4x_7, x_3x_4x_7, x_4x_7x_8,$ $x_4x_7x_9, x_4x_7x_{10}+x_1x_7x_8, x_2x_7x_8,$ $x_3x_7x_8+x_2x_7x_9, x_6x_7x_9,$ $x_7x_9x_{10}+x_3x_7x_{10}, x_6x_7x_{10}$	$1+5+3+3+2=14$ $14=14$

As the system has $V_E=4$ binary compounds (x_7, x_9, x_{10} are on the upper triangular face of the prism, x_8 is on its vertical edge), then, according to formulas (2):

$$L_E=9+V_E=13, L_F=3+2V_E=11, S_F=8+2V_E=16,$$

numbers of inner diagonals L_I ($x_2x_{10}, x_3x_9, x_7x_4, x_7x_8, x_7x_9$ and x_7x_{10}) may vary from 0 to 6, numbers of inner planes $S_I=2+V_E+2L_I$ may vary from 6 at $L_I=0$ to 18 at $L_I=6$, and numbers of 3D simplexes $T=3+V_E+L_I$ may vary from 7 at $L_I=0$ to 13 at $L_I=6$.

Step 1: All $L_E+L_F+L_I=13+11+6=30$ links are written:

- $L_I=6$ possible inner diagonals $x_2x_{10}, x_3x_9, x_4x_7, x_7x_8, x_7x_9, x_7x_{10}$;
- $L_E=13$ edges $x_1x_2, x_1x_3, x_1x_8, x_2x_5, x_2x_7, x_3x_6, x_3x_7, x_4x_8, x_4x_9, x_4x_{10}, x_5x_6, x_5x_9, x_6x_{10}$;
- $L_F=11$ diagonals on faces $x_1x_7, x_2x_4, x_2x_6, x_2x_8, x_2x_9, x_3x_4, x_3x_8, x_3x_{10}, x_6x_7, x_6x_9, x_9x_{10}$.

Step 2: All permitted planes (37 2D simplexes) are formed from 30 connections:

- $S_F=16$ planes on faces ($x_1x_2x_7, x_1x_3x_7$), ($x_4x_9x_{10}, x_5x_6x_9, x_6x_9x_{10}$), ($x_1x_3x_8, x_3x_4x_8, x_3x_4x_{10}, x_3x_6x_{10}$), ($x_1x_2x_8, x_2x_4x_8, x_2x_4x_9, x_2x_5x_9$), ($x_2x_5x_6, x_2x_6x_7, x_3x_6x_7$);
- $S_I^*=1$ plane $x_2x_6x_9$ inside the prism without inner diagonals;
- $S_I^{**}=20$ planes with six different inner diagonals: x_2x_{10} ($x_2x_4x_{10}, x_2x_6x_{10}, x_2x_7x_{10}, x_2x_9x_{10}$), x_3x_9 ($x_3x_4x_9, x_3x_6x_9, x_3x_7x_9, x_3x_9x_{10}$), x_4x_7 ($x_2x_4x_7, x_3x_4x_7, x_4x_7x_8, x_4x_7x_9, x_4x_7x_{10}$), x_7x_8 ($x_1x_7x_8, x_2x_7x_8, x_3x_7x_8$), x_7x_9 ($x_2x_7x_9, x_6x_7x_9, x_7x_9x_{10}$), x_7x_{10} ($x_3x_7x_{10}, x_6x_7x_{10}$).

Step 3: Variants of polyhedration with four inner diagonals can be realized

The inner plane $x_2x_6x_9$ and $S_F=16$ planes on faces together with $S_I=2+V_E+2L_I=14$ inner planes at $L_I=4$ diagonals produce $T=3+V_E+L_I=11$ ($V_E=L_I=4$) tetrahedrons (Fig. 3):

- a tetrahedron $x_2x_5x_6x_9$ - without inner diagonals;
- 4 tetrahedrons $x_1x_2x_7x_8$, $x_1x_3x_7x_8$, $x_2x_4x_7x_8$, $x_3x_4x_7x_8$, produced by diagonals $x_4x_7+x_7x_8$;
- 6 tetrahedrons (on dependence of a choice of second pair of diagonals).

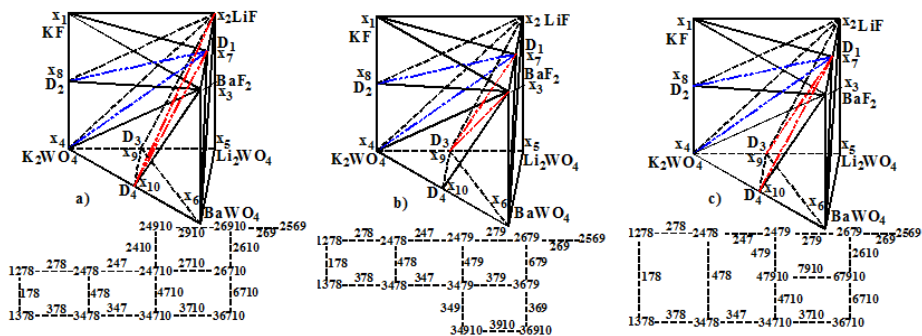


Figure 3. – Three variants of polyhedration by alternative inner diagonals:
 $x_2x_4x_9x_{10}$, $x_2x_4x_7x_{10}$, $x_3x_4x_7x_{10}$, $x_2x_6x_9x_{10}$, $x_2x_6x_7x_{10}$, $x_3x_6x_7x_{10}$ by $x_2x_{10}+x_7x_{10}$ (a);
 $x_2x_4x_7x_9$, $x_3x_4x_7x_9$, $x_3x_4x_9x_{10}$, $x_2x_6x_7x_9$, $x_3x_6x_7x_9$, $x_3x_6x_9x_{10}$ by $x_3x_9+x_7x_9$ (b);
 $x_2x_4x_7x_9$, $x_3x_4x_7x_{10}$, $x_4x_7x_9x_{10}$, $x_2x_6x_7x_9$, $x_6x_7x_9x_{10}$, $x_3x_6x_7x_{10}$ by $x_7x_9+x_7x_{10}$ (c)

Conclusions

1) Software, based by the ZK Algorithm [4, 5], had been elaborated. It consists of four steps: - to represent n-component system as a graph, - to record the adjacency list with the adjacency matrix zero elements, - to multiply the adjacency list elements accounting the absorption law, - to fulfill inversion; - to sort out all possible polyhedration variants and to drop the ones, non-real geometrically or non-supported by experiment. Systems with solid solutions requires additional virtual diagonals. Polyhedration with inner isolated points is fulfilled in two stages: without inner points at first and with inner points in micro-complexes.

2) Interrelations between the number of inner diagonal planes and simplexes on the one hand and non-zero elements of the adjacency matrix on the other hand had been got. They are very useful for the original data and program output verification and give a possibility to estimate the polyhedration result a priori.

3) The New Algorithm has been elaborated. It may be applied for polyhedration of quaternary and more complex multicomponent systems

(including the reciprocal ones) and it is able to identify all variants of polyhedration, including situations, when the ZK Algorithm can not “recognize” some simplexes.

4) Topological Rules embrace interrelations between all geometrical elements of polyhedron, including its binary, ternary subsystems and binary, ternary, quaternary compounds (systems with quaternary compounds were not yet analyzed).

References

1. A.S. Trunin, A.V. Chuvakov, O.E. Morgunova, Differentiation and Construction of Trees of Phases of Multicomponent Salt Systems with Solid Solutions, Doklady Physical Chemistry, 437(1) (2011) 54-59.
2. V.I. Lutsyk, V.P. Vorob'eva, Matrix solution for polyhedration of Na-K-Ca-Cl-N-O, Na-K-MoW-F-O and Na-Ba-B-F-O systems, IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng., 18(22) (2011), 1-4 (http://iopscience.iop.org/1757-899X/18/22/222005/pdf/1757-899X_18_22_222005.pdf).
3. V.I. Lutsyk, V.P. Vorob'eva, Relation Between the Mass-Centric Coordinates in Multicomponent Salt Systems, Z. Naturforsch. A, 63a (2008) 513-518.
4. A.A. Zykov, Theory of Finite Graphs, Nauka Pub. House, Novosibirsk, 1969.
5. A.G. Kraeva, L.S. Davydova, V.N. Pervikova et al., Method for Dividing (Triangulation) of Multicomponent Reciprocal Systems Concentration Diagrams with Complex Compounds by Graphs and Computers, Doklady USSR Academy of Sciences, 222(4) (1972) 850-853.
6. V.I. Lutsyk, V.P. Vorob'eva, O.G. Sumkina, Reciprocal Borate Systems Polyhedration, in: F. Kognoli (Ed.), Metals and Materials Processing in a Clean Environment, Vol. 4 “Materials Recycling, Silicon for Photovoltaic Cells, Boron & Borates”, Floren Star Outreach Pub. House, 2012, pp. 587-604 (www.floren.org/books/index.php).
7. V.I. Lutsyk, V.P. Vorob'eva, O.G. Sumkina, Triangulation of Ternary Systems with Barium Borate, Crystallography Reports, 57(7) (2012) 115-125.
8. A.M. Gasanaliev, P.A. Akhmedova, B.Yu. Gamataeva, Differentiation of Multinary Systems with Inner (Latent) Secants, Rus. J. Inorgan. Chem., 55 (2010) 1970-1982.
9. Voskresenskaya, N.K., Evseeva N.N., Berul S.I. et al (1961). Reference of Melting of Systems of Waterless Inorganic Salts. Binary Systems. Vol. I. USSR Academy of Sciences Publishing House, Moscow.

Ламуева Марина Владимировна, аспирант, Институт физического материаловедения СО РАН, Россия, 670047, г. Улан-Удэ, ул.Сахьяновой, д. 6, тел.+7 983 4298834, e-mail: marina_bgu@mail.ru

Воробьева Вера Павловна, доктор физико-математических наук, Институт физического материаловедения СО РАН, Россия, 670047, г.Улан-Удэ, ул.Сахьяновой, д. 6, тел. +7 (3012) 433224, e-mail: vluts@ipms.bscnet.ru

Луцык Василий Иванович, доктор химических наук, профессор, Институт физического материаловедения СО РАН, Россия, 670047, г. Улан-Удэ, ул.Сахьяновой, д. 6, тел. +7 (3012) 433224, e-mail: vluts@ipms.bscnet.ru

Парфенова Мария Дмитриевна, студент, Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 40, тел. +7 (3012) 433224, e-mail: vluts@ipms.bscnet.ru

Lamueva Marina Vladimirovna, post-graduate student, Institute of Physical Materials Science SB RAS

Vorob'eva Vera Pavlovna, Doctor of Physics and Mathematics, Institute of Physical Materials Science SB RAS

Lutsyk Vasily Ivanovich, Doctor of Chemical Sciences, Full Professor, Institute of Physical Materials Science SB RAS

Parfenova Mariya Dmitrievna, student, Tomsk State University of Control Systems and Radio-electronics

О НЕКОТОРЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ АСПЕКТАХ В ТЕОРИИ КВАНТОВЫХ ВЕНТИЛЕЙ¹

Аннотация. Доклад посвящен обсуждению некоторых известных результатов из теории квантовых вентилей (данная теория активно развивается в последние годы в свете квантовых компьютеров): 1) о «ландшафтах управления», описываемых целевыми функционалами на всевозможных допустимых управлениях относительно управляемых квантовых систем (в частности, отметим статью Р. Чакрабарти, Х. Рабица); 2) о характере экстремумов (наличие / отсутствие локальных экстремумов, не являющихся глобальными) целевых функционалов в некоторых классах задач оптимального управления квантовыми системами в связи с однокубитовыми вентилями, причем в зависимости от вентиля, гамильтониана и продолжительности управления (на основе статей А.Н. Печеня, Н.Б. Ильина); 3) о значимости разложения Картана, камеры Вейля и локальных инвариантов в теории двухкубитовых вентилей, рассматриваемых на группе $SU(4)$, в связи с соответствующими задачами оптимального управления (отметим результаты из работ М.Х. Герца, Т. Каларко, К.П. Кох, К.Б. Уэйли и других).

Ключевые слова: квантовые вентили, оптимальное управление, разложение Картана, камера Вейля.

© *О. В. Morzhin*

ABOUT SOME GEOMETRIC ASPECTS IN THE THEORY OF QUANTUM GATES

Abstract. The talk is devoted to discussion of some known results from the theory of quantum gates (this theory is actively developed in recent years in the light of quantum computers): 1) on "control landscapes" described by cost functionals on all possible admissible controls with respect to controlled quantum systems (in particular, we note an article by R. Chakrabarti and H. Rabitz); 2) on the nature of the cost functionals' extrema (presence / absence of local extrema that are not global) in some classes of optimal control problems for quantum systems with respect to single-qubit gates, and depending on the gate, Hamiltonian, and control duration (based on some articles by A.N. Pechen and N.B. Il'in); 3) on the importance of the Cartan decomposition, the Weyl chamber, and the local invariants in the theory of two-qubit gates that are considered on the $SU(4)$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01388 – «Математические методы для задач квантовых технологий и динамика открытых квантовых систем»).

group, in connection with the corresponding optimal control problems (we note the results from some publications by M.H. Goerz, T. Calarco, C.P. Koch, K.B. Whaley, et al).

Keywords: quantum gates, optimal control, Cartan decomposition, Weyl chamber.

Введение

В последние годы активно развивается научное направление по *квантовым вычислениям* и *квантовым компьютерам* (например, [1 – 4]). Еще в 1994 г. П. Шор предложил высокоэффективный алгоритм [5] по факторизации чисел на квантовом компьютере, что показало необходимость [3] в создании более эффективных криптографических алгоритмов. Другим примером является *квантовое машинное обучение* [6] с ориентацией на существенное повышение эффективности работы с большими объемами данных (так, в [7] представлен квантовый метод опорных векторов).

В отличие от классических компьютеров, в которых в основе лежит понятие бита, в теории квантовых компьютеров [1 – 4] базовыми понятиями являются *кубит* – *квантовый бит* (qubit – quantum bit), *квантовый вентиль* (quantum gate) – базовая операция над кубитами. В качестве примеров квантовых вентилях [1 – 4] укажем однокубитовый вентиль Адамара

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{двухкубитовые вентили} \quad CNOT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$CPHASE = \text{diag}\{1,1,1,-1\}.$$

В докладе отметим *сложность реализации квантовых вентилях*, которая подтверждается, в том числе, опорой (например, [8 – 11]) на *математическую теорию оптимального управления* при моделировании такого когерентного *управления квантовыми системами*, которое позволяет реализовать унитарное преобразование, означающее некоторый квантовый вентиль. В качестве физической основы для реализации кубитов речь может идти, например, об энергетических уровнях молекулы Na_2 [8].

В оптимальном управлении динамическими системами одним из ключевых является вопрос о поиске *глобального экстремума* (например, [12]). Понятно, что геометрически множество значений целевого функционала на всевозможных управлениях может быть достаточно сложным. В *оптимальном квантовом управлении* также возникает вопрос о геометрии множества значений целевого функционала (существует термин «ландшафт управления»), в связи с чем в докладе отметим статью [9] Р. Чакрабарти, Х. Рабица и работы [10, 11] А.Н. Печеня, Н.Б. Ильина. В [10,11]

даны интересные результаты по исследованию вопроса о наличии / отсутствии локальных экстремумов, не являющихся глобальными, в задачах оптимального управления в связи с реализацией однокубитовых вентилей.

Давно известно *разложение Картана* в теории алгебр Ли [13]. В докладе обсудим значение разложения Картана, *камеры Вейля, локальных инвариантов* в теории квантовых вентилей, опираясь на работы [14 – 19] (И. Вала, М.Х. Герц, Т. Каларко, К.П. Кох, В.С. Малиновский, К.Б. Уэйли, Ч. Чжан и другие).

1. О «ландшафтах управления» и характере экстремумов целевых функционалов

Вместе с обсуждением понятия «ландшафт управления» и статьи [9] в докладе отметим публикации [10, 11] (А.Н. Печень, Н.Б. Ильин), в которых для важных классов задач оптимального управления по реализации однокубитовых вентилей доказаны теоремы, показывающие:

- 1) в случае класса задач из [10] «ловушки» отсутствуют, т.е. нет локальных экстремумов, не являющихся глобальными экстремумами;
- 2) для класса задач из [11] «ловушек» нет для почти всех рассматриваемых вентилей и гамильтонианов системы при любых, сколь угодно малых временах управления.

2. О значении разложения Картана, камеры Вейля, локальных инвариантов в связи с реализацией квантовых вентилей

В докладе дадим краткий обзор, основанный на публикациях [14 – 19] и посвященный теме представления 2-кубитовых вентилей, рассматриваемых на группе $SU(4)$, через разложение Картана с визуализацией в камере Вейля и рассмотрением локальных инвариантов. Как известно [14 – 19], любой 2-кубитовый унитарный оператор $U \in SU(4)$ может быть представлен в виде $U = k_1 A k_2$, где

$$A = \exp\left(\frac{i}{2}(c_1 \sigma_x \otimes \sigma_x + c_2 \sigma_y \otimes \sigma_y + c_3 \sigma_z \otimes \sigma_z)\right); \quad \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z - \text{матрицы}$$

Паули; $k_1, k_2 \in SU(2) \otimes SU(2)$ – локальные вентили; c_1, c_2, c_3 – вещественные числа. Например, про вентиль *CNOT* известно (например, [18]), что он может быть представлен в виде $CNOT = (1 \otimes H)CPHASE(1 \otimes H)$, т.е. в разложении для *CNOT* используется вентиль Адамара – однокубитовый вентиль; 1 означает единичную матрицу. Вентили *CNOT* и *CPHASE* отличаются только локальными операциями и являются локально эквивалентными ($CNOT \sim CPHASE$), т.е. рассматривают

класс эквивалентности [CNOT]. Точка (c_1, c_2, c_3) в трехмерном пространстве, точнее в камере Вейля (имеющем форму тетраэдра) представляет локальный класс эквивалентности. Как указано, например, в [16], в случае [CNOT] имеем $(c_1, c_2, c_3) = (\pi/2, 0, 0)$ и, к примеру, для вентиля

$$BGATE = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{8} & 0 & 0 & i \sin \frac{\pi}{8} \\ 0 & \cos \frac{3\pi}{8} & i \sin \frac{3\pi}{8} & 0 \\ 0 & i \sin \frac{3\pi}{8} & \cos \frac{3\pi}{8} & 0 \\ i \sin \frac{\pi}{8} & 0 & 0 & \cos \frac{\pi}{8} \end{pmatrix}$$

координаты $(c_1, c_2, c_3) = (\pi/2, \pi/4, 0)$. Кроме того, классы эквивалентности вентиля определяются в терминах локальных инвариантов (например, [18])

$$g_1 = \frac{1}{4} [\cos(2c_1) + \cos(2c_2) + \cos(2c_3) + \cos(2c_1)\cos(2c_2)\cos(2c_3)],$$

$$g_2 = \frac{1}{4} \sin(2c_1)\sin(2c_2)\sin(2c_3), \quad g_3 = \cos(2c_1) + \cos(2c_2) + \cos(2c_3)$$

в том смысле, что два вентиля с одними и теми же (g_1, g_2, g_3) отличаются только однокубитовыми операциями. Понятно, что описанные результаты важны с точки зрения проектирования квантовых технологий. И в докладе рассмотрим некоторые детали из [14 – 19], включая обсуждение целевого функционала [16] в задаче оптимального управления (в приложении А статьи [16] приведена детальная запись целевого функционала, использующего локальные инварианты, причем приведенный в [16] целевой функционал является полиномом высокой степени по базисным состояниям, определяемых на решениях уравнения Шредингера).

Литература

1. Валиев К.А. Квантовые компьютеры и квантовые вычисления // Успехи физ. наук. 2005. Т.175, № 1. С. 3–39. <http://mi.mathnet.ru/ufn135>
2. Холево А.С. Квантовые системы, каналы, информация. М.: МЦНМО, 2010. 328 с. <http://biblio.mccme.ru/node/2225>
3. Nielsen M.A., Chuang I.L. Quantum computation and quantum information solutions: 10th Anniversary Edition. Cambridge Univ. Press, 2011. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511976667>
4. Williams C.P. Explorations in quantum computing. London: Springer-Verlag,

2011. DOI: 10.1007/978-1-84628-887-6.

5. Shor P.W. Algorithms for quantum computation: Discrete logarithms and factoring // Proc. of the 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science. IEEE Computer Society Press, 1994. Pp. 124–134. <https://doi.org/10.1109/SFCS.1994.365700>

6. Wittek P. Quantum machine learning: What quantum computing means to data mining. Elsevier, 2014. <https://www.elsevier.com/books/quantum-machine-learning/wittek/978-0-12-800953-6>

7. Rebentrost P., Mohseni M., Lloyd S. Quantum support vector machine for big data classification // Phys. Rev. Lett. 2014. 113, 130503. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.113.130503>

8. Palao J.P., Kosloff R. Optimal control theory for unitary transformations // Phys. Rev. A. 2003. Vol. 68, 062308. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.68.062308>

9. Chakrabarti R., Rabitz H. Quantum control landscapes // International Reviews in Physical Chemistry. 2007. Vol. 26. Issue 4. Pp. 671 – 735. DOI: 10.1080/01442350701633300

10. Pechen A.N., Il'in N.B. Coherent control of a qubit is trap-free // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2014. Vol. 285. Issue 1. Pp. 233–240. <https://doi.org/10.1134/S0081543814040166>

11. Pechen A.N., Il'in N.B. On extrema of the objective functional for short-time generation of single-qubit quantum gates // Izvestiya Mathematics. 2016. Vol. 80, No. 6. Pp. 1200–1212. <https://doi.org/10.1070/IM8567>

12. Горнов А.Ю. Вычислительные технологии решения задач оптимального управления. Новосибирск: Наука, 2009. 278 с.

13. Helgason S. Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces. New York, London: Academic Press, 1962. 486 p.

14. Zhang J., Vala J., Sastry S., Whaley K.B. Geometric theory of nonlocal two-qubit operations // Phys. Rev. A. 2003. Vol. 67, 042313. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.67.042313>

15. Zhang J., Vala J., Sastry S., Whaley K.B. Exact two-qubit universal quantum circuit // Phys. Rev. Lett. 2003. Vol. 91, No. 2, 027903. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.91.027903>

16. Müller M.M., Reich D.M., Murphy M., et al. Optimizing entangling quantum gates for physical systems // Phys. Rev. A. 2011. Vol. 84, 042315. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.84.042315>

17. Malinovsky V.S., Sola I.R., Vala J. Phase-controlled two-qubit quantum gates // Phys. Rev. A. 2014. Vol. 89, 032301. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.89.032301>

18. Goerz M. Optimizing robust quantum gates in open quantum systems. Dissertation. Univ. Kassel (Supervisor: C.P. Koch), 2015. https://michaelgoerz.net/research/diss_goerz_letter.pdf

19. Goerz M.H., Motzoi F., Whaley K.B., Koch C.P. Charting the circuit QED design landscape using optimal control theory // npj Quantum Info. 2017. Vol. 3, 37. <https://doi.org/10.1038/s41534-017-0036-0>

Моржин Олег Васильевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Математического института им. В.А. Стеклова РАН, 119991, Москва, ул. Губкина, 8, e-mail: morzhin.oleg@yandex.ru

Morzhin Oleg Vasil'evich, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, V.A. Steklov Mathematical Institute of RAS

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ ТЕЛ

Аннотация. В работе рассматривается полый цилиндр. На одно из оснований цилиндра оказывается внешнее воздействие, заданное осевым смещением. Вычисляются локальные напряжения, возникающие в зоне контакта полого цилиндра с жестким элементом. Для решения задачи строится равномерная сетка по каждому из трех координатных направлений. Производные аппроксимируются симметричными разностями. При вычислении собственным весом цилиндра пренебрегают. Поскольку величина напряжения зависит от степени деформации и от упругих свойств цилиндра, начальное решение производится в перемещениях. Затем, используя реологическую модель линейного упругого тела, найдены компоненты тензора искомых напряжений. Вычисления произведены в цилиндрической системе координат. Моделирование контактного взаимодействия двух тел осуществлено с помощью пакета символьных вычислений «Mathematica». Результаты вычислений представлены графически.

Ключевые слова: контактное воздействие, упругие перемещения точек, обобщенный закон Гука, касательные и нормальные напряжения, метод простой итерации, центральная аппроксимация.

© Т. И. Nekipelova, S. G.-Ts. Tsydypov, V. B. Tsyrenova

MATHEMATICAL MODELING OF TWO-BODY INTERACTION

Abstract. This article considers a hollow cylinder. One base of the cylinder is effected by external influence of axial displacement. Local stresses arising in the contact zone between a hollow cylinder and a rigid element are calculated. To solve the problem, a uniform grid is constructed for each of the three coordinate directions. The derivatives are approximated by symmetric differences. When calculating the cylinder's own weight is neglected. Since the stress value depends on the degree of deformation and elastic properties of the cylinder, the initial solution is made in displacements. Then, using a rheological model of a linear elastic body, the tensor components of the desired stresses are found. Calculations are made in cylindrical coordinate system. Two-body contact interaction is modeled with «Mathematica» symbolic calculations. Calculation results are graphically represented.

Keywords: contact action, elastic displacements of points, generalized Hooke's law, tangent and normal stresses, simple iteration method, central approximation.

Введение

Задача вычисления максимальных локальных нормальных и касательных напряжений, возникающие в зоне контакта цилиндра с жестким элементом, рассмотрена в работе [2]. В этой же работе предложена вычислительная технология, реализующая задачи линейной теории упругости в цилиндрических координатах. Для вычисления строится сетка с экспоненциальным расположением узлов по каждому из трех координатных направлений.

В настоящей работе для разрешения поставленной задачи используется технология, предложенная в работе [2]. Вычисления производятся на равномерной сетке на базе математического пакета “Mathematica”.

1. Постановка задачи

Рассмотрим полый цилиндр следующих размеров: $r_1 = 10^{-2} \text{ м}$ - внешний радиус цилиндра, $r_2 = \frac{3}{5} r_1 = 6 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ - внутренний радиус цилиндра, $h = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ - высота цилиндра, $\nu = 0.3$ - коэффициент Пуассона, $E = 21 \cdot 10^{10} \text{ Па}$. На одно из оснований цилиндра окажем внешнее воздействие, заданное осевым смещением $w_0 = 10^{-1} \text{ м}$. Найдем напряжения, возникающие в зоне контакта.

Рассмотрим уравнения равновесия в перемещениях в цилиндрической системе координат:

$$\nabla^2 u + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{r(1-2\nu)} \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} + \frac{\rho}{G} f_\varphi = 0, \quad (1)$$

$$\nabla^2 v - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r^2} + \frac{1}{r(1-2\nu)} \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{\rho}{G} f_r = 0, \quad (2)$$

$$\nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \frac{\rho}{G} f_z = 0, \quad (3)$$

где u, v, w - окружное, радиальное и осевое смещения; r, φ, z - цилиндрические координаты; ρ - плотность среды; f_r, f_φ, f_z - проекции массовой силы на оси выбранной системы координат; $G = E/(2(1+\nu))$ - модуль упругости при сдвиге; ν - коэффициент Пуассона; E - модуль

Юнга; $\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ -оператор Лапласа;

$\Theta = \frac{1}{r} \frac{\partial(vr)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z}$ -объемная деформация.

Рассмотрим случай $f_r = f_\varphi = f_z = 0$. В уравнениях (1)-(3) подставим Θ , раскроем оператор ∇^2 . Умножив каждое из уравнений (1)-(3) на r^2 и применив центральную аппроксимацию, получим следующие уравнения в перемещениях:

$$\begin{aligned} & r(i)(u(i+1, j, k) - u(i-1, j, k))/(2h_1) + \\ & + r^2(i)(u(i+1, j, k) - 2u(i, j, k) + u(i-1, j, k))/h_1^2 + \\ & + (2 - 2\nu)(u(i, j+1, k) - 2u(i, j, k) + \\ & + u(i, j-1, k))/(h_2^2(1 - 2\nu)) + r^2(i)(u(i, j, k+1) - \\ & - 2u(i, j, k) + u(i, j, k-1))/h_3^2 - \\ & - u(i, j, k) + au(i, j, k) = 0; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & r^2(i)(2 - 2\nu)(v(i+1, j, k) - 2v(i, j, k) + \\ & + v(i-1, j, k))/(h_1^2(1 - 2\nu)) + (v(i, j+1, k) - 2v(i, j, k) + \\ & + v(i, j-1, k))/h_2^2 + r^2(i)(v(i, j, k+1) - \\ & - 2v(i, j, k) + v(i, j, k-1))/h_3^2 + \\ & + r(i)(2 - 2\nu)(v(i+1, j, k) - v(i-1, j, k))/(h_1(1 - 2\nu)) - \\ & - (2 - 2\nu)(v(i, j, k) + av(i, j, k))/(1 - 2\nu) = 0; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & r^2(i)(w(i+1, j, k) - 2w(i, j, k) + w(i-1, j, k))/h_1^2 + \\ & + (w(i, j+1, k) - 2w(i, j, k) + w(i, j-1, k))/h_2^2 + \\ & + r^2(i)(2 - 2\nu)(w(i, j, k+1) - 2w(i, j, k) + \\ & + w(i, j, k-1))/(h_3^2(1 - 2\nu)) + r(i)(w(i+1, j, k) - \\ & - w(i-1, j, k))/(2h_1) + aw(i, j, k) = 0; \end{aligned} \quad (6)$$

где h_1, h_2, h_3 - шаги сетки соответственно по r, φ, z ,

$$\begin{aligned}
au(i, j, k) &= ((3 - 4\nu)(v(i, j + 1, k) - v(i, j - 1, k))/(2h_1) + \\
&+ r(i)(v(i + 1, j + 1, k) - v(i + 1, j - 1, k) - \\
&- v(i - 1, j + 1, k) + v(i - 1, j - 1, k))/(4h_1h_2) + \\
&+ r(i)(w(i, j + 1, k + 1) - w(i, j + 1, k - 1) - \\
&- w(i, j - 1, k + 1) + w(i, j - 1, k - 1))/(4h_2h_3))/(1 - 2\nu); \\
av(i, j, k) &= (r(i)(u(i + 1, j + 1, k) - u(i + 1, j - 1, k) - \\
&- u(i - 1, j + 1, k) + u(i - 1, j - 1, k))/(4h_1h_2) + \\
&+ r^2(i)(w(i + 1, j, k + 1) - w(i + 1, j, k - 1) - \\
&- w(i - 1, j, k + 1) + w(i - 1, j, k - 1))/(4h_1h_3) - \\
&- (3 - 4\nu)(u(i, j + 1, k) - u(i, j - 1, k))/(2h_2))/(1 - 2\nu), \\
aw(i, j, k) &= (r(i)(v(i, j, k + 1) - v(i, j, k - 1))/2h_3 + \\
&+ r^2(i)(v(i + 1, j, k + 1) - v(i + 1, j, k - 1) - \\
&- v(i - 1, j, k + 1) + v(i - 1, j, k - 1))/(4h_1h_3) + \\
&+ r(i)(u(i, j + 1, k + 1) - u(i, j + 1, k - 1) - \\
&- u(i, j - 1, k + 1) + u(i, j - 1, k - 1))/(4h_2h_3))/(1 - 2\nu).
\end{aligned}$$

Из соотношений (4)-(6) найдем $u(i, j, k), v(i, j, k), w(i, j, k)$. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
t_1(i, j, k) &= \frac{2r^2(i) + h_1r(i)}{2h_1^2}u(i + 1, j, k) + \\
&+ \frac{2r^2(i) - h_1r(i)}{2h_1^2}u(i - 1, j, k) + \\
&+ \frac{2 - 2\nu}{1 - 2\nu} \frac{1}{h_2^2} (u(i, j + 1, k) + u(i, j - 1, k)) + \\
&+ \frac{r^2(i)}{h_3^2} (u(i, j, k + 1) + u(i, j, k - 1)) + au(i, j, k), \\
q_1(i, j, k) &= 1 + \frac{r(i)}{2h_1} + \frac{2r^2(i)}{h_1^2} + \frac{2(2 - 2\nu)}{(1 - 2\nu)h_2^2} + \frac{2r^2(i)}{h_3^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_2(i, j, k) &= \frac{(2-2\nu)r(i)}{2(1-2\nu)h_1^2} ((2r(i) + h_1)v(i+1, j, k) + \\
&+ (2r(i) - h_1)v(i-1, j, k)) + \\
&+ \frac{v(i, j+1, k) + v(i, j-1, k)}{h_2^2} + \\
&+ \frac{r^2(i)(v(i, j, k+1) + v(i, j, k-1))}{h_3^2} + av(i, j, k), \\
q_2(i, j, k) &= \frac{2(2-2\nu)r^2(i)}{(1-2\nu)h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} + \frac{2r^2(i)}{h_3^2} + \frac{2-2\nu}{1-2\nu}, \\
t_3(i, j, k) &= \frac{r(i)}{2h_1^2} \times \\
&\times ((2r(i) + h_1)w(i+1, j, k) + (2r(i) - h_1)w(i-1, j, k)) + \\
&+ \frac{w(i, j+1, k) + w(i, j-1, k)}{h_2^2} + \frac{(2-2\nu)r^2(i)}{(1-2\nu)h_3^2}) \times \\
&\times (w(i, j, k+1) + w(i, j, k-1)) + aw(i, j, k), \\
q_3(i, j, k) &= \frac{2r^2(i)}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} + \frac{2(2-2\nu)r^2(i)}{(1-2\nu)h_3^2}.
\end{aligned}$$

Запишем формулы для определения значений перемещений во внутренних точках:

$$\begin{aligned}
u(i, j, k) &= \frac{t_1(i, j, k)}{q_1(i, j, k)}, v(i, j, k) = \frac{t_2(i, j, k)}{q_2(i, j, k)}, \\
w(i, j, k) &= \frac{t_3(i, j, k)}{q_3(i, j, k)}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Зададим начальные граничные условия. Для точек верхнего основания $u = 0, v = 0, w = w_0$. Для других граничных точек цилиндра $u = 0, v = 0, w = 0$. Пусть $i = \overline{0, c_1}, j = \overline{0, c_2}, k = \overline{0, c_3}$, где c_1, c_2, c_3 - число делений соответственно по радиусу, окружности и оси цилиндра. Приведем формулы, позволяющие производить итерационный перерасчет значений u, v, w для поверхностных точек цилиндра. Для точек верхнего основания

$$\begin{aligned}
u(i, j, c_3) &= u(i, j, c_3 - 1), v(i, j, c_3) = v(i, j, c_3 - 1), \\
w(i, j, c_3) &= w_0.
\end{aligned}$$

Для точек внутренней боковой поверхности

$$\begin{aligned}
 u(0, j, k) &= \\
 &= (r(0)u(1, j, k) + (r(1) - r(0))(v(0, j + 1, k) - \\
 &- v(0, j - 1, k))/(2h_2)) / r(1), v(0, j, k) = v(1, j, k), \\
 w(0, j, k) &= w(1, j, k) + \\
 &+ ((r(1) - r(0))v(0, j, k + 1) - v(0, j, k - 1))/(2h_3).
 \end{aligned}$$

Для точек внешней боковой поверхности:

$$\begin{aligned}
 u(c_1, j, k) &= (r(c_1)u(c_1 - 1, j, k) + (r(c_1) - r(c_1 - 1)) \times \\
 &\times (r(c_1) - r(c_1 - 1))(v(c_1, j + 1, k) - \\
 &- v(c_1, j - 1, k))/(2h_2)) / (r(c_1 - 1)), \\
 v(c_1, j, k) &= v(c_1 - 1, j, k), \\
 w(c_1, j, k) &= w(c_1 - 1, j, k) - \\
 &- ((r(c_1) - r(c_1 - 1))v(c_1, j, k + 1) - v(c_1, j, k - 1))/(2h_3).
 \end{aligned}$$

Для точек нижнего основания:

$$u(i, j, 0) = u(i, j, 1), \quad v(i, j, 0) = v(i, j, 1), \quad w(i, j, 0) = w(i, j, 1).$$

Для внутренних точек цилиндра итерационный перерасчет производится по формулам (7). Условие периодичности выражено следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
 u(i, c2, k) &= u(i, 0, k), \quad v(i, c2, k) = v(i, 0, k), \\
 w(i, c2, k) &= w(i, 0, k).
 \end{aligned}$$

2. Результаты расчетов

Рассмотрим полый цилиндр следующих размеров: $r_1 = 10^{-2}$ м - внешний радиус цилиндра, $r_2 = \frac{3}{5}r_1 = 6 \cdot 10^{-3}$ м - внутренний радиус цилиндра, $h = 5 \cdot 10^{-2}$ м - высота цилиндра, $\nu = 0.3$ - коэффициент Пуассона, $E = 21 \cdot 10^{10}$ Па. На одно из оснований цилиндра окажем внешнее воздействие, заданное осевым смещением $w_0 = 10^{-1}$ м. Найдем напряжения, возникающие в зоне контакта.

Для решения задачи получены числовые массивы окружного, радиального и осевого смещений u, v, w , найдены числовые массивы напряжений из обобщенного закона Гука

$\sigma_{i,j} = \lambda \delta_{i,j} \varepsilon_{k,k} + 2\mu \varepsilon_{i,j}$. Результаты вычислений $\sigma_{i,j}$ представлены графически на рис. 1- рис.6.

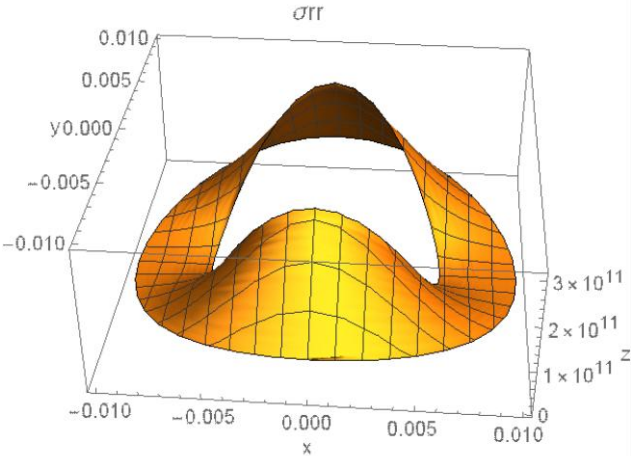


Рисунок 1.

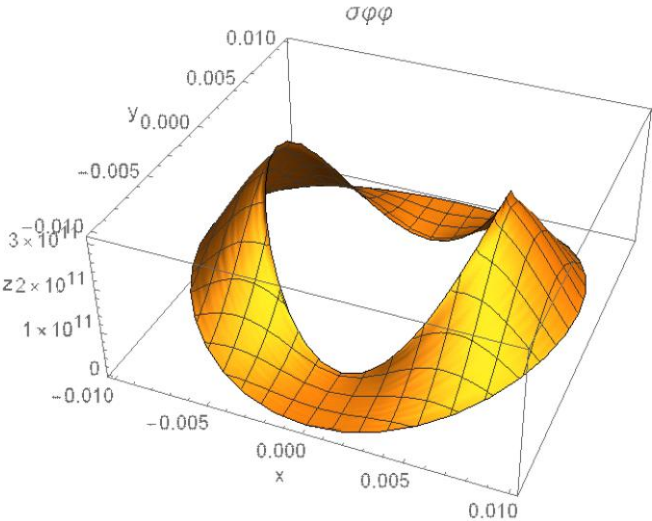


Рисунок 2.

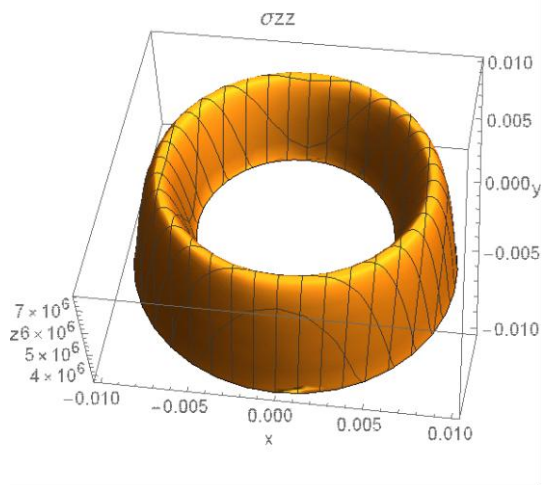


Рисунок 3.

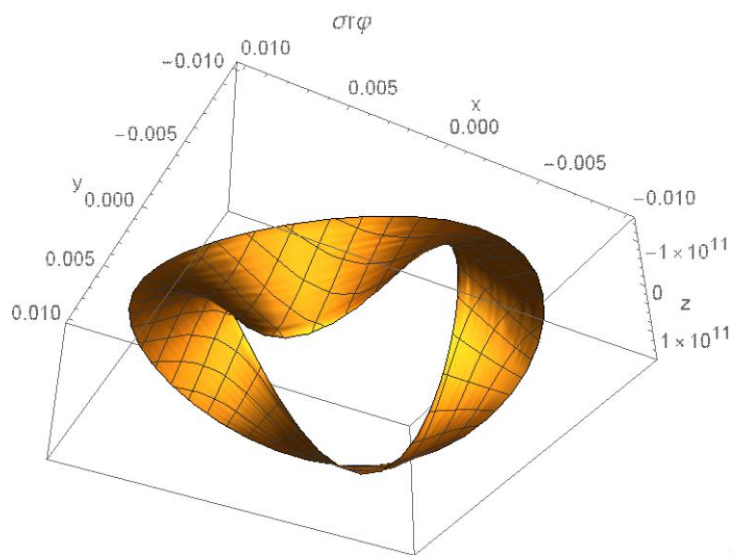


Рисунок 4.

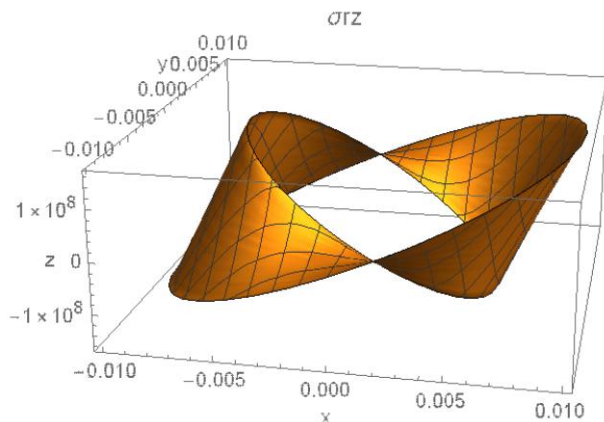


Рисунок 5.

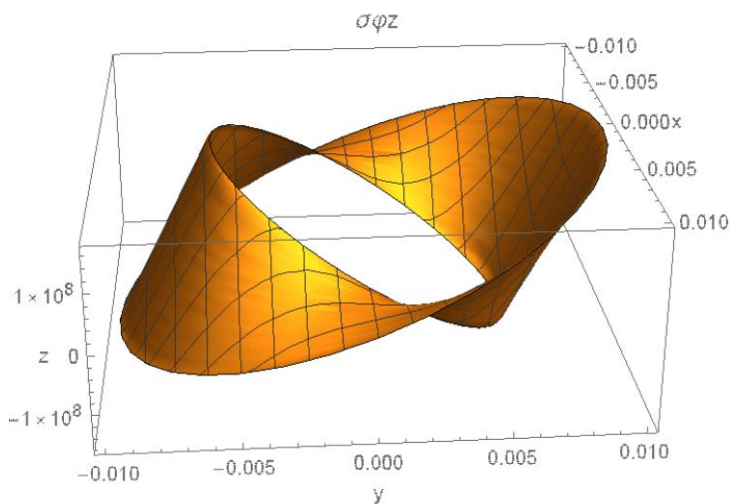


Рисунок 6.

Литература

1. Демидов С.П. Теория упругости. – М.: Высшая школа, 1979. – 340 с.
2. Бубенчиков А.М., Бубенчиков М.А., Некипелова Т.И., Цыренова В.Б., Щербаков Н.Р. Контактное воздействие жесткого элемента на упругое тело цилиндрической формы.// Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. – 2012. – № 3. – С. 41-48.

Некипелова Татьяна Ивановна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры, геометрии и методики преподавания математики Бурятского государственного университета, 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5, e-mail: inltavo@mail.ru

Цыдыпов Севан Гуро-Цыренович, ст. преподаватель кафедры алгебры, геометрии и методики преподавания математики Бурятского государственного университета, 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5, e-mail: sivan77@mail.ru

Цыренова Валентина Бабасановна, кандидат физико-математических наук, доктор педагогических наук, доцент, профессор кафедры алгебры, геометрии и методики преподавания математики Бурятского государственного университета, 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5, e-mail: v.ts@mail.ru

Nekipelova Tatyana Ivanovna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Buryat State University

Tsydypov Sevan Guro-Tsyrenovich, Senior Lecturer, Buryat State University

Tsyrenova Valentina Babasanovna, Candidate of Physics and Mathematics, Doctor of Pedagogics, Associate Professor, Buryat State University

АНАЛИЗ ПУЛЬСОВОГО СИГНАЛА МЕТОДОМ SSA

Аннотация. Работа посвящена спектральному разложению пульсового сигнала методом SSA (Singular Spectrum Analysis, метод «Гусеница»), как одному из перспективных методов выявления детерминантов функционального состояния человека по пульсу. В основе метода SSA лежит преобразование одномерного временного ряда произвольной длины N в многомерный, с помощью аппарата сингулярного разложения матрицы (SVD). В ходе анализа исходный ряд разбивается на три составляющие: тренд, сезонная компонента и шум. Выявлено, что сезонная компонента имеет 5 информативных гармонических составляющих. Наблюдается эффект группировки главных компонент пульсового сигнала, соответствующие различным собственным значениям. Определены шумовые компоненты сигнала. Параметрический анализ и идентификация компонент пульсового сигнала может в перспективе иметь значимое практическое применение в области функциональной диагностики.

Ключевые слова: пульсовой сигнал, сфигмограмма, метод «Гусеница», SSA, сингулярно-спектральный анализ, функциональная диагностика.

© *Б. Б. Radnaev, A. S. Tsybikov*

ANALYSIS OF PULSE SIGNAL BY METHOD SSA

Abstract. The work is devoted to the spectral decomposition of the pulse signal by the SSA method (Singular Spectrum Analysis, the «Caterpillar» method) as one of the promising methods for detecting the determinants of a person's functional state by pulse. The SSA method is based on converting a one-dimensional time series of an arbitrary length N into a multidimensional one, using the singular matrix decomposition (SVD). In the course of analysis, the initial series is divided into three components: trend, seasonal component and noise. It is revealed that the seasonal component has 5 informative harmonic components. There is an effect of grouping the main components of the pulse signal corresponding to different eigenvalues. The noise components of the signal are determined. Parametric analysis and identification of the components of the pulse signal may in the future have significant practical application in the field of functional diagnostics.

Keywords: pulse signal, sphygmogram, the «Caterpillar» method, SSA, Singular Spectrum Analysis, functional diagnostics

Введение

С точки зрения восточной медицины в пульсе человека храниться информация о состоянии не только сердечно-сосудистой системы, а всего организма в целом. О физическом, так и о психологическом состоянии человека [1]. Математический анализ сфигмограммы (пульсового сигнала) является перспективной областью восточной биометрии. Существующие на данный момент модели пульсового сигнала остаются далеко не совершенными в виду сложности данного биофизического явления в организме человека [5].

Рассмотренный в данной работе метод анализа временных рядов это свободный от модели метод, применяющийся для исследования структуры временных рядов. Он сочетает в себе достоинства многих других методов, в частности, анализа Фурье и регрессионного анализа. Также он отличается простотой и наглядностью в управлении [2].

1. Математическое описание

В основе метода SSA лежит преобразование одномерного временного ряда длины N в многомерный, его дальнейшее исследование с помощью сингулярного разложения и восстановление ряда из выбранных компонент.

Первый шаг вложение. Выбирается параметр L (длина окна или лаг). Затем строится траекторная матрица X , основанная на исходном ряде, столбцами которой являются отрезки ряда длины L . При этом первый столбец содержит первые L элементов ряда, второй столбец со второго по $L+1$ и так далее до конца ряда.

Следующий шаг разложение. Сингулярное разложение траекторной матрицы X на сумму d элементарных матриц. Каждая элементарная матрица задается собственной тройкой: собственное число, собственный и факторный векторы (1).

$$X_i = \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T \quad (1)$$

Далее идет группировка собственных троек. Множество элементарных матриц $\{X_1, \dots, X_d\}$ делится на непересекающиеся подмножества. Элементы подмножеств складываются в отдельные результирующие матрицы. В результате, исходная траекторная матрица представляется в виде суммы главных компонент (результирующих матриц).

Последний шаг – диагональное усреднение. На данном шаге каждая из сгруппированных матриц переводится в новый ряд длины N , с помощью диагонального усреднения. Так как результирующие матрицы не являются ганкелевыми проводится усреднение элементов вдоль «диагоналей».

В итоге исходный ряд представляется в виде суммы результирующих рядов(2).

$$F = \sum_{k=1}^m F^{(k)} \quad (2)$$

2. Данные и их анализ

Для анализа была выбрана пульсовая волна человека, представленная в виде временного ряда длины $N=2000$. Визуальный анализ ряда, представленного на рис. 1, говорит нам о том, что ряд не имеет ярко выраженного тренда. Имеется сложная сезонная составляющая, состоящая из нескольких гармонических колебаний разного периода и амплитуды. Это подтверждает периодограмма на рис. 2, на ней присутствуют 5 пиков.

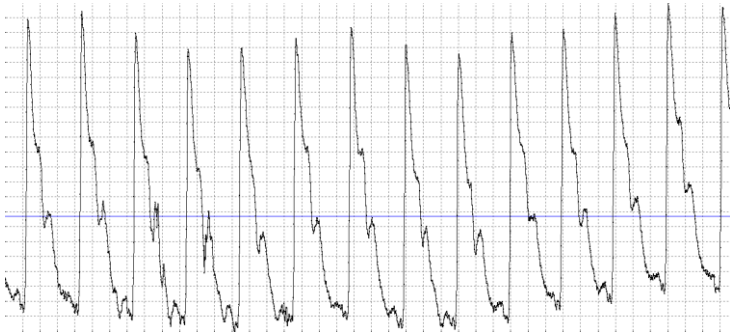


Рисунок 1. – Исходный ряд.



Рисунок 2. – Периодограмма

Длину окна L выбираем большой, близкой к середине ряда. При $N=2000$ возьмем $L=876$. При таком выборе вид собственных векторов не сильно отличается от факторных векторов так как длина окна близка к середине.

После проведения сингулярного разложения с выбранным окном, рассмотрим функцию собственных чисел на рис. 3. На графике можно заметить, что собственные числа близкие по значению образуют пары (ступеньки). Также сингулярные векторы этих компонент образуют графически хорошо различимые пары (типа фигур Лиссажу) рис. 4. У исходного ряда выделяется 5 пар собственных чисел и сингулярных векторов, которые и образуют главные компоненты. Шум образуют числа начиная с двенадцатой, они начинают медленно, без скачков убывать.

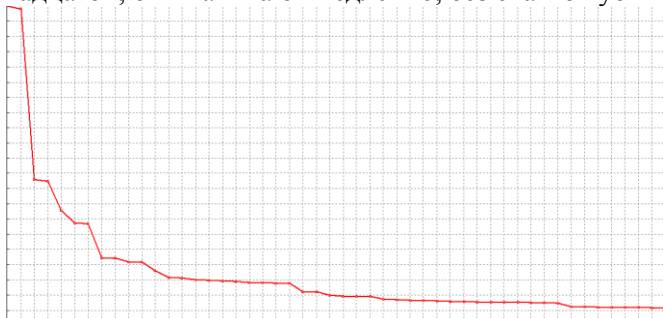


Рисунок 3. – Функция собственных чисел (корни из собственных чисел).

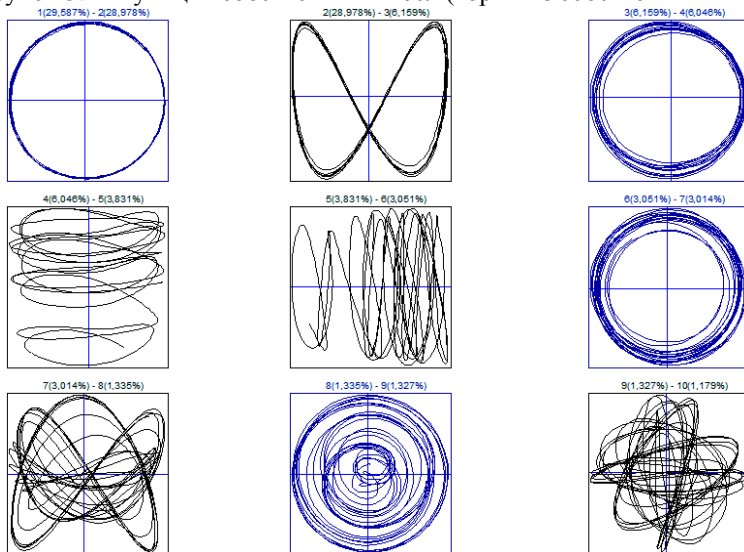


Рисунок 4. – Пары собственных векторов

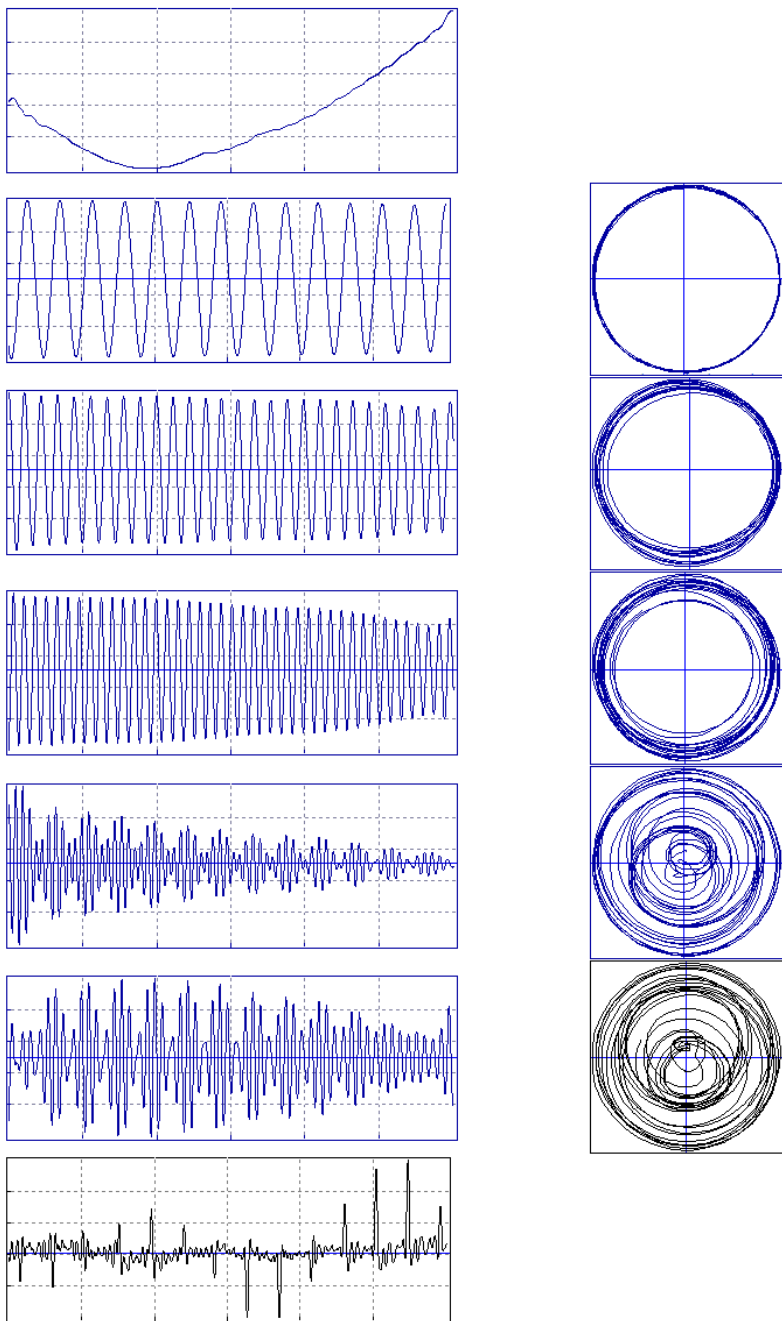


Рисунок 5. – Графики и диаграммы главных компонент.

Далее на рис. 5 показаны результаты исследования ряда методом «Гусеница». Выделен низкочастотный тренд, 5 сезонных компонент и остаток.

Также произведен анализ пульсовых волн других обследуемых. Были выделены сезонные составляющие, тренд и шум. У большинства проанализированных пульсовых сигналов выделяется 5 главных компонент, остальные компоненты сложно выделить, так как они слабо разделимы (сильно коррелируют между собой).

Также это подтверждает визуальный анализ графиков собственных чисел в процентах этих волн наложенных друг на друга рис. 6. На рисунке видно, что первые 10 собственных чисел (или 5 первых компонент) вносят основной вклад, остальные же не столь значимы и их можно отнести к шуму. Еще можно отметить, что первые две компоненты всегда хорошо различимы, тренд или низкочастотное колебание может отсутствовать.

В таблице приведены первые 10 собственных чисел пульсовой волны десяти людей.

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}
1	9038	8935	7275	6621	5704	5889	5044	4933	4274	4264
2	12439	12439	9899	9716	7538	7511	7202	7177	5893	5888
3	5721	5668	4958	4949	4098	4095	2212	2129	2106	1993
4	17368	17108	15818	15468	11281	11169	8253	8157	7551	7485
5	13722	13687	5675	5663	5003	5003	4497	3525	3352	3316
6	18654	18029	8507	8470	5325	5233	5194	5134	5001	4958
7	6743	6710	5128	5114	2834	2830	1510	1422	1412	1045
8	8338	8237	6432	5987	5848	5162	5148	2249	2240	1812
9	7055	7038	4767	4747	3991	3112	2749	2742	2702	2653
10	8480	8357	4459	4421	4413	4222	3567	3475	3236	3193

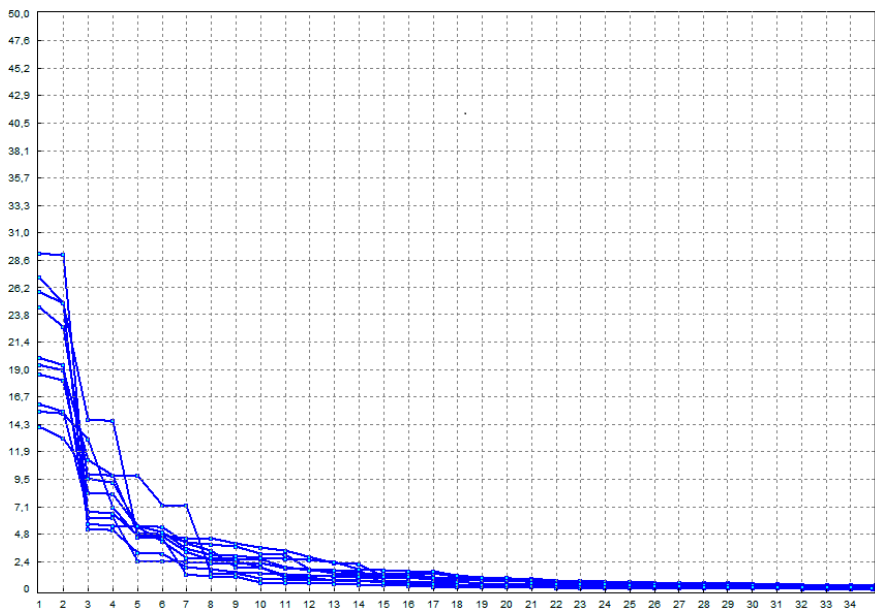


Рисунок 6. – Графики собственных чисел в процентах

Заключение

Итак, в данной работе мы рассмотрели один подход анализа пульсового сигнала с целью выявления информативных показателей. У большинства случайно выбранных сигналов выделяются 5 информативных главных компонент, остальные шумовые. Отсюда можно сделать вывод, что основная полезная информация, которую можно получить с помощью этого метода, содержится именно в этих гармониках. Необходимо продолжить исследование по идентификации выявленных компонент, в том числе остатков.

Литература

1. Бороноев В. В. Пульсовая диагностика заболеваний в тибетской медицине: физические и технические аспекты / Бороноев В. В. // Улан-Удэ: Изд-во БНЦ СО РАН, 2005. – 250 с.
2. Браулов К. А. / Главные компоненты временных рядов: метод «Гусеница» / К. А. Браулов, Н.Э. Голяндина, В. В. Некрутин // Под ред. Д. Л. Данилов, А. А. Жиглявский – Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский университет, 1997. – 302 с.
3. Безручко Б.П. Статистическое моделирование по временным рядам / Безручко Б.П., Смирнов Д.А. // Саратов: Учебно-методическое пособие – Издательство ГосУНЦ “Колледж”, 2000. – 23 с.

4. Халафян А. А. Статистический анализ данных / Халафян А.А. // 3-е изд. – Москва: ООО «Бином-Пресс», 2007. – 512 с.

5. Цыбиков А.С. Математическое моделирование пульсовых волн на основе теории солитонов и уравнения Кортевега Де Фриза [Текст] / Т.Г. Дармаев, А.С. Цыбиков, Б.В. Хабитуев // Вестник Бурятского государственного университета – 2014. – Вып. 9(1). – С. 35-39.

Раднаев Базар Баирович, магистрант Института математики и информатики, Бурятский государственный университет, тел.:+7 (3012) 221215, e-mail: bakumandiamond@gmail.com

Цыбиков Анатолий Сергеевич, кандидат педагогических наук, заведующий кафедрой информационных технологий, Бурятский государственный университет, тел.: +7 (3012) 221215, e-mail: cas313@rambler.ru

Radnaev Bazar Bairovich, master's degree student of the Institute of mathematics and informatics, Buryat State University

Tsybikov Anatoly Sergeevich, Candidate of Pedagogics, Buryat State University

ВЕБ-ОРИЕНТИРОВАННАЯ БАЗА ДАННЫХ ТУРИСТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ¹

Аннотация. Туристическая индустрия входит в число важнейших экспортных отраслей, многие эксперты считают туризм одной из самых рентабельных сфер мирового хозяйства. При этом эксперты отмечают важность наличия дружелюбной информационной среды для развития туризма.

Современные информационные технологии позволяют решать широкий круг задач, одной из таких задач является создание электронных туристических карт. На сегодняшний день существует множество различных решений, однако все они обладают серьёзным недостатком для туристов, приезжающих в Бурятию – они либо не содержат перевода на иностранные языки, либо перегружены ненужной информацией.

В рамках грантового проекта БГУ «Мультиязычное мобильное приложение «Улан-Удэ туристический» как средство создания открытой информационной среды для гостей Улан-Удэ». Одной из важнейших задач данного проекта является разработка веб-ориентированной базы данных для туристических объектов. В работе описаны требования, основные модули ресурса и технологии, применённые при разработке прототипа базы.

Ключевые слова: базы данных, ГИС – технологии, программный комплекс, информационный ресурс, туристические объекты.

© *B. V. Khabituev, A. M. Dokur*

WEB-ORIENTED DATABASE OF TOURIST SITES

Abstract. The tourism industry is one of the most important export industries, many experts consider tourism one of the most profitable spheres of the world economy. At the same time, experts note the importance of having a friendly information environment for the development of tourism.

Modern information technologies allow solving a wide range of tasks, one of such tasks is the creation of electronic tourist maps. To date, there are many different solutions, but all of them have a serious disadvantage for tourists coming to Buryatia - they either do not contain a translation into foreign languages, or are overloaded with unnecessary information.

¹ Работа выполнена при поддержке гранта БГУ «Мультиязычное мобильное приложение «Улан-Удэ туристический» как средство создания открытой информационной среды для гостей Улан-Удэ»

Within the framework of the grant project of the Belarusian State University "Multilingual mobile application" Ulan-Ude tourist "as a means of creating an open information environment for the guests of Ulan-Ude". One of the most important tasks of this project is the development of a web-oriented database for tourist sites. The work describes the requirements, the main resource modules and technologies used in developing the prototype base.

Keywords: database, GIS, program complex, information resource, tourist objects.

Введение

Информационные технологии уже давно прочно вошли в жизнь большинства людей. Один из самых актуальных трендов последних лет - мобильные приложения для туристов, среди которых большую популярность имеют электронные карты.

В свете сегодняшних планов по развитию туризма в республике Бурятия эта тенденция кажется особенно актуальной. Однако именно этот сегмент очень слабо представлен в нашем регионе, и для республики Бурятия важным вопросом является создание комфортной информационной среды для туристического бизнеса. В рамках грантового проекта БГУ «Мультиязычное мобильное приложение «Улан-Удэ туристический» как средство создания открытой информационной среды для гостей Улан-Удэ» разрабатывается программный комплекс, который будет позволять туристу, не владеющему русским языком, самостоятельно путешествовать по городу Улан-Удэ. Планируется, что данное решение будет содержать карту основных туристических маршрутов г. Улан-Удэ, основную информацию о достопримечательностях города, музеях, сувенирных магазинах, точках питания, а также мини-словарь туриста. В работе рассмотрен опыт разработки базы данных туристических объектов.

1. Постановка задачи

Предлагается разработать техническое решение для создания электронных туристических карт. Туристическая карта будет представлять собой базу данных объектов – достопримечательностей, магазинов, мест общественного питания и т.д. На текущий момент существует большое количество решений (Дубль ГИС, Яндекс карты, Гугл карты), однако они имеют существенный недостаток для иностранных туристов – отсутствие качественного перевода. В проекте планируется реализовать перевод на несколько иностранных языков (английский, немецкий, китайский).

Разработка общего программного решения предполагает решения нескольких задач. Первой задачей, которую необходимо решить является разработка базы данных для сбора и хранения данных об объектах.

2. Требования к системе и основные модули

Рассмотрим основные задачи, которые должна решать база данных:

1) Сбор и хранение данных – база данных представлять интерфейсы для создания и редактирования туристических объектов, справочников и т.д. Согласно техническому заданию база должна быть мультиязычной (для каждого объекта из базы могут существовать описания на разных языках);

2) Публикация данных в сети Интернет – открытый ресурс, на котором можно будет просматривать туристические объекты;

3) Интерфейс для мобильного приложения – планируется создать мобильное приложение для Туристов, приложение должно получать и обновлять данные из существующей базы.

В результате анализа задач было принято решение разработать базу в виде веб-ориентированного информационного ресурса. Как уже было отмечено, помимо специфических для проекта функций ресурс должен иметь возможность реализовывать стандартные модули информационного веб-ресурса: лента новостей, информационные блоки (о проекте, контакты и т.д.).

Для управления данными должна быть разработана закрытая панель для администрирования информационного ресурса, доступ в которую можно будет получить, пройдя процедуру авторизации. Было принято решение реализовать ролевую модель разделения прав (RBAC) [1]. Основные роли пользователей:

- Модератор - редактирование информационных блоков ресурса и модерация туристических объектов;
- Администратор - работа с учётными записями пользователей.

Исходя из требований, авторами были выделены основные модули разрабатываемой системы (см. табл. 1).

Таблица 1. Модули разрабатываемой системы

Модуль	Описание
Авторизация и аутентификация	Обеспечивает сквозную авторизацию на ресурсе, с возможностью разграниченного доступа с определяемыми правами к различным разделам системы.
База данных объектов	Предоставляет функционал для работы с туристическими объектами. А также реализует интерфейсы для выгрузки данных об объектах (для мобильного приложения).
Публичная часть ресурса	реализует стандартный функционал информационного ресурса (Лента новостей,

	публикация статей и материалов и т.д.), а также реализует веб-интерфейс для просмотра объектов из базы.
Поиск	Позволяет производить контекстный поиск по всему информационному пространству системы или по её части (например, только по базе новостей).

3. Прототип ресурса

Разрабатываемая система должна размещаться в сети Интернет, учитывая, что работа системы не подразумевает необходимости использования больших вычислительных мощностей, было принято решение реализации его на языке PHP. Несомненным плюсом данного языка является достаточно низкие системные требования к серверу. В качестве СУБД была выбрана MySQL [2].

Разработанный прототип базы будет дополняться и улучшаться. Учитывая необходимость расширения, было принято решение использовать архитектурный шаблон MVC [3]. Учитывая специфику проекта, оптимальным решением является использование фреймворка. Авторами был выбран фреймворк Yii2 [4].

Одной из задач ресурса является обеспечение работы информационного ресурса с картой объектов. Было принято решение создать геоинформационный сервис, выполняющий следующие требования:

- 1) Отображение отдельных объектов (с возможностью выборки по типам объектов);
- 2) Возможность нанесения/изменения/удаление областей на карту.

Для реализации карты было принято решение использовать Google Maps API [5].

Заключение

На сегодняшний день в республике Бурятия нет единой базы данных, хранящей в себе информацию о культурном достоянии города, отдельно стоит отметить проблему поиска информации на иностранных языках.

Работа посвящена основам разработки электронной базы данных птиц юга Восточной Сибири. Авторами описаны основные модули системы, разработан прототип. На данный момент прототип размещён в сети Интернет по адресу uuturist.bsu.ru, идет процесс наполнения базы.

Литература

1. Ravi Sandhu, Qamar Munawer (October 1998). "How to do discretionary access control using roles". 3rd ACM Workshop on Role-Based Access Control.
2. П. Дюбуа. MySQL, 3-е издание. - Москва : «Вильямс», 2006. – 1168 с.

3. Фаулер М. Архитектура корпоративных программных приложений. – Москва : Издательский дом "Вильямс", 2007. – 545 с.
4. Web Application Development with Yii 2 and PHP by Mark Safronov, Jeffrey Winesett (ISBN: 9781783981885)
5. Документация Google Maps [Электронный ресурс] // Google maps platform. URL: <https://developers.google.com/maps/documentation/?hl=ru> (дата обращения: 23.05.2018)

Хабитуев Байр Викторович, старший преподаватель, заведующий лабораторией Института математики и информатики, Бурятский Государственный университет, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а, e-mail: bairinc0@gmail.com

Докур Аюна Мергеновна, студент Института математики и информатики, Бурятский Государственный университет, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а, e-mail: adokur666@gmail.com

Khabituev Bair Victorovich, Senior Lecturer, Buryat state university

Dokur Aiuna Mergenovna, student of Institute of mathematics and Informatics, Buryat state university

ЛИНЕЙНОЕ СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ТЕЛА С ГЛАДКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Аннотация. В статье предложен метод сплайн-интерполяции для решения трехмерного уравнения Лапласа с граничными условиями Дирихле для простых связных тел с гладкой поверхностью. Тело разделено на N слоев, а трехмерная задача сводится к решению последовательности двумерных задач Дирихле. Решение двумерной гармонической функции задачи в каждом слое восстанавливается с помощью интеграла Коши. Соответствующее интегральное уравнение для каждой из задач Дирихле решается приближенно и сводится к конечной системе линейных уравнений. Решения конечных систем сходятся к решению интегрального уравнения. Сплайн-решение трехмерной задачи Дирихле является непрерывным по отношению к трем переменным. Предложены три примера для проверки эффективности метода. Доказана сходимость семейства приближенных решений к точному при уменьшении шага разбиения для тел с гладкой границей.

Ключевые слова: Сплайн-интерполяция, интеграл Коши, трехмерная задача Дирихле, интегральное уравнение Фредгольма.

© А. *El-shenawy*, P. N. *Ivanshin*

LINEAR SPLINE INTERPOLATION SOLUTION FOR 3D DIRICHLET PROBLEM FOR ARBITRARY SOLID WITH SMOOTH SURFACE

Abstract. In this paper we propose the spline interpolation method for solving the 3D Laplace equation with Dirichlet boundary conditions for simple connected solids with smooth surface. The solid is divided into N layers and the 3D problem is reduced to the solution of a sequence of 2D Dirichlet problems. The harmonic function solution of the 2D problem in each layer is restored with the help of Cauchy integral method. The corresponding integral equation for each of the Dirichlet problems is solved approximately and reduces to a finite system of linear equations. The solutions of finite systems converge to the solution of the integral equation. The final spline solution of the 3D problem is continuous with respect to the three variables. Three numerical examples are proposed to verify the efficiency of the method. The convergence of approximate solutions to the exact solution is proved for a decrease in the partition step for bodies with a smooth boundary.

Keywords: Spline interpolation, Cauchy Integral, 3D Dirichlet problem, Fredholm integral equation.

Introduction

Three dimensional Laplace equation with Dirichlet boundary conditions arises in different areas especially in physics and mechanics. A closed form analytical solution of such problem in some special solids, represented by cartesian, spherical and cylindrical coordinates, can be found with the help of the separation of variables technique. In most cases the solution is approximated numerically by using finite difference methods(FDM), finite element methods(FEM). Some of numerical methods converts the 3D Laplace problem to the solution of a Fredholm integral equation of the second kind, based on representing the harmonic solution as a double layer potential function [1]. Another method based on higher order quadrature and finite element method utilizing Taylor model methods [2]. The method of fundamental solutions (MFS) and the Trefftz method are proposed in [3, 4]. Here we present the spline interpolation method for the solution of the three dimensional Laplace equation with Dirichlet boundary conditions. The method divides the solid into N layers and reduces the problem to a sequence of 2D Dirichlet problems. The resulting 2D Dirichlet problems are solved by constructing analytic functions in the 2D sections via their boundary values. The corresponding harmonic functions solutions are represented as the real parts of these analytic functions with the help of Cauchy integral.

The paper is organized as follows: In Section 2 we introduce the 3D Laplace problem in the solid M and define the Dirichlet boundary conditions on its smooth boundary surface ∂M . In Section 2 we construct the solution in M applying the spline interpolation method and the Cauchy integral method, which restore the 2D harmonic functions in each section, is described in details. Finally, three numerical examples are presented in Section 4.

1. 3D Dirichlet problem for the Laplace equation

Let M be a bounded 3D simply connected domain, ∂M be the smooth boundary surface of M . Then the corresponding Dirichlet problem for the Laplace equation is as follows: find the doubly differentiable in M function $u(x, y, h)$, which is continuous in $M \cup \partial M$ and satisfies the three dimensional Laplace equation

$$\frac{\partial^2 u(x, y, h)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, h)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, h)}{\partial h^2} = 0, \quad (x, y, h) \in M, \quad (1)$$

Along with the boundary conditions:

$$u(x, y, h) = f(x, y, h), \quad \text{on } \partial M. \quad (2)$$

2. The linear spline solution of 3D Dirichlet problem

The spline interpolation solution of 3D Dirichlet problem for Laplace equation is based on the division of the solid into N layers. The spline solution at each layer is a polynomial function of h as follows:

$$u(x, y, h) = \sum_{k=0}^p u_k(x, y) h^k.$$

By taking $p = 1$ we obtain the linear spline $u(x, y, h) = u_0(x, y) + hu_1(x, y)$. If we put this solution into (1) we obtain the following relation:

$$\Delta_2 u_k(x, y) = 0, \quad k = 0, 1,$$

where $\Delta_2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$. The coefficients $u_k(x, y), k = 0, 1$ are 2D harmonic functions of x and y which can be restored via their boundary values using the Cauchy integral method.

2.1 The Cauchy integral solution of 2D simply connected domain

Let $\Omega \in \mathbb{R}^2$ be a simply connected domain, $\partial\Omega = \{(x(t), y(t)), t \in [0, 2\pi]\}$ be the smooth boundary of Ω . We need to construct the harmonic function $\psi(x, y)$ which is defined as $\text{Re}(B(z))$, where $B(z)$ is analytic in the given simply connected domain Ω .

The 2D Laplace equation at any layer with $z = c$ will be

$$\frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in \Omega \quad (3)$$

together with the boundary conditions:

$$\psi(x(t), y(t)) = f_0(t), \quad \text{on } \partial\Omega, \quad (4)$$

where $f_0(t) = f(x(t), y(t), c)$. So the problem follows: given the function $f_0(t) = \psi(x, y)|_{(x(t), y(t)) \in \partial\Omega}, t \in [0, 2\pi]$, it is necessary to find the harmonic function $\psi(x, y), (x, y) \in \Omega$ which satisfies the 2D Laplace equation.

By denoting $g_0(t) = \text{Im}(B(z))|_{z(t)=x(t)+iy(t) \in \partial\Omega}$ the boundary value of analytic in Ω function $B(z), z = x + iy$, can be presented as follows:

$$B(z(t))|_{\partial\Omega} = f_0(t) + ig_0(t), \quad z(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

According to [5, 6] the boundary value of the analytic function $B(x, y)$ in Ω meets the relation

$$f_0(t) + ig_0(t) = \frac{1}{i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f_0(\tau) + ig_0(\tau)}{z(\tau) - z(t)} z'(\tau) d\tau, \quad (5)$$

where the singular integral on the right-hand side is the principal value integral and $z(t) = x(t) + iy(t)$ represents the complex form of the simply connected domain Ω boundary smooth curve $\partial\Omega$. Assume that the finite Fourier polynomial of this curve has the form

$$z(t) = \sum_{k=-m}^m c_k e^{ikt}. \quad (6)$$

After separating the imaginary part of equation (5) we obtain the following Fredholm integral equation:

$$g_0(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_0(\tau) (\log[z(\tau) - z(t)])'_\tau d\tau + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g_0(\tau) (\arg[z(\tau) - z(t)])'_\tau d\tau. \quad (7)$$

We consider the factor $(e^{i\tau} - e^{it})$ in the expression $(z(\tau) - z(t))$ in order to separate the improper VP integral in the Fredholm equation of the second kind as follows [7]:

$$\log[z(\tau) - z(t)] = \log(2i) + \log\left(\sin\left(\frac{\tau - t}{2}\right)\right) + i\frac{\tau + t}{2} + \log\left(\sum_{k=1}^m c_k e^{ikt} \sum_{l=0}^{k-1} e^{il(\tau-t)} - \sum_{k=1}^m c_{-k} e^{-ik\tau} \sum_{l=0}^{k-1} e^{il(\tau-t)}\right), \quad (8)$$

so equation (7) takes the form:

$$g_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_0(\tau) d\tau + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g_0(\tau) K(\tau, t) d\tau - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(\tau) \cot\frac{\tau - t}{2} d\tau - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_0(\tau) L(\tau, t) d\tau. \quad (9)$$

Here

$$K(\tau, t) = \text{Im}[\log(\sum_{k=1}^m c_k e^{ikt} \sum_{l=0}^{k-1} e^{il(\tau-t)} - \sum_{k=1}^m c_{-k} e^{-ik\tau} \sum_{l=0}^{k-1} e^{il(\tau-t)})]'_\tau,$$

$$L(\tau, t) = \text{Re}[\log(\sum_{k=1}^m c_k e^{ikt} \sum_{l=0}^{k-1} e^{il(\tau-t)} - \sum_{k=1}^m c_{-k} e^{-ik\tau} \sum_{l=0}^{k-1} e^{il(\tau-t)})]'_\tau.$$

Let us search for the solution of the Fredholm integral equation (9) in the form of Fourier series as follows:

$$g_0(t) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(nt) + \beta_n \sin(nt). \quad (10)$$

According to [7, 8], equation (9) has a unique solution if we set the summand

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_0(\tau) d\tau = 0.$$

The solvability of equation (9) is proved in [7] where the Fourier series solution form of the function $g_0(t)$ leads us to an infinite linear system of equations which can be reduced to a finite one according to the following lemma:

Lemma 1 [7] *Let the numbers $j, p > 1$ and a constant $U > 0$ exist so that $|\partial^{j+p} G(\tau, t) / \partial t^j \partial \tau^p| \leq U$ and the function $Y(t)$ possesses the bounded second derivative: $|Y''(t)| < T$. Then, the approximate solution of the uniquely resolvable Fredholm integral equation of the second kind*

$$X(t) = \int_0^{2\pi} G(\tau, t) X(\tau) d\tau + Y(t),$$

where $Y(t)$ is 2π periodic and $G(\tau, t)$ is 2π periodic with respect to both variables, can be reduced to solution of finite linear system with error estimated by $\mathcal{O}(1/N^2)$ where N is the finite linear system rank.

According to Lemma (1) solution (10) can be written as a finite sum with $\alpha_0 = 0$ as follows:

$$g_0(t) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \cos(nt) + \beta_n \sin(nt). \quad (11)$$

As in [7] we put (11) into equation (9) and apply the following Hilbert formula:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(\tau) \cot \frac{\tau - t}{2} d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} -\gamma_k \sin kt + \delta_k \cos kt, \quad (12)$$

if the coefficients γ_k, δ_k are the coefficients of the function $f_0(t)$ Fourier series decomposition:

$$f_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \cos kt + \delta_k \sin kt.$$

Then the truncated linear equation system can be written in the following matrix form:

$$\begin{pmatrix} AA & AB \\ BA & BB \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad (13)$$

where

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_N \end{pmatrix}, p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix},$$

$$\{p_l\}_{l=1}^N = -\delta_l - \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} f_0(\tau) d\tau \int_0^{2\pi} L(\tau, t) \cos(lt) dt,$$

$$\{q_l\}_{l=1}^N = \gamma_l - \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} f_0(\tau) d\tau \int_0^{2\pi} L(\tau, t) \sin(lt) dt.$$

Here

$$\begin{pmatrix} AA & AB \\ BA & BB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} aa_{11} & aa_{12} & \cdots & aa_{1N} \\ aa_{21} & aa_{22} & \cdots & aa_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ aa_{N1} & aa_{N2} & \cdots & aa_{NN} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} ab_{11} & ab_{12} & \cdots & ab_{1N} \\ ab_{21} & ab_{22} & \cdots & ab_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ab_{N1} & ab_{N2} & \cdots & ab_{NN} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} ba_{11} & ba_{12} & \cdots & ba_{1N} \\ ba_{21} & ba_{22} & \cdots & ba_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ba_{N1} & ba_{N2} & \cdots & ba_{NN} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} bb_{11} & bb_{12} & \cdots & bb_{1N} \\ bb_{21} & bb_{22} & \cdots & bb_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ bb_{N1} & bb_{N2} & \cdots & bb_{NN} \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

The elements of the coefficient matrix are defined as follows:

$$aa_{ln} = \delta_{ln} - \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \cos(n\tau) d\tau \int_0^{2\pi} K(\tau, t) \cos(lt) dt,$$

$$ab_{ln} = -\frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \sin(n\tau) d\tau \int_0^{2\pi} K(\tau, t) \cos(lt) dt,$$

$$ba_{ln} = -\frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \cos(n\tau) d\tau \int_0^{2\pi} K(\tau, t) \sin(lt) dt,$$

$$bb_{ln} = \delta_{ln} - \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \sin(n\tau) d\tau \int_0^{2\pi} K(\tau, t) \sin(lt) dt,$$

here δ_{ln} is the Kronecker delta function. The linear system is resolvable and we can easily find the coefficients $\{\alpha_n, \beta_n\}_{n=1}^N$ of equation (11).

Finally, the approximate solution for Laplace equation (3-4) is the Cauchy integral real part for a function of $z = x + iy$:

$$\psi(x, y) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f_0(t) + ig_0(t)}{z(t) - z} z'(t) dt \right). \quad (14)$$

2.1.1 Approximation of the Dirichlet problem solution at the points near the boundaries:

Since the numerical solution behaviour near the boundary points is bad, we apply the auxiliary technique in order to improve it in these points.

Let $z_0 = (x_0 + iy_0)$ be the point in Ω near the boundary curve $\partial\Omega$. The harmonic function solution at this point is approximated by the real part of the Cauchy integral formula

$$\psi(x_0, y_0) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{B(z(t))z'(t)}{z(t) - (x_0 + iy_0)} dt \right), \quad (15)$$

where $B(z(t))$ is the boundary value of the analytic in Ω function. Evidently we have singularity at the points near the boundaries. By taking arbitrary disk with radius R and center σ in Ω we can write the analytic function at any point z inside this disk as follows:

$$B(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{B(Re^{it} + \sigma)iRe^{it}}{(Re^{it} + \sigma) - z} dt, \quad (16)$$

where $B(Re^{it} + \sigma)$ is the boundary value of the analytic function in this disk. After applying the Taylor expansion we obtain

$$B(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi R^k} \left[\int_0^{2\pi} B(Re^{it} + \sigma) e^{-ikt} dt \right] (z - \sigma)^k. \quad (17)$$

The approximate harmonic function at points near the boundaries of $\partial\Omega$ can be found through analytic continuation [11] of the Taylor expansion (17) of $B(z)$ to the disk of a radius more than R .

2.2 Construction of the linear spline solution of the 3D Dirichlet problem

Assume that the solid M possesses two degenerate ends $P_A(x_A, y_A)$ and $P_B(x_B, y_B)$. Assume also that M is convex in the direction of Oh so that the largest section projection onto Oxy comprises all the other section projections. Define $h_j, j=1,2,\dots,N$ are the planes parallel to xy plane with $h_1 = A$ and $h_N = B$. Define the 2D domains $C_j, j=1,2,\dots,N$ which are the sections of M

by h_j with smooth boundary curves ∂C_j . The boundary values given at ∂C_j are denoted by $f_j, j = 1, 2, \dots, N$.

We begin the construction of the linear spline solution within the layer with maximum area. Assume that the initial layer $h_j \in [A, B]$. We will construct the linear spline solution firstly by moving upward from h_j to the upper end P_A then by moving downward from h_j to the lower end P_B .

For the first layer $h \in [h_j, h_{j+1}]$, the linear spline solution takes the form [9]:

$$u^j(x, y, h) = u_0^j(x, y) + (h - h_j)u_1^j(x, y), \quad (18)$$

where $u_0^j(x, y)$ is a harmonic function in the domain C_j and the function $u_1^j(x, y)$ is a harmonic function in the domain C_{j+1} which can be restored using its boundary value.

The boundary value of the function $u_1^j(x, y)$ is equal to

$$\frac{f_{j+1} - u_0^j|_{\partial C_{j+1}}}{h_{j+1} - h_j}. \quad (19)$$

For the second layer $h \in [h_{j+1}, h_{j+2}]$, the linear spline solution takes the form

$$u^{j+1}(x, y, h) = u_0^{j+1}(x, y) + (h - h_{j+1})u_1^{j+1}(x, y), \quad (20)$$

if $u_0^{j+1}(x, y) = u_0^j(x, y) + (h_{j+1} - h_j)u_1^j(x, y)$ then the boundary conditions at the curve ∂C_{j+1} are met. The function $u_1^{j+1}(x, y)$ is a harmonic function in the domain C_{j+2} which can be restored using its boundary values. The boundary values of the function $u_1^{j+1}(x, y)$ is equal to

$$\frac{f_{j+2} - u_0^{j+1}|_{\partial C_{j+2}}}{h_{j+2} - h_{j+1}}. \quad (21)$$

The method is successively applied to the remaining layers and the harmonic functions $u_0^k(x, y)$ and $u_1^k(x, y), k = j + 3, \dots, N - 1$ are restored.

For the last layer $h \in [h_{N-1}, P_A]$ the spline function takes the form:

$$u^N(x, y, h) = u_0^N(x, y) + (h - h_{N-1})u_1^N(x, y),$$

where $u_0^N(x, y) = u_0^{N-1}(x, y) + (P(A) - h_{N-1})u_1^{N-1}(x, y)$ and the constant $u_1^N(x, y)$ equal to

$$u_1^N(x, y) = \frac{u(P(A)) - u_0^N(x_A, y_A)}{(A - h_{N-1})}.$$

The remaining layers for $h \in [P_B, h_j]$ are constructed in the same way beginning with the layer h_j and moving toward the end point P_B .

2.2.1 Error estimate of the solution's first derivative with respect to h

Consider the layers in M with the level h_j, h_{j+1} and h_{j+2} with its corresponding boundary values f_j, f_{j+1} and f_{j+2} respectively. For the case of cylindrical solid, the constructed linear spline for these layers are:

$$u^j(x, y, h) = u_0^j(x, y) + (h - h_j)u_1^j(x, y), \quad h \in [h_j, h_{j+1}],$$

$$u^{j+1}(x, y, h) = u_0^{j+1}(x, y) + (h - h_{j+1})u_1^{j+1}(x, y), \quad h \in [h_{j+1}, h_{j+2}],$$

and $[u^j(x, y, h)]'_h = u_1^j(x, y)$, $[u^{j+1}(x, y, h)]'_h = u_1^{j+1}(x, y)$. The first two derivatives of the linear spline solution at the boundary points are continuous with respect to x and y [9]. Here we introduce the error estimate of the solution's first derivative with respect to h . Let Δh be the step size in the h direction. The first derivative of the spline solution at the level $\{h_k\}_{k=j}^{j+1}$ are as follows:

$$u_1^j = \frac{f_{j+1} - f_j}{\Delta h}, \quad u_1^{j+1} = \frac{f_{j+2} - f_{j+1}}{\Delta h}.$$

And the absolute error is

$$\left| u_1^{j+1} - u_1^j \right| = \left| \frac{f_{j+2} - 2f_{j+1} + f_{j+2}}{\Delta h} \right|,$$

by applying the Taylor series expansion, we obtain

$$\left| u_1^{j+1} - u_1^j \right| = \Delta h (f_{j+1})''_h + \mathcal{O}(\Delta h)^2.$$

For the case of non-cylindrical solid we have

$$u_1^{j+1}(x, y) - u_1^j(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u_1^{j+1}(x + r \cos \varphi, y + r \sin \varphi) - f_0(t_0)] d\varphi,$$

Where $(x, y) \sim t_0$ on $h = h_j$.

$$u_1^{j+1}(x + r \cos \varphi, y + r \sin \varphi) \approx f(t_0, h_{j+1}) + kr,$$

and k - modulus of continuity of u_1^{j+1} on the layer $c_{j+1}(x, y)$,

$$r = |c_{j+1}(t_0) - c_j(t_0)|.$$

$r(\Delta h) = \lambda \Delta h + O(\Delta h^2)$ iff differentiable boundary of the solid.

$$\left| u_1^{j+1}(x + r \cos \varphi, y + r \sin \varphi) - f_0(t_0) \right| \leq \left| f(t_0, h_{j+1}) - f(t_0, h_j) \right| + k \Delta h,$$

$$\left| f(t_0, h_{j+1}) - f(t_0, h_j) \right| = \left| f_{j+1}(t_0) - f_j(t_0) \right| = f'_h(t_0) \Delta h.$$

3. Numerical examples

Example 1: Let M be the solid shown in Figure (1) as in [10]:

$M = r(\theta, \phi)(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$, $\theta \in [0, \pi]$ and $\phi \in [0, 2\pi]$, and

$$r(\theta, \phi) = \frac{1}{2\sqrt{1 + \sqrt{2}}} \sqrt{\cos 2\theta + \sqrt{2 - \sin^2(2\theta)}}$$

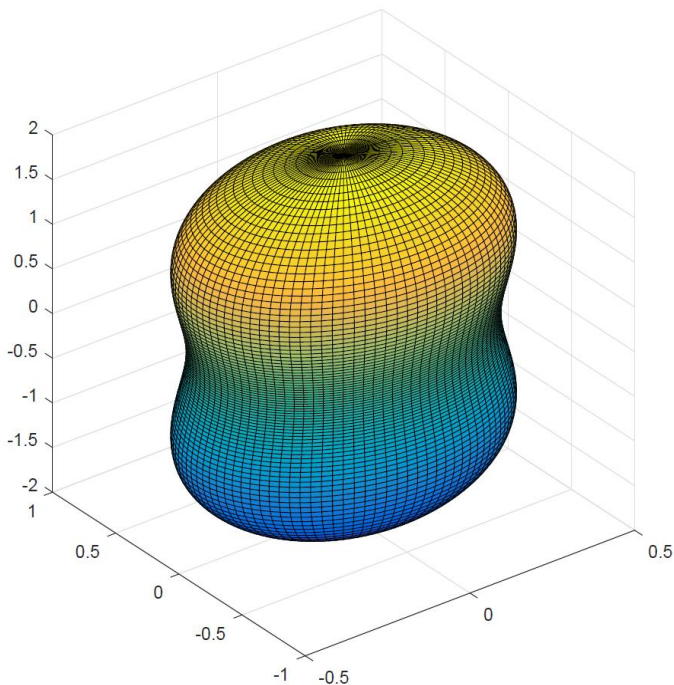


Figure 1. – The solid in Example (1).

The boundary values at the surface ∂M are calculated using the exact solution $u(x, y, h) = h + x^3 - 3xy^2$. By using $N = 20$, the spline solution of Laplace equation (1-2) was calculated at some arbitrary layers and the numerical absolute error shown in Table (1).

Table 1. The numerical absolute error for Example (1).

h	$Error = \max u_{(Exact)} - u_{(Approximate)} $
0.474	2.900 E-14
0.395	1.449 E-12
0.316	1.910 E-11
0.237	1.765 E-10
0.158	2.078 E-11
0.079	2.214 E-12
0.000	2.583 E-13
-0.079	2.214 E-12
-0.158	2.078 E-11
-0.237	1.764 E-11
-0.316	1.910 E-11
-0.395	1.449 E-12
-0.474	2.900 E-14

Example 2: Let M be the ellipsoid shown in Figure (2)

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{h^2}{16} = 1$$

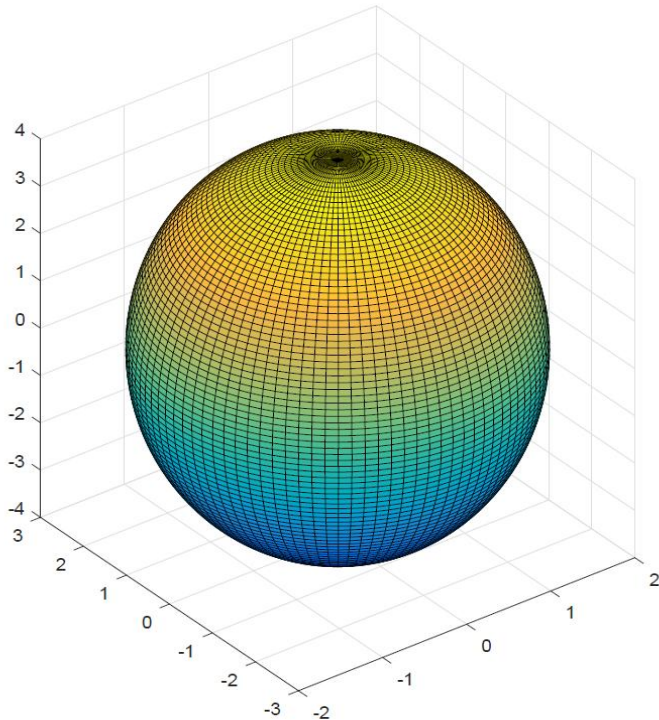


Figure 2. – The solid in Example (2).

The boundary values at the surface ∂M are calculated using the exact solution $u(x, y, h) = h - x^2 + y^2$. By using $N = 20$, the spline solution of Laplace equation (1-2) was calculated at some arbitrary layers and the numerical absolute error shown in Table (2).

Table 2. The numerical absolute error for Example (2).

h	$Error = \max u_{(Exact)} - u_{(Approximate)} $
-3.556	6.029 E-11
-2.667	1.295 E-06
-1.778	1.374 E-06
-0.889	7.491 E-07
0.000	7.780 E-06

0.889	7.491 E-07
0.778	1.374 E-06
0.667	1.295 E-06
0.556	6.050 E-11

Example 3: Let M be the solid shown in Figure (3).

$$M = (1 - h^2) \sqrt{(0.6 \cos t + 0.3 \cos 2t - 0.2)^2 + (0.6 \sin t)^2}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

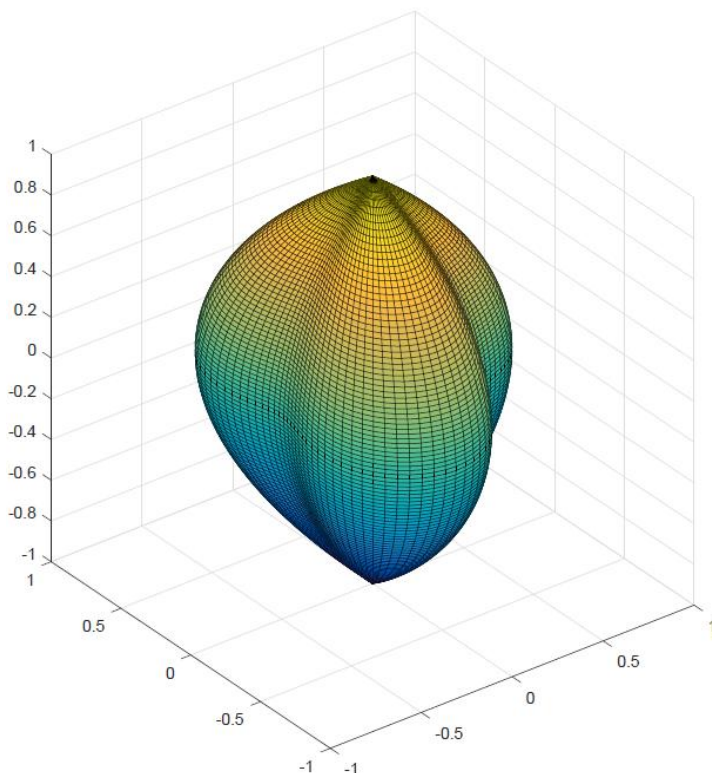


Figure 3. – The solid in Example (3).

The boundary values at the surface ∂M are calculated using the exact solution $u(x, y, h) = h + e^x \cos y$.

By using $N = 20$, the spline solution of Laplace equation (1-2) was calculated at some arbitrary layers and the numerical absolute error shown in Table (3).

Table 3. The numerical absolute error for Example (3).

h	$Error = \max u_{(Exact)} - u_{(Approximate)} $
-0.889	2.910E-09
-0.667	2.923 E-07
-0.444	1.964 E-07
-0.222	2.601 E-07
0.000	4.898 E-06
0.222	3.489 E-07
0.444	2.124 e-07
0.667	2.039 E-07
0.889	3.002 E-09

Conclusions

The proposed method gives a continuous solution of 3D Laplace equations with Dirichlet boundary conditions. The method is applicable for arbitrary simply connected solids with smooth boundaries. The solution is continuous with respect to the three variables.

References

1. Atkinsons K. E. , The numerical solution of Laplace's equation in three dimensions // Siam J. Numer. Anal. – 1982. – Vol. 19. – № 2. – pp. 263–274.
2. Shashikant M. , Martin B. and Kyoko M., High-order Verified Solutions of the 3D Laplace Equation // Wseas transactions on computers. – 2005. – Vol. 4. – pp. 1604–1610.
3. Hui L., Fang H., Yong W., Chen C.S., The MFS versus the Trefftz method for the Laplace equation in 3D // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2017. – Vol. 83. – pp. 133-140.
4. Chein-Shan L., Zhuojia F. and Chung-Lun K., Directional method of fundamental solutions for three-dimensional Laplace equation // Journal of Mathematics Research. – 2017. – Vol. 9. – №. 6. – pp. 112–123.
5. Gakhov F. D. Boundary value problems. Nauka, Moscow, 1977. – 640 p.
6. Shirokova E. A., On the approximate conformal mapping of the unit disk on simply connected domain // Russia Mathematics (IZVUZ). – 2014. – Vol. 58. – №. 3. – pp. 47–56.
7. Ivanshin P. N., Shirokova E. A., Approximate conformal mappings and elasticity theory // Journal of Complex Analysis. – 2016. – Article ID: 4367205.
8. Abzalilov D. F., Shirokova E. A., The approximate conformal mappings onto simply and doubly connected domains // Complex Var. Elliptic. – 2017. – Vol. 62. – № 4. – pp. 554–565.
9. Ivanshin P. N., Shirokova E. A., Spline-interpolation solution of 3D Dirichlet problem for certain class of solids // Journal of applied mathematics. – 2013. – Vol. 78. – pp. 1109–1129.

10. Borachok I., Chapko R., Johansson B., Numerical solution of a Cauchy problem for Laplace equation in 3-dimensional domains by integral equations // Inverse problems in science and engineering. – 2016. – pp . 1550-1568.

11. Krantz S. G. Handbook of complex variables. // Springer science + Business media, New York, 1999. – 290 p.

Эльшенави Аталлах, аспирант кафедры общей математики, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, 420008, Казань, ул. Кремлевская, 18, e-mail: atallahtm@yahoo.com

Иваньшин Петр Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, 420008, Казань, ул. Кремлевская, 18, e-mail: pivanshi@yandex.ru

El-shenawy Atallah, post-graduate student of the Department of General Mathematics, Kazan Federal University

Ivanshin Petr Nikolaevich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Kazan Federal University

СОСТОЯНИЕ И ПЕРСПЕКТИВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

УДК 378.016
А 912

© *Л. В. Антонова*

ИНТЕГРАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ПЕДАГОГИЧЕСКОМ ВУЗЕ

Аннотация. В данной статье рассмотрены подходы к организации образовательной деятельности в педагогическом вузе, способствующие интеграции математического образования, позволяющие придать прикладную направленность преподаванию математики на основе системного применения метода математического моделирования, деятельностно-личностного подхода в подготовке специалистов высокой квалификации. Учитель математики и информатики должен создать у учащихся единое представление о природе, обществе и своем месте в нем, соединять в восприятии учащихся основные знания по каждому предмету в широкую, целостную картину мира, а также развитию представлений о математике как системообразующей части общечеловеческой культуры. Интеграция содержания обучения представлена на основе профильных предметов – математики и информатики, но при этом для обеспечения целостности содержания по типу круга с контуром обратной связи.

Ключевые слова: Интеграция образования, деятельностно-личностный подход, фундаментализация образования, содержание образования.

© *L. V. Antonova*

INTEGRATION OF MATHEMATICAL EDUCATION IN THE PEDAGOGICAL UNIVERSITY

Abstract. The article considers the approaches to organization of educational activities in the pedagogical university that facilitate the integration of mathematical education and allow giving an applied direction to teaching mathematics on the basis of mathematical modeling method and activity-personal approach in training highly qualified specialists. The teacher of mathematics and computer science should create a unified view of nature, society and people's place in it, integrate the basic knowledge of each discipline in students' perception into a holistic picture of the world, as well as develop the ideas about mathematics as a systemically important part of the universal culture. The article presents integration of syllabus based on the core subjects —

mathematics and computer science and ensuring the integrity of the content in the form of a circle with a feedback loop.

Keywords: integration of education; personal activity approach; fundamentalization of education; content of education.

Одной из важнейших задач образования является преодоление разобщённости его естественнонаучной и гуманитарной составляющих, преодоление путем их взаимообогащения и поиска оснований целостной культуры. В основе интеграции знаний лежат единство мира (онтологическое основание), единство человеческого сознания и законов мышления (гносеологическое основание), наличие общенаучных методов исследования (методологическое основание), целостность человека (социальное основание). Интеграция знаний способствует, таким образом, целостному познанию бытия. Она имеет значение и для становления целостной личности. Дифференциация имеет положительное значение, поскольку она увеличивает разнообразие. Но разнообразие позитивно, если оно связано с интеграцией. Разнообразие знания и его интеграция должны быть согласованы. Интеграция увеличивает разнообразие, поскольку в результате появляется новое объединенное знание нового свойства. Следовательно, интеграция должна вести к целостной гармоничной системе. Мы считаем, что в обучении в разных формах и на разных уровнях должен выполняться принцип целостной интегративно-разнообразной гармоничной системы знаний. Интеграция образования – это и интеграция содержания и методического обеспечения, и технология учебного процесса, и профессиональная направленность педагогических кадров. Это многоаспектный процесс.

В дидактическом аспекте можно говорить о принципе интеграции обучения, который означает единство теории, практики и методики обучения, развитие профессионально значимых мотивов и целей, готовность к расширению образования и в естественнонаучном и гуманитарном плане. Интеграция обучения предполагает различные уровни реализации, исходя из уровней компонентов знаний (факты, понятия, теории, идеи, концепции, законы), а также из уровней способов и видов деятельности.

Интеграция учебных дисциплин на основе обратных связей между дисциплинами может объединить круг учебных дисциплин вопреки представлению об их иерархии. Фундаментализация образования возможна только в случае круга, в котором будут интегрированы как естественнонаучные (специальные и общеобразовательные), так и гуманитарные дисциплины, имеющие профессиональную и

общекультурную значимость, подобно взаимодействию тех аспектов действительности, которые представлены учебными дисциплинами, которые существуют в биосфере и обществе. Всесторонний анализ педагогической деятельности учителя математики и информатики в современной школе, структурно-предметный анализ каждой учебной дисциплины, разработка технологической карты взаимосвязи учебных дисциплин и педагогической практики, внедрение специальных интегрированных курсов позволят нам обеспечить необходимую интеграцию обучения, служащую развитию положительной мотивации учебной деятельности и профессиональной направленности личности студентов – будущих учителей математики и информатики.

С точки зрения деятельностно-личностного подхода к профессиональной подготовке специалиста и будущего учителя математики и информатики мы подчёркиваем особое значение включения в содержание образования всех видов педагогической деятельности в целом, педагогической деятельности учителя математики и информатики в отдельности, а также всех видов учебной деятельности, содержащих потенциал его личностного развития, ведущих элементов как общей культуры, так и математической культуры.

Разнообразие учебных дисциплин позитивно только в том случае, если оно связано с интеграцией, подчиненной развитию целостной личности. Интеграция знаний в онтологическом плане основана на единстве мира, в гносеологическом – на единстве человеческого сознания и законов мышления, в социальном – на целостности человека, в методологическом – на наличии общих закономерностей саморазвития открытой системы «человек–общество–природа». Интеграция содержания повышает гибкость образования, даёт возможность ориентировать его на развитие желаемых качеств человека. Содержанием образования должна быть вся культура человечества, причём под культурой следует понимать творческую, созидательную деятельность человека – как прошлую, воплощённую в ценностях, так и настоящую, основанную на распределении этих ценностей. Содержание педагогического образования должно включать всё, что необходимо для фундаментального профессионального развития педагога. Если образование есть создание образа бытия и в его рамках – образа человека, то педагогическое образование есть создание образа педагогического бытия и в его рамках – образа педагога, содержание образования должно быть фундаментальным, охватывающим все стороны человеческой культуры, в котором гуманитарное и естественнонаучное знания должны представлять как единое знание, отражающее законы развития природы и общества, причём природа и человек должны рассматриваться в гармоническом единстве – так, чтобы человек

рассматривался как часть природы. Поэтому в образовании при отборе его содержания и, особенно в его развёртывании в учебном процессе, необходима интеграция; необходим принцип целостной интегративно разнообразной гармоничной системы знаний.

Интеграция содержания обучения производится нами на основе профильных предметов – математики и информатики, но при этом для обеспечения целостности содержания по типу круга с контуром обратной связи по схеме:

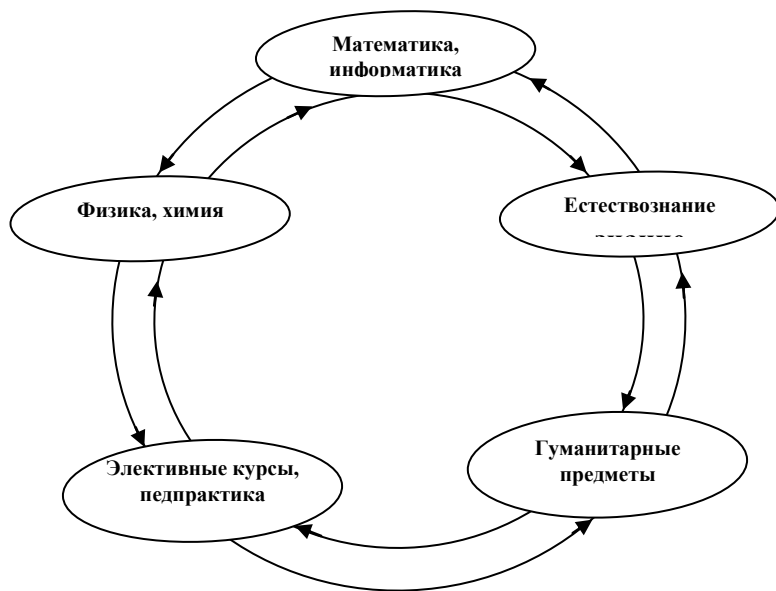


Рисунок. – Схема интеграции предметов

Литература

1. Антонова Л. В., Бурзалова Т. В. Гуманитаризация математического образования учителя математики и информатики // Гуманизация образования. – 2010. - № 3.

2. Антонова Л. В., Бурзалова Т. В. О реализации принципов самостоятельности и научности образования в математических классах // Проблема содержания и методики преподавания предметов физико-математического цикла в школе и вузе. Материалы 5-й межрегиональной научно-практической конференции преподавателей школ, инновационных учебных заведений и вузов.- Иркутск, 1998г.

Антонова Лариса Васильевна, кандидат физико-математических наук, доцент, директор Института математики и информатики Бурятского государственного университета, 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5

Antonova Larisa Vasil'evna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Buryat State University

О РАЗРАБОТКЕ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ ПО ПОДГОТОВКЕ ПРЕПОДАВАТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ В МОНГОЛЬСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ ОБРАЗОВАНИЯ

Аннотация. В статье изучается разработка учебного плана по подготовке преподавателя математики в Монгольском государственном университете образования в 1985-2004 гг путем выявления функционально противоречивых аспектов, имеющихся в учебных программах, учебных курсах по математике, математическому образованию, а также путем анализа тенденций развития с использованием соответствующих учебных планов. Результатом этой работы является не только разработка учебной программы МГУО для подготовки преподавателя математики, но и возможности для проведения сравнительных исследований с учебными планами в других странах, таких как Россия и Китай.

Ключевые слова: дослужебной образование преподавателей, учебная программа подготовки преподавателя математики, знание математического контента, знание педагогического контента.

© *Batkhuu Tserenadmid*

ON CURRICULUM DEVELOPMENT FOR PREPARATION OF MATHEMATICS TEACHER IN MONGOLIAN STATE UNIVERSITY OF EDUCATION

Abstract. This paper studies the curriculum development for Preparation of Mathematics Teacher in Mongolian State University of Education (MSUE) in 1985-2014 by identifying the fundamentally conflicting aspects found in curricula, mathematics teacher training courses, mathematics education, and teaching courses and by doing an analysis on development trends using relevant syllabuses. The outcome of this work not only shows the MSUE's curriculum development for Preparation of Mathematics Teacher, but also opens up an opportunity to complete comparative studies with curricula in other countries such as Russia and China.

Keywords: preservice teacher education, curriculum for preparation of mathematics teacher, mathematical content knowledge, pedagogical content knowledge

The purpose of this article lies in researching the curriculum development for Preparation of Mathematics Teacher in Mongolian State University of Education

(MSUE) and carrying out a comparative study with international experiences, particularly looking at Buryat State University in Russia and the Inner Mongolia Normal University in China.

The curriculum for preparation of mathematics teacher is the longest running programme at the MSUE since it was founded in 1951. Given its history of 67 years, this particular course is regarded as one of the best-developed curricula at the university, which can be seen from the fact that it has become one of the three curricula that were first accredited by ASIIN.

The curriculum development for preparation of mathematics teacher can be divided into three phases: 1) socialist period covering 1951-1990, 2) transition period in 1990-1998, and 3) contemporary period covering 1998-2018. This study has used the syllabuses of curricula offered in 1990, 1998-2000, 2000-2007, and 2007-2014.

The rationale behind research of curriculum using its syllabus is based on the premise that the delivery of training courses go through the following phases: social demand → model of mathematics teacher and teacher education paradigms → professional attributes (list of required knowledge, skills, and attitude) → course syllabus.

A syllabus means here a legitimate document that sets out the list of subjects to be taught to students, terms of school, expected responsibilities (including courses to take, papers to write, exams to take..etc), and required time commitment.

The key methodology used in this study is based on the interactions between opposites as in eastern ying yang sense, and uses its principles to identify key topics, state them in quantifiable measures, and carry out an analysis.

If we link the number of classroom hours to the quality and outcome of mathematics teacher training courses, we can see that 4,210 classroom hours were required to complete the course in 1990, 3,272 in 1998, 2,912 in 2000, and 2,458 in 2007. The required classroom hours nearly halved between 1990 and 2007, which can be explained by the introduction of tuition fees and other economic interactions coming into play.

Academic freedom has been identified as a key topic for training courses in any profession, and so was the social expectations on an individual or the said professional. If we put it in the ratio between the hours of mandatory and elective courses in the training of mathematics teachers, it was 41:1 (4,110/100) in 1990, 12:1 (3,020/252) in 1998-2000, 14:1 (2,720/192) in 2000-2007, and 2:1 (1,674/784) in 2007-2014. It shows a sustaining upward trend in putting academic freedom above social expectations in 1990-2014. This adds to the human attributes of the course, however comes with the risk of producing an unfavourable impact on the quality of the professionals.

Another key topic has been around which comes first for a mathematics teacher – being a mathematician or being a teacher. If we look at it considering the classroom hours of fundamentals, mathematics, and education, we see ratios of 2:6:1 (952/2,800/458) in 1990, 1.08:2.62:1 (754/1,824/694) in 1998-2000, 1.4:1.75:1 (976/1,232/704) in 2000-2007, and 1.7:2.25:1 (848/1,114/496) in 2007-2014. It shows that being a mathematician has had a prevailing position over being a teacher in 1990-2014. The reason why the hours required for fundamental courses doubled the hours of core teaching courses is connected to the communist ideologies and heightened focus on preparing personnel with military qualifications.

If we quantify the overall growth of a mathematics teacher by the numbers of hours of fundamental courses, foreign language courses, and computer skills courses, we see ratios of 1.7:1:2.6 (310/180/462) in 1990, 1.2:1:2 (208/176/370) in 1998-2000, 1.1:1:1.3 (320/288/368) in 2000-2007, and 2:1:1.4 (384/192/272) in 2007-2014. From this we can see that the ratio between the hours for foreign language and computer skills has been around 1:1 on average while the hours for other courses were reduced.

Another key topic has revolved around whether the mathematics teacher training course should focus on the knowledge of mathematics or on the pedagogical content knowledge as part of the framework of compulsory mathematics teacher education. If we quantify this by dividing the mathematical courses into three buckets (1. Analysis, 2. Algebra and Geometry, 3. Probability and Applied Mathematics) and put the first three in ratios, we see 22:12:1 (2,690/1,400/120) in 1990, 1.7:1.7:1 (592/622/358) in 1998-2000, 5.1:3.4:1 (656/432/128) in 2000-2007, and 4.5:3.7:1 (432/352/96) in 2007-2014. This shows that the ratio has been more or less maintained from 1990 to 2014.

Another key topic has been around whether basic pedagogy and psychology or didactics of mathematics should be prominent in mathematics teacher education. If we quantify this by the ratio of hours committed to basic pedagogy and psychology and to didactics of mathematics, we see ratios of 1:2.9 (118/340) in 1990, 1:2.3 (208/486) in 1998-2000, 1:2.7 (192/512) in 2000-2007, and 1:1.8 (256/464) in 2007-2014. It should be noted that the hours for didactics of mathematics included the course of school mathematics which is the course of high school problem solving techniques. Therefore, if we look at the ratio between the didactics of mathematics hours and the school mathematics hours, we would see ratios of 1:2.4 (100/240) in 1990, 1:2.5 (140/346) in 1998-2000, 1:1 (256/256) in 2000-2007, and 1:1.2 (224/272) in 2007-2014. This shows that the school mathematics hours have always been more than the hours committed to didactics of mathematics in the mathematics teacher training course.

The teaching practice required under the mathematics teacher training course was 12 weeks in 1990, 10 in 1998-2007, and 16 in 2007-2014. In 1990-2007, the teaching practice was required in the 3rd and 4th years while 2007-2017 saw students being required to do the teaching practice for 16 consecutive weeks in their final 8th term. Successful presentation of the teaching practice report would be mandatory for being graduated. In contrast to that, the 1990-2007 training courses required students to take an exam every term and a graduation exam on mathematics and education in the final term. But, in 2007-2014, students were required to take a unified exam of mathematics subjects at the end of their 4th term (besides taking exams every term) and, if successful, they would proceed to enrol into pedagogy and psychology and didactics of mathematics courses. Then they would have to complete their teaching practice in 16 consecutive weeks in the final term before graduation.

In conclusion, these analysis show that the MSUE's mathematics teacher training course is developing in a way where academic freedom is given more priority to social demand and expectations, mathematics education leads teacher education, and knowledge of mathematics didactics prevail over pedagogical content knowledge.

Батхуу Цереннадмид, профессор-доктор математики, заведующий научно-исследовательским центром по математике и естественным наукам, Монгольский государственный университет образования, Монголия, Улан-Батор, e-mail: tsbatkhuu@yahoo.com

Batkhuu Tserenadmid, Professor – Doctor of Mathematics, Mongolian State University of Education

ОБРАЗЫ ОБРАЗОВАНИЯ: ОТ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ К САМОПОЗНАНИЮ И САМООБРАЗОВАНИЮ

Аннотация. Математическое образование в стране, так же как и любое другое, испытывает серьезный кризис, корни которого лежат в более глубокой, чем математика, сфере. «Подавленная самость» (К.Г. Юнг) – вот корень всех наших, в том числе и образовательных, бед. Именно поэтому автор отстаивает идею системы образования как помощи в самопознании и становлении человеком. В статье отмечается философская несостоятельность нынешней образовательной политики в России, предлагается исследование должного влияния философии на образовательную политику. Проблемы современного образования связываются с господством отчуждающих человека от своей сущности концепций и установок, с игнорированием целостной философии. Соответственно, решение проблем образования видится возможным только через философию, утверждающую наличие в душе каждого глубинного светоносного сознания, которое не должно быть погашено в результате механистического, формально-отчужденного, авторитарного образования.

Ключевые слова: образование, образ образования, самопознание, подавленная самость, целостная философия, государство, образовательная политика.

© L. V. Gomboeva

IMAGES OF EDUCATION: FROM UNCERTAINTY TO SELF-CONSCIOUSNESS AND SELF-EDUCATION

Abstract. Mathematical education in the country, like any other, is experiencing a serious crisis, the roots of which lie in a deeper than mathematics sphere. "Suppressed self" (C. G. Jung) is the root of all our troubles, including educational. That's why the author asserts the idea of educational system as an aid in self-knowledge and personal becoming. The article notes the philosophical inconsistency of the current educational policy in Russia and studies the proper influence of philosophy on educational policy. The problems of modern education are associated with the dominance of the concepts and attitudes alienating people from their nature, and ignoration of integral philosophy. Consequently, the solution of educational problems is possible only through a philosophy that affirms the existence of depth luminous consciousness in everyone's souls, which should not be extinguished as a result of mechanistic, formally alienated, authoritarian education.

Keywords: education, image of education, self-knowledge, suppressed self, holistic philosophy, the state, educational policy.

В наши дни в обществе есть лишь два основных образовательных института: семья и школа. В семье ребенок воспитывается и образовывается под влиянием, как правило, иррационально сформировавшихся ценностей семьи. Выражаясь языком Э. Берна, в семьях принцев вырастают принцы, в семьях лягушек вырастают лягушки. В учебном заведении учащийся подпадает под власть педагогов, руководствующихся такими же не всегда рационально осознанными мотивами, с одной стороны, и различными ФГОСами, учебными и календарными планами, Законом и Концепцией развития образования, философская подоплека которых остается за семью печатями, так как она нигде не опубликована и, возможно, её просто не существует. Занятые, в основном, преподаванием узкопрофильных дисциплин, заполнением различных бумажных и электронных форм, современные педагоги не видят целостной картины мира, человека, общества и образования, не дают её учащимся. Таким образом, в настоящее время ни семья, ни школа не направляют должным образом на развитие человека и общества, не обеспечивают должное образование, которое создавало бы счастливого и гармонично развитого человека и такое же общество. Ожидать, что каждый человек должен «сделать себя сам» не приходится, так как далеко не у каждого соответствующие способности развиты достаточным для этого образом. Если посмотреть: как мало счастливых лиц встречается на улицах наших городов и сел, то понятно, что с нашим образованием что-то не так. Если посмотреть на документы, регулирующие образовательные процессы в стране, то становится ясным, что система образования даже не ставит перед собой цель формирования счастливых людей и сообществ.

Если мы хотим изменить ситуацию и сделать образование таким, чтобы оно реально могло улучшить жизнь человека и общества, нам следует исследовать учения философов, специализировавшихся по этим проблемам.

Одну из первых социально-ориентированных концепций о воспитании идеального человека разрабатывал Конфуций. Для того, чтобы в обществе был порядок, необходимо воспитывать «благородных мужей», в дальнейшем способных занять руководящие позиции в обществе. Основная характеристика «благородного мужа», принца – человеколюбие, проявляющееся в руководстве «золотым правилом этики»: «Не делай другим того, чего не желаешь себе». Если в государстве правители не являются «благородными мужами» и таковых не воспитывают, то в обществе не будет порядка, сколько бы законов не издавалось.

Другая важная образовательная концепция на Востоке – буддизм. Буддизм, опять же выражаясь языком Э. Берна [1], это учение о том, как из лягушки превратиться в принца, или точнее: как снять лягушачью оболочку

и проявиться принцу в нас. Буддийский образ образования основан на Трёх Драгоценностях: Будде как идеале, пробудившем в себе ясность ума, доброе сердце и творческую активность (идеал принца), Дхарме – учении о том, как пробудиться, и Сангхе как сообществе единомышленников. Буддийское образование имеет непрерывный трехступенчатый и циклический характер. Учитывая инертность сознания, буддисты различают три этапа Пути: слушание, размышление и практика, которые рекомендуется проходить вновь и вновь вплоть до достижения состояния Будды. Стоит отметить, что в буддизме Махаяны идеал Будды был потеснен идеалом Бодхисаттвы – существа, который остается в мире страданий лягушек и не уходит в нирвану (как принц Будда), чтобы лучше помогать другим живым существам (другим лягушкам). Постоянное самообразование ради лучшей помощи другим живым существам – таков Путь Бодхисаттв. Отечественная система образования могла бы перенять мудрость буддизма и также ориентировать человека и общество на высокие идеалы, предложить определенную теорию по их достижению и соответствующие практики, сформировать сообщества единомышленников, создать систему непрерывного циклического самообразования посредством слушания, размышления и практик.

Историю западных образов образования начнем с Сократа, который, так же как и буддисты, направлял людей на самопознание: «чудовище ли я замысловатее и яростней Тифона или же я существо кроткое и простое, хоть и скромное, но по своей природе причастное какому-то божественному уделу». Чтобы стать принцем, согласно Сократу, следует познать истинные блага: умеренность, самодостаточность, храбрость, справедливость, привычка действовать наилучшим образом и другие доблести души. Методика Сократовского образования – диалогическая: «я знаю только, что ничего не знаю, но давай вместе поищем». И интенция самопознания, и диалогизм в образовательном подходе Сократа и ныне весьма актуальны для вывода нашего образования из монологического авторитарного и отрицающего душу и дух состояния.

Аристотель предложил весьма целостный образ образования, возможно, самый целостный. Государство люди создают для того, чтобы не просто жить, а жить счастливо. Условиями для счастья, по Аристотелю, являются дианоэтические (рассудительность, смекалка, мудрость) и этические добродетели (умеренность, мужество, щедрость, справедливость и т.п.). В чем состоит счастье – люди договариваются сами, так как у них есть разум и речь. Главной задачей государства как высшего рода общения должно быть воспитание в гражданах этических и дианоэтических добродетелей, сделать из свободных людей принцев. Аристотель делил государства на:

правильные и неправильные. Правильные государства отличаются от неправильных заботой правителей об общем благе, а не о личном кармане, и эту заботу в свободных гражданах надо воспитывать в совместной деятельности.

В эпоху западного Средневековья маятник образов образования, несмотря на высокие духовные идеалы христианства, для широких масс качнулся в сторону темноты, мракобесия и патернализма. Бог всё создал и всё установил: одни – принцы от рождения, другие – лягушки, «вся власть от Бога». Принц должен быть принцем, лягушка должна оставаться лягушкой. Человек стал восприниматься не как существо божественное, а как глубоко греховное. Все земное провозглашается суетным и грешным, человеку предписывается познавать только Бога и только посредством Церковных его интерпретаций. Образование здесь нужно было, в основном, только для священников, юристов и врачей. Человек занял подчиненное, Богом установленное, место по отношению к Богу, к Церкви и к ее главе – Папе Римскому.

Многие мысли об образовании следующей эпохи – эпохи Возрождения – светлы и должны быть актуализированы и в наши. Религиозный дух Средневековья стал вытесняться искусством и верой в человека. Философы отказываются от господствующей тогда церковно-католической трактовки Библии, диктата жестких предписаний Церкви, и осознают необходимость воспитания человека-творца. Для этого человек провозглашается микрокосмом-в-макрокосме (Н. Кузанский), способным самостоятельно определять свой образ (Пико делла Мирандола). Лягушка должна стать принцем, потому что она и есть принц. Чуть позже гуманистическая вера в человека подкрепилась и верой в возможность построения справедливого общества. Утописты Т. Мор и Т. Кампанелла, а также основоположник протестантизма М. Лютер выдвигали идею всеобщего обязательного образования для построения гармонично устроенного общества.

В Новое время благодаря концепциям Ф. Бэкона и Р. Декарта образы образования приобрели механистический и рационалистический оттенок:

- складывается механистическая картина мира,
- основным средством спасения человечества от бедности, болезней и других проблем видится не Бог, не искусство, а наука, основанная на механике,
- место, которое занимало вера в образовании средневековья, заняли опыт и разум; началось массовое абсолютное недоверие вере. «мы не верим, мы знаем», - говорят убежденные механицисты и в наши дни.
- возникает новый идеал человека – рациональный субъект, способный познавать мир объективно и без лишних эмоций.

Принц теперь – это учёный, созидающий не созерцательную, как у Аристотеля, а практически-ориентированную науку; лягушки – все остальные. При этом, нововременной принц – это человек, исключаящий чувства и эмоции; эдакий интеллектуальный сухарь. Поэтому механистически ориентированное образование не обращает внимание на развитие эмоционального интеллекта учащегося, и это крайне печально.

Наука, согласно механицизму, должна дать вполне определенную картину мира. Проблема в том, что многие педагоги и сегодня мыслят механистическим образом. Ориентация на определенность мира влечет недооценку необходимости развития самосознания в человеке при образовательном процессе. Если мир определен, то относительно него могут быть сформированы четкие инструкции, согласно которым и должен действовать механистически ориентированный и образованный человек. Механицизм как образовательная парадигма плох еще и тем, что исключает из внимания тонкие связи человека с его окружением. Человек не понимает взаимозависимость, не чувствует свою ответственность в мире.

Существенный урон концепция образования как принцеобразования получила со стороны сенсуализма Дж. Локка, провозгласившего с целью политического уравнивания прав людей (прежде всего, дворян и буржуа), что сознание новорожденного – белая бумага. Если сенсуализм прав, то никакого истинного я не существует, и духовность, и нравственность, и принц по природе, – пустые фикции. Опрос студентов показывает, что многие из них поддерживают сенсуализм. Это бы не имело большого значения, если бы не означало отчуждение от собственной сущности.

Наряду с выделением негативных тенденций нововременных образов образования, стоит отметить небольшую концепцию Ф. Бэкона о трех путях познания: путь муравья (путь опыта; можно всю жизнь идти этим путем – спотыкаясь, поднимаясь, опять спотыкаясь и т.д.; при этом, далеко не факт, что ты идешь в правильном направлении), путь паука (путь голой теории) и путь пчелы (плодотворный путь от опыта к теории и обратно). Похоже, что отечественное образование, абстрагируясь от целостных философских изысканий в формировании образовательной политики, все еще идет путем муравья, которым до состояния принца очень сложно дойти, практически нереально.

В эпоху Просвещения под влиянием успеха разума в естествознании мыслители искали способы устроить и общественную жизнь не на основе освященных церковью и препятствующих прогрессу обычаях, а на основе разума и ценностей свободы, равенства, братства, справедливости. Провозглашаются идеалы просвещенной монархии (Вольтер) и республики (для небольших государств, Руссо). Странник просвещенной монархии

вольтер считал, что просвещать следует только верхушку общества. «Если народ начнет рассуждать, всё погибло» (Вольтер). Сторонник республики и «естественного человека» как принца, философ, видевший поработавшие механизмы образования, руссо считал, что народ должен контролировать назначаемую им власть. В целом, многие философы эпохи (Вольтер, Ламетри, Руссо и др.) Признавали право народа свергать государей, злоупотребляющих своей властью в ущерб подданным. Убежденность народа (лягушек-принцев-по-природе) в этом своем праве – единственное средство, способное удержать власть (формальных принцев) в необходимых для общества границах.

Философы-материалисты объявили человека не сыном Бога, не рабом Бога, а машиной и даже животным (Ламетри), а самого Бога – пустой фантазией и иллюзией (Дидро). Здесь мы также (вслед за сенсуализмом Локка) видим истоки отхода образования от своей миссии: познать самого себя и улучшить свой образ.

В эпоху Немецкой классической философии вопреки рационалистическому оптимизму Декарта и сенсуализму Локка Кант поставил границы познания для разума и оставил место для веры в Бога, в бессмертие души и в свободу человека. Только в условиях свободы человека возможна его нравственность, основанная на «категорическом императиве» - требовании поступать так, чтобы «максима твоего поведения стала максимой поведения для всех», чтобы каждый (в том числе, и ты сам) был для тебя «не только средством, но и целью. Если педагоги и система образования, в целом, будут видеть в каждом ребенке цель, а не средство, если они будут опираться на веру в человека, а не на знания (которых явно недостаточно для гуманистических реформ), если они будут развивать свободную и нравственную личность, то естественно, что образовательный процесс станет более принце-производящим.

Если Кант ограничил разум и оставил место вере, то гегель вновь сверг веру и возвел разум на мировоззренческий пьедестал, с которого он уже практически не сходит для официального мировоззрения: Бог – это не любовь, как раньше, а разум. Гегель рационализировал мировой процесс. Для гегеля весь мир есть самопознание абсолютной идеи себя как свободы. И теперь нам нужно еще пройти через иррационалистическую философию, чтобы понять место веры в жизни человека и общества.

Гегель не ограничился возвышением разума над чувствами, верой и эмоциями. На место церкви он поставил государство: государство – это «вступление Бога в мир». Благодаря рационализму гегеля человек стал рабом не церкви, а государства. Напыщенный и усложненный язык Гегеля, с помощью которого он объяснял все мироустройство, по мнению к.

Поппера, положил начало «веку нечестности» или «эре безответственности», «новой эре, подчиняющейся магии высокопарных слов и силе жаргона» [2, т. 2, 37].

Борьбу с рационализмом Гегеля начали его же современники – иррационалисты. С. Кьеркегор выступил против абстрактного мышления, обезличивающего человека, внушающего недоверие страстям, воле и вере. Человек должен пройти через отчаяние, познать себя и выбрать самого себя: «будь самим собой», смирись и обрети истинное я, которое является и конечным и бесконечным. По А. Шопенгауэру, человек – это сплошная объективация неразумной воли, приносящей лишь страдания. Погасить волю к жизни, заняться аскезой или искусством – таким он рисовал путь идеального человека (принца). Ф. Ницше вопреки шопенгауэру воспевал в человеке (принце) волю к жизни, к сильному состоянию, буйство красок и чувств. У. Джеймс настраивал на мистическое восприятие мира и себя: «видимый мир является лишь частью иного, духовного мира, в котором человек черпает свой главный смысл», «истинной целью жизни является гармония с этим высшим миром». Иррационалистическая философия подтвердилась и научными изысканиями XX столетия. Квантово-механическая картина мира исключила определенность из картины мира: субъект в познании влияет на объект; значит, объективной картины мира не существует. Вслед за этим м. Клайн провозгласил «утрату определенности» даже из такой, казалось бы, точной науки как математика [3].

Мир стал не вполне определенным и не вполне определяемым. Что это означает для образовательной политики? – В меняющемся и неопределенном мире важны не столько конкретные знания, умения и навыки, которые относительно и являются лишь средством, а не целью, сколько сам субъект и достоинства его сознания.

Судя по рационалистическому наполнению учебных программ, иррационалистическая философская мысль еще не нашла должного отражения в отечественном образовании. Соответственно, современный человек, оставаясь рабом рационалистических убеждений и умной лягушкой, так и не встречается с собственной сущностью (принцем), соответственно, образование все еще не носит должный развивающий характер. И это, в сущности, преступно.

К. Маркс увидел историю человечества как историю борьбы классов (борьбы принцев и лягушек) и назвал человека «совокупностью общественных отношений». Он считал, что люди становятся сознательными, свободными и творческими (принцами), лишь когда они не отчуждены от средств производства в результате построения коммунистического общества.

Ленин, следуя Марксу, при построении социалистического – переходного к коммунизму – общества, взял за основу своей образовательной политики сенсуализм: «сознание новорожденного – чистый лист», никакого божественного уровня сознания нет. Человек стал рассматриваться лишь как средство для построения коммунизма (не по канту), как лягушка. Большое внимание уделялось воспитанию советского человека: октябренька, пионера, комсомольца, коммуниста в духе коллективизма и беспрекословного послушания: «Партия сказала: «Надо!», - комсомол ответил: «Есть!»». Тихо и бесшумно безликими городами, серыми массаами, уравниловкой, осуждением всего яркого, индивидуального, попирались многие важные этические и эстетические чувства людей, происходило нивелирование личности, подавление его самости, его природы принца.

В постсоциалистический период на фоне обесценивания человеческого в человеке победила либертарианская идеология, позволяющая получать сверхприбыли небольшому числу лиц и оставившая некоторый минимум социальных гарантий для общества. Природные богатства и сейчас позволяют получать нефтегазовые доходы, не развивая экономику и образование. Господство либертарианской идеологии, когда каждый за себя и никто за общество, крайне негативно сказывается на российской политике и культуре, в целом. Самость остается подавленной. Образовательная политика исключает идеалы-образы, способствующие развитию человека и общества. Утрата идеалов, потеря нравственных ориентиров ведет к формализации процесса воспитания в школе и даже к отказу от него.

В условиях неопределенности образов образования основное внимание уделяется формированию так называемых «зунов» и компетенций. Хотя, действительно, в информационном обществе знания, умения и навыки важны, пожалуй, как никогда раньше (например, в западных странах современное сельскохозяйственное производство уже немыслимо без информационных технологий), но признание их в качестве основной цели образования отвлекает от главной задачи человека и общества: становление человека человеком и общества – подлинным обществом.

Если принц подавлен на философском уровне, то работает авторитарно-монологическая педагогика по устаревшей схеме «над» учеником, а не «рядом» с учащимися. Привыкнув с детства к насилию над собой, индивид вовлекается в другие схемы авторитарных социальных отношений и при возможности сам становится источником насилия. «Лишь немногие чувствуют себя защищенными. Слабые физически притесняются сильными. Слабые в умственном отношении – учителями, преподавателями и сверстниками» [4, 54]. Бесправное положение людей приводит, с одной

стороны, к социальной апатии, с другой стороны к произволу властей и коррупции, что весьма разрушительно для общества. Демократическое поведение в таких условиях невозможно сформировать, соответственно, демократия невозможна. Формализм, авторитаризм образования приводит к тому, что из учащихся получается «робкое, безличное существо с подавленной волей и неразвитой мыслью, мало подготовленное к жизненной борьбе» [5, 66]. И можно добавить, что ему ничто не интересно, в том числе и математика.

Итак, либертарианская идеология, вслед за многими другими исторически предшествующими, оставляет нераскрытой самость [6] учащегося, вместо становления человека человеком, а общества – обществом, образовательная политика рекомендует ориентироваться на невыверенные системно компетенции.

Для решения насущных задач повышения качества образования, в том числе математического, необходимо: устранить ситуацию неопределенности образов образования через их целостную философскую рефлексию, концептуализировать образование как помощь в раскрытии самости, создать личностно- и социально- ориентированную образовательную среду, в которой нормами являются актуализация личностного начала, ценности счастья, совместной деятельности и саморазвития, нравственная позиция человека, ориентация на благо самого себя, другого и общества, а также природы, в целом [7].

Литература

1. Берн Э. Игры, в которые играют люди: Психология человеческих взаимоотношений; Люди, которые играют в игры: психология человеческой судьбы. – Мн.: Попурри, 2005. – 512 с.
2. Поппер К. Открытое общество и его враги: соч. в 2 т. – М.: Феникс; Международный фонд «Культурная инициатива», 1992.
3. Клайн М. Математика. Утрата определенности. – М.: РИМИС, 2007. – 640 с.
4. Иванников В.А. Задачи практической психологии в комплексной службе помощи детям.// Вопросы психологии. – 2005. – №1. – С.51-55.
5. Попова О.Д. Психологический климат в женских епархиальных училищах середины XIX – начала XX в. // Педагогика. 2005. – № 2. – С. 62-67.
6. Юнг К.Г. Нераскрытая самость / К.Г. Юнг // Избранное. – Мн.: Поппури, 1998. – 263 с.
7. Очиров М.Н., Цыбикова Л.Х., Шадаров Б.Г. Человек и природа. Стратегия взаимодействия. – У.-У.: Изд-во БГУ, 2015. 96 с.

Гомбоева Лидия Викторовна, кандидат философских наук, доцент кафедры философии, истории и культурологии, Восточно-Сибирский государственный

университет технологий и управления, 670013, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40 «в»,
e-mail: lida67@mail.ru

Gomboeva Lidiya Viktorovna, Candidate of Philosophy, Associate Professor, East-Siberian State University of Technology and Management

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИНАХ СОЦИОГУМАНИТАРНЫХ ПРОФИЛЕЙ

Аннотация. В статье обосновывается необходимость изучения основ математического моделирования гуманитарных объектов в математических дисциплинах при обучении студентов социогуманитарных профилей. Дается описание математического моделирования гуманитарных объектов и его особенности. Указываются преимущества метода математического моделирования для исследования гуманитарных объектов. Приводятся основные задачи, для которых метод математического моделирования является наиболее эффективным. В статье описывается структура умения выполнять математическое моделирование студентами социогуманитарных профилей. Приводятся примеры задач, решаемых в курсе математических дисциплин бакалаврами в курсе дисциплины «Математика», магистрами при изучении дисциплины «Научные и статистические методы обработки информации» и аспирантами социогуманитарных профилей при изучении математических методов и моделей в профессиональной и научной деятельности.

Ключевые слова: математическое моделирование, гуманитарные объекты, методика обучения математике студентов-гуманитариев.

© М. А. Kislyakova

BASICS OF MODELING IN MATHEMATICAL DISCIPLINES OF SOCIO-HUMANITARIAN PROFILES

Abstract. The article substantiates the necessity of studying the foundations of mathematical modeling of humanitarian objects in mathematical disciplines when teaching students of sociohumanitarian profiles. We give the description of mathematical modeling and its features, point out the advantages of this method for studying humanitarian objects. The article presents the main problems for which solution the method of mathematical modeling is the most effective, describes the structure of students' skills necessary for performing mathematical modeling. The examples of problems solved in the course of "Mathematics" by Bachelors, "Scientific and Statistical Methods of Information Processing" by Masters, in the process of studying mathematical methods and models for professional and scientific activities by graduate students of social and humanitarian profiles are given.

Keywords: mathematical modeling; humanitarian objects; methods of teaching mathematics to humanitarian students.

Введение

Цель включения математических дисциплин в основную профессиональную образовательную программу подготовки студентов социогуманитарных профилей связана с необходимостью развития *«способности применять математический аппарат для решения профессиональных задач»*.

Такая формулировка, вытекающая из соответствующих компетенций, ставит перед педагогами серьезный вопрос: что, собственно говоря, понимать под *«применением математического аппарата»* и какие именно *«профессиональные задачи»* студент должен научиться решать? Более того, в условиях тотального сокращения времени на изучение математических дисциплин, этот вопрос становится еще острее.

Обращаясь к работам специалистов в области изучения гуманитарных процессов и явлений, таких как А.В. Коротаев, Г.Г. Малинецкий, Е.А. Солодова, А.К. Гуц, Г.В. Суходольский, Д.А. Новиков, В.В. Афанасьев, Г.Г. Татарова и др., мы видим, что применение математических методов в этой сфере связано, главным образом, с математическим моделированием гуманитарных объектов.

1. Математическое моделирование гуманитарных объектов

Роль математики невероятно велика в понимании окружающего мира, подтверждением этому является глубокая история математики, органично вплетенная в историю всего человечества. Математика из практических нужд человека выросла в эффективное методологическое средство познания. О возможностях математических методов в исследовании трудно формализуемых объектов гуманитарной сферы начали говорить давно. Однако в XXI веке применение математики и ее богатого аппарата к решению проблем социальной и гуманитарной сферы начинает приобретать мировой характер (конфликтные ситуации, иерархические отношения, общественное мнение и т.д.).

Математическое моделирование – это идеальное научное знаковое формальное моделирование, при котором описание объекта осуществляется на языке математики, а исследование модели проводится с использованием тех или иных математических методов [1, с. 32]. Математическое моделирование – сложный процесс, который включает в себя как минимум три основных этапа:

- формализация (этап построения математической модели);
- решение внутримодельной математической задачи (этап расчетов);

– толкование полученного решения (этап интерпретации) [11, с. 273].

Под математическим моделированием гуманитарных объектов понимают процесс исследования реальных социальных явлений или гуманитарных объектов с помощью их математических моделей.

К математическому моделированию гуманитарных объектов обращены взгляды многих ученых, потому как гуманитарные объекты слишком сложны и их натуральное исследование невозможно или слишком затратное. Очень часто методы математического моделирования являются единственно возможными. Как сказал И.М. Яглом: «математика – отнюдь не царица наук, она занимает в мире, иное, куда более значимое положение: она обслуживает естественные и гуманитарные науки, доставляя им адекватный аппарат для описания возможных фактов и явлений, составляя тот язык, на котором эти факты удобнее всего записывать, классифицировать и сопоставлять» [12, с. 56].

В сравнении с натуральным экспериментом, математическое моделирование гуманитарных объектов имеет ряд преимуществ:

- экономичность, сбережение материальных ресурсов;
- возможность моделирования гипотетических объектов;
- возможность повторения экспериментов;
- универсальность программного обеспечения и т.д.

Математическое моделирование гуманитарных объектов позволит:

– понять, как устроен конкретный объект: какова его структура, внутренние связи, основные свойства, законы развития, саморазвития и взаимодействия с окружающей средой;

– научиться управлять объектом, определять наилучшие способы управления при заданных целях и критериях;

– прогнозировать прямые и косвенные последствия реализации заданных способов и форм воздействия на объект [1, с. 22-23].

В основе математического моделирования гуманитарных объектов лежит предположение, что многие процессы окружающего гуманитарного мира подчиняются некоторым закономерностям, и могут быть описаны с помощью математического языка. Е.В. Шикин описывая математические методы исследования гуманитарных объектов говорит: «... универсальные закономерности, лишь смутно видимые в других областях, в математическом описании различимы более явно ...» [10, с. 13].

Неполный перечень задач, решаемых с помощью математического моделирования гуманитарных объектов, можно представить так:

– анализ данных (объяснение результатов опросов, тестирования, диагностики, представленных в виде массива числовых данных);

– описание и объяснение существующих гуманитарных явлений (построение моделей явлений и их исследование с использованием математических моделей);

– предсказание возможных гуманитарных явлений [2, с. 23].

Безусловно, построение математических моделей педагогических явлений не может с такой же, как в физике или биологии, степенью адекватности описать изучаемый объект — слишком он сложен и подвержен влиянию огромного числа факторов. Однако внедрение математических методов в педагогику — именно то, что позволит эффективно противостоять нападкам на нее по поводу эмпиричности и ненаучности и позволит стратегически видеть перспективы гуманитарного знания [3].

2. Математические дисциплины в социогуманитарном образовании

В работах М.А. Кисляковой, А.Е. Полички раскрыт педагогический потенциал математических дисциплин в подготовке бакалавров социогуманитарных объектов, согласно которому в математической дисциплине выделяются только те учебные элементы, которые способствуют развитию заданной системы компетенций [4,5,6].

Ставя целью обучения математических дисциплин – освоение основ математического моделирования гуманитарных объектов, разработчики рабочих программ становятся перед серьезной задачей. Как в условиях недостаточной математической подготовки студентов-гуманитариев учить основам математического моделирования гуманитарных объектов, о которых они еще ничего не знают? Более того, школьный курс математики, построенный на дедуктивной основе, воспринимался школьниками как набор мертвых формул, предназначение которых не совсем ясно. Как следствие, учащиеся не умеют определять ситуации, где необходим математический аппарат, не умеют догадываться, не умеют вводить переменные, не умеют математически описывать ситуацию. Именно поэтому математические дисциплины в высшем образовании должны быть направлены на овладение опытом решения разнообразных задач с привлечением метода математического моделирования.

В качестве примера необходимости применения метода математического моделирования можно привести две следующих ситуации.

Ситуация 1. Принимается решение об открытии экспериментальной школы для детей, показывающих хорошие результаты в некотором спорте (предположительно это результаты применения новой методики обучения). Вопрос: значимы ли статистически полученные данные (т.е. новая методика

справедлива для всех), либо это успешные результаты некоторых конкретных детей?

Ситуация 2. Незадолго до выборов социологический опрос показал, что 60 % избирателей уже решили, за кого будут голосовать. При этом 55 % из них решили голосовать за кандидата С.П. Иванова. Какой процент из тех, кто еще не определил своего избранника, должен голосовать за кандидата С.П. Иванова, чтобы за него проголосовала половина избирателей [13, № 508622].

Обучение основам математического моделирования гуманитарных объектов студентов социогуманитарных профилей подразумевает обучение взаимосвязанной системе умений:

– умение определять возможность и необходимость применения математического аппарата для описания «социогуманитарного» объекта;

– умение подбирать подходящий математический аппарат, позволяющий описать социогуманитарный объект на математическом языке, и использовать преимущества этой переформулировки для его анализа;

– умение подбирать подходящую для данной ситуации математическую модель из уже известных;

– умение формулировать математическую задачу, представляя математическое утверждение как условие и требование в письменной и устной формах;

– умение осуществлять поиск решения математической задачи с использованием учебной и научной математической литературы, с привлечением средств информационных технологий;

– умение самостоятельно осуществлять решение математической задачи наиболее эффективным способом;

– умение оценивать правильность и эффективность выбранного решения;

– умение определять границы применения построенной модели и найденного решения.

Комплексная математическая подготовка студентов социогуманитарных профилей осуществляется следующим образом. В программе подготовки бакалавров изучается дисциплина «Математика» на первом курсе в объеме двух зачетных единиц. В программе подготовки магистров «Научные и статистические методы обработки информации» в объеме двух зачетных единиц. В аспирантуре – курс по выбору «Математические методы и модели (в профессиональной деятельности)».

3. Математические дисциплины для бакалавров социогуманитарных профилей

Анализ входных диагностических работ бакалавров первого курса хоть и показал достаточно низкий уровень математических умений студентов социогуманитарных профилей, однако, можно утверждать, что все базовые понятия (число, функция, уравнение, неравенство, вероятность и т.д.) на уровне представлений и первого уровня усвоения сформированы. Это позволяет говорить о возможности изучения элементов математических теорий, лежащих в основе математического описания гуманитарных объектов.

В математических дисциплинах, изучаемых бакалаврами на первом курсе, элементы математических теорий включены в рабочие программы. Элементы теории множеств (способы задания множества элементов, операции над ними, применение в опросах). Элементы линейной алгебры (матрицы, системы линейных уравнений, социоматрицы). Элементы математического анализа (функциональная зависимость, дифференциальные уравнения, задачи на наибольшее и наименьшее значение). Элементы теории вероятностей и математической статистики (вероятность случайного события, случайная величина, описательные статистики, статистическая гипотеза). Элементы теории игр (стратегия) [8].

Указанные учебные элементы позволяют освоить первый и второй этап математического моделирования – построение содержательной и математической моделей за счет освоенных умений определять возможность и необходимость применения математического аппарата для описания гуманитарного объекта, и умения подбирать подходящий математический аппарат, позволяющий описать социогуманитарный объект на математическом языке, и использовать преимущества этой переформулировки для его анализа.

Пример № 1. Опишите математически следующую ситуацию и дайте ответ на вопрос. Вы организовываете выезд детской команды, состоящей из 17 мальчиков и 13 девочек, в другой город. Как разместить всех по номерам в одной гостинице, если известно, что в гостинице одинаковое количество двухместных и одноместных номеров. Девочки и мальчики должны жить в разных номерах. Можно ли поселить девочек в одноместные номера, если всего свободных номеров 20?

Пример № 2. Опишите математически следующую ситуацию и дайте ответ на вопрос. Вы провели опрос среди случайно отобранных родителей одного из детских садов на предмет удовлетворенности условиями детского сада. Каждому респонденту было предложено оценить условия садика по шкале.

Мнение	Баллы
Работой детского сада доволен	1
Работой детского сада скорее доволен, чем не доволен	2
Трудно сказать, не знаю	3
Скорее недоволен работой детского сада	4
Совершенно недоволен работой детского сада	5

Получены следующие результаты:

1	2	3	1	2	3	1	4	5	5	4	5	4	5	5	2	3	4	4	4	4	4	4	4	2	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	2	4	2	1	4	2	1	4	2	5	3	3	1	2	1	4	1	4	3	4	3	4	3	3	3
2	3	2	1	4	4	1	4	3	4	4	4	4	4	4	4	2	1	4	4	1	2	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	1	2	4	1	2	5	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	3	4	4	4	4	3	4	3	4

Что можно сказать о мнении «большинства», какие числовые характеристики необходимо найти для того, чтобы наиболее детально описать рассматриваемое явление?

Пример № 3. Выясняются взаимоотношения членов некоторой группы (Александр, Ева, Светлана, Михаил, Петр). Из записей специалиста: Александр имеет приятельские отношения со Светланой и Петром, остальные, по его мнению, обладают недостатками, и он с ними минимизирует общение. Ева дружит лишь с Петром, Михаила «недолюбливает», а Светлану не замечает. Светлана дружит с Александром, и Петром, полагая, что Ева с Михаилом нарушают «баланс группы». Михаил имеет деловые приятельские отношения лишь с Александром, остальные его не интересуют и он никак не смог охарактеризовать членов группы. Павел выразил положительное отношение только к Александру, про Еву сказал, что она плохо справляется со своими обязанностями. Выбрать подходящий математический аппарат для описания данной ситуации.

4. Математические дисциплины для магистрантов социогуманитарных профилей

Обучение в магистратуре дает возможность студентам, освоившим на уровне бакалавриата профессиональную деятельность, изучить разные математические методы исследования гуманитарных объектов.

На этом этапе обучения формируются умения:

– подбирать подходящую для данной ситуации математическую модель из уже известных (модель Мальтуса, Модель Преподаватель-студент, Модель Майера, корреляционная модель и т.д.)

– формулировать математическую задачу, представляя математическое утверждение как условие и требование в письменной и устной формах (в виде системы математических уравнений и сформулированной статистической гипотезы, или бинарной матрицы и т.д.);

– осуществлять поиск решения математической задачи с использованием учебной и научной математической литературы, с привлечением средств информационных технологий (онлайн калькуляторы, Excel, SPSS Statistics и др.);

– умение самостоятельно осуществлять решение математической задачи наиболее эффективным математическим методом (функциональный метод решения дифференциальных уравнений, методы оптимизации, методы проверки статистических гипотез с использованием критериев согласий и различий, метод использования факторного анализа и т.д.).

Пример № 1. Имеется четыре претендента C_i на четыре вида работы P_i (провести сбор материала, разработать товарный знак, разработать сейлз промоушн, провести работу с потребителями). В таблице представлены оплаты сотрудников за каждый вид работы (в тыс. рублей). Необходимо распределить сотрудников для выполнения четырех работ, таким образом, чтобы минимизировать суммарную себестоимость выполнения всех работ.

	P_1	P_2	P_3	P_4
C_1	3	7	5	8
C_2	2	4	4	6
C_3	4	7	2	8
C_4	9	7	3	7

Пример № 2. В ходе работы у вас появилась гипотеза о том, что причины неуспеваемости по мнению школьников, родителей и учителей значительно отличаются. Действительно ли это так, либо это частные случаи?

5. Математические дисциплины для аспирантов социогуманитарных профилей

Обучение в аспирантуре позволяет студентам работать над одной конкретной проблемой и осуществлять все этапы комплексного математического моделирования и уже на его основе делать выводы о свойстве изучаемого объекта.

Особое внимание уделяется развитию умения оценивать правильность и эффективность выбранного решения; а так же умению определять границы применения построенной модели и найденного решения.

Пример № 1. Исследуется гуманитарный объект – «Интернет - зависимость» (на примере компьютерных игр или сайта знакомств). Доказать гипотезу о том, что Интернет-зависимость у мужчин и женщин

различна. Показать, что зависимость между «оптимальным переживанием» и «Интернет - зависимостью» не является прямолинейной.

Пример № 2. Исследуется гуманитарный объект «Мода и модное поведение». Доказать гипотезу о взаимосвязи модного поведения со сферой массового потребления, массовой культурой (на примере одного вида).

6. Дополнительное математическое образование студентов социогуманитарных профилей

Особую роль в процессе обучения основам математического моделирования служат дополнительные математические занятия в виде мероприятий «Неделя Математики в Университете», факультативного курса «Практикум по решению прикладных математических задач» и открытого дистанционного курса «Основы математического моделирования».

Заключение

Предложенный подход подбора задачного материала является вариантом формирования у обучаемых знаниевой составляющей компетентности, связанной со *способностью применять математический аппарат для решения профессиональных задач*. Обучение основам математического моделирования гуманитарных объектов в процессе комплексной математической подготовки позволит студентам использовать математические методы совместно с информационными технологиями при исследовании гуманитарных объектов, что значительно повысит качество их работ.

Литература

1. Введение в математическое моделирование: учебное пособие / Под ред. П.В. Трусова. – М.: Университетская книга: Логос, 2007. – 440 с.
2. Гуц А.К. Математические методы в социологии / А.К. Гуц, Ю.В. Фролова. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007. – 216 с.
3. Попков В.А. Дидактика высшей школы: уч. пособие для студ. высших пед.учеб.заведений / В.А. Попков, А.В. Коржуев, – М.: Академия, 2001. – 136 с.
4. Кислякова М.А. Возможности и структура педагогического потенциала математических дисциплин в подготовке бакалавров гуманитарных направлений / М. А. Кислякова // Вестник КГПУ им. Астафьева. – 2016. – № 1. – С. 57-60.
5. Поличка А.Е. Задачное обеспечение самостоятельной работы в овладении учебными дисциплинами / А. Е. Поличка // Н. И. Лобачевский и математическое образование в России: материалы Международного форума по математическому образованию, 18-22 октября 2017 г. – Казань: Изд-во Казан. ун.-та, 2017. – Т. 1. – С. 206-209.
6. Поличка А. Е., Кислякова М. А. Инициализация наддисциплинарной деятельности студентов при формировании компетенций бакалавров //

Непрерывная предметная подготовка в контексте педагогических инноваций: Сборник научных трудов Двенадцатой заочной научно-методической конференции: В 2 ч. Ч. 1. – Саратов: Изд-во СРОО «Центр «Просвещение»», 2016. – С. 219-224.

7. Поличка А.Е., Кислякова М.А. Реализация педагогического потенциала математических дисциплин в подготовке бакалавров гуманитарных направлений // Педагогическое образование и наука. – 2016. – №2. – С. 114-118.

8. Поличка А.Е. Принципы отбора содержания обучения бакалавров для реализации педагогического потенциала математических дисциплин / А.Е. Поличка, М.А. Кислякова // Сибирский педагогический журнал. – 2017. – № 3. – С. 71-75.

9. Табачук Н.П. Информационная компетенция личности как субъекта деятельности // Научно-педагогическое обозрение. Pedagogical Review. №3 (17) – Томск, 2017. – С. 40–44.

10. Шикин Е.В. Математические методы и модели в управлении / Е.В. Шикин, А.Г. Чхартишвили. –М.: Дело, 2000. – 431 с.

11. Ширшова Т.А. Решение прикладных вероятностно-статистических задач методом математического моделирования / Т.А. Ширшова, Т.А. Полякова // Омский научный вестник. – 2012. – № 4 (111). – С. 273-276.

12. Яглом И.М. Математика и реальный мир / И.М. Яглом. – изд. 2-е, стереотип. – М.: Комкнига, 2006. – 64 с.

13. Решу ЕГЭ: образовательный портал для подготовки к экзаменам. Математика профильный уровень [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://ege.sdangia.ru> (Дата доступа 01.05.2018).

Кислякова Мария Андреевна, ст. преподаватель кафедры математики и информационных технологий Тихоокеанского государственного университета, г. Хабаровск, ул. Запарина 25-81, тел. +7 924 2195200

Kislyakova Marina Andrevna, Senior Lecturer, Pacific State University

РЕАЛИЗАЦИЯ КОНЦЕПЦИИ «ГРУППО-ЦЕНТРИРОВАННОГО ЛИДЕРСТВА» В СОВРЕМЕННОМ ОБРАЗОВАНИИ

Аннотация. Авторы в статье раскрывают особенности осуществления образовательного процесса на основе концепции «группо-центрированного лидерства» психолога К.Роджерса. Отказ от формальной передачи обучающемуся знаний и социальных норм, вот отличительная черта «центрированного» на персоне обучающегося образования. Главной задачей педагога не является совершенствование знаний в предметной области, а создание благоприятной доброжелательной обстановки взаимопонимания и взаимодействия с обучающимися и обучающихся между собой. Для осуществления концепции «группо-центрированного лидерства» в образовании следует опираться на особенности обучающегося и педагога, на их потребности, мотивы, цели. Авторами в статье рассматриваются идеи и пути, позволяющие организовать образовательную среду, каким формам и приемам отдать предпочтение в контексте идей «группо-центрированного лидерства».

Ключевые слова: концепция «группо-центрированного лидерства», личностно-центрированный подход, критическое мышление, педагогическое взаимодействие, формы и методы организации образования.

© *Zh. B. Litvinova, V. B. Tsyrenova*

REALIZATION OF THE CONCEPT OF GROUP-CENTERED LEADERSHIP IN MODERN EDUCATION

Abstract. The article discusses the specifics of educational process based on the concept of group-centered leadership by a psychologist K. Rogers. The refusal of a formal transfer of knowledge and social norms to students is the distinguishing feature of student-centered education. The main task of a teacher is not only improving knowledge in a certain discipline, but creating an enabling benevolent environment for mutual understanding and interaction with students and among them. To implement the concept of group-centered leadership in education, we should rely on the features of students and a teacher, on their needs, motives, goals. The article considers the ideas and ways to organize an educational environment, which forms and methods confirm to the ideas of group-centered leadership.

Keywords: the concept of group-centered leadership; personal-centered approach; critical thinking; pedagogical interaction; forms and methods of education organization.

Последняя тенденция в образовании - смещение «центра» образовательного процесса с традиционной передачи теоретических знаний в виде знакомства с фактами и теориями на развитие способностей обучающихся самостоятельно находить необходимую информацию. И причина этому, характерная черта современного общества, быстрое снижение актуальности, адекватности и полезности информации, как сведений об окружающем мире, как сообщения о происходящих в нем процессах.

Успешность будущей профессиональной и настоящей практической деятельности обучающегося зависит от его умения критически мыслить, т.е. умения соотносить поступающую информацию с уже имеющимися у обучающегося знаниями, вырабатывать решения о том, что необходимо предпринять, как поступить.

К термину «критическое мышление» в своих трудах обращались Дж. Барелл, Д. Вуд, Л. С. Выготский, Ж. Пиаже, К. Поппер, Д. Халперн др. Критически мыслить значит быть активным и принимать правильные решения в соответствии с поступающей информацией [1].

Развитие критического мышления у обучающихся связано с созданием педагогических условий и предоставлением перспектив для раскрытия способностей к изобретательности, рефлексии, бытийности, ответственности, автономности обучающихся. В этом заключена основная задача современного педагога. Очевидно, что целью образования становится «фасилитация изменения и учения». Осуществить процесс образования личности обучающегося через «фасилитацию изменения и учения» можно призвав идеи проверенной концепции «личностно-центрированного подхода» американского психолога, одного из создателей и лидеров гуманистической психологии, К.Р. Роджерса.

Фасилитация изменения и учения определяется не чертами педагога – преподавателя предмета, основывается не на его знаниях в предметной области, не на содержании школьной программы, аудиовизуальных средствах образования, интересных лекциях или демонстрациях и опытах, огромном количестве литературы, которые тоже выступают как ценный ресурс [3, с.225].

В контексте идей концепции «группо-центрированного лидерства» учитель существует в роли человека, который верит в то что, коллектив обучающихся будет работать эффективнее, чем каждый из них в отдельности, он верит в право коллектива на актуализацию. «Группо-центрированный» лидер рассматривает коллектив обучающихся как организацию, которая выступает как путь актуализации личности обучающегося и педагога, существующую для удовлетворения

потребностей и раскрытия возможностей каждого как личности. Лидер предоставляет потенциальные возможности и условия для участия каждого и создает пространство для общения и взаимодействия, благоприятную и дружественную обстановку. Характеристиками лидера является доброжелательное и эмпатийное понимание, сопереживание в отношении к окружающим, стремление понимать смыслы и замыслы обучающегося [2].

В роджерсианской концепции есть четкая позиция в направлении обстоятельств, обеспечивающих взаимодействие «центрированное» вокруг личности обучающегося – искренность и подлинность, безусловное позитивное принятие и забота, а также эмпатическое понимание. Такие особенности отношений осуществимы между терапевтом-клиентом, взрослым-ребенком, лидером-ведомым, учителем-обучающимся, начальником-подчиненным [2, с197-198].

Необходимо отметить, что стратегия деятельности педагога-фасилитатора различается с «авторитарной» позицией. Педагог согласно концепции группового лидерства реализует потребность участия, организует пространство для взаимодействия, проектирует благоприятную дружественную обстановку для каждого обучающегося.

Педагог, выступающий в роли «группо-центрированного» лидера, занимается образованием, применяет только человеческие приемы и методы руководства для получения эффективных результатов; организует и стимулирует творчество и сотрудничество обучающихся, создает условия для самовыражения, самоактуализации.

Реализовать рассмотренные выше идеи возможно на основе приемов и методов «центрированных» на персоне обучающегося, т.е. активных и интерактивных методов и приемов образования - личностно-центрированный урок и урок самопознания, разрешение нравственных ситуаций, группы встреч, элементы индивидуальных образовательных траекторий и маршрутов. Методы организации и осуществления образования - словесные (рассказ, лекция), наглядные (иллюстрация, демонстрация), репродуктивные (заучивание, воспроизведение по образцу) нужно исключить за их малую эффективность.

Осуществлять образование следует, учитывая цели и мотивы каждого обучающегося, его субъективный жизненный опыт, интересы и мотивы, а также его персональные особенности и возможности через «мотивирующие», актуализирующие нравственные ситуации, созданные педагогом с учетом особенностей возраста, субъективного опыта обучающегося, его интереса к современной технике, здоровом образе жизни и физической культуре, астрономии и Вселенной, литературе, поэзии и т.д. В качестве методик оценки образовательных потребностей и мотивов,

предпочитаемых видов деятельности можно использовать беседы, анкетирование, интервью, сочинения на тему: «Моя семья», «Мой лучший день», «Мои мечты», «Мое любимое занятие», методики и приемы «Закончи предложение», «Заполни пропуски» и др.

Для стимулирования учащихся вырабатывать собственные взгляды и использовать знания в решении практических задач, предпочтительны следующие формы и приемы - познавательные игры, моделирование проблемных и жизненных ситуаций, учебные дискуссии, критический взгляд на проблемную ситуацию, конструирование и высказывание личного субъективного мнения, приобретение личного опыта, создание возможности успеха в учении. Приоритетными должны стать приемы и стратегии развития критического мышления «Кластеры», «ИНСЕРТ», «Двухчастный дневник», «ИДЕАЛ» и др.

Эффективность внедрения активных и интерактивных методов образования определяется успешностью сотрудничества, межличностного взаимодействия, навыков активного слушания, умения вырабатывать компромиссное решение. Современное образование предполагает субъективную позицию обучающегося как активного субъекта собственной актуализации, предъявляет высокие требования к персоне обучающегося и личности педагога.

Литература

1. Заир-Бек, С.И. Развитие критического мышления на уроке: пособие для учителей общеобразоват. учреждений [Текст] / С. И. Заир-Бек, И. В. Муштавинская. – 2-е изд., дораб. – М. : Просвещение, 2011. – 223 с.
2. Роджерс, К.Р., Фрейберг, Дж. Р. «Клиентоцентрированная психотерапия» [Текст] / К.Р.Роджерс, Дж. Р. Фрейберг. М.: Издательство «Рефл-бук», 1993. – 320 с.
3. Роджерс, К. Свобода учиться [Текст] / К. Роджерс, Д. Фрейберг. М.: Смысл, 2002. – 527 с.

Литвинова Жанна Борисовна, учитель информатики МБОУ г. Иркутска СОШ №9, 664047, г. Иркутск, ул. Красных Мадьяр, д. 119, кв. 3, тел.: +7 904 153-48-37, e-mail: litv-zhanna@yandex.ru

Цыренова Валентина Бабасановна, кандидат физико-математических наук, доктор педагогических наук, доцент, профессор кафедры алгебры, геометрии и методики преподавания математики Бурятского государственного университета, 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5, e-mail: v.ts@mail.ru

Litvinova Zhanna Borisovna, Teacher of Informatics, Municipal Budget Educational Institution Middle School of General Education №9

Tsyrenova Valentina Babasanovna, Candidate of Physics and Mathematics, Doctor of Pedagogics, Associate Professor, Buryat State University

О МОДЕЛИ ФОРМИРОВАНИЯ ОБЩИХ КОМПЕТЕНЦИЙ СПЕЦИАЛИСТА СРЕДНЕГО ЗВЕНА

Аннотация. В статье представлено описание разработанной модели формирования общих компетенций специалиста среднего звена в процессе обучения математическим и естественнонаучным дисциплинам. Модель состоит из целевого, содержательного, организационно-деятельностного и оценочно-результативного блоков. Целевой блок включает в себя соответствующие социальному заказу общества цели и задачи данного процесса, основанные на соблюдении таких принципов, как социально-профессиональная ориентация студентов, развитие личности с учетом его индивидуальных особенностей, самостоятельная деятельность студентов и междисциплинарная связь. В содержательный блок включены мотивация к получению знаний и их использованию в профессиональной деятельности, усвоение системы математических и естественнонаучных знаний, формирование готовности и способности реализовывать полученные знания, а также развитие личностных качеств. Организационно-деятельностный блок содержит наиболее подходящие формы, методы и средства обучения, позволяющие эффективно и комплексно воздействовать на студентов с целью формирования общих компетенций. Оценочно-результативный блок показывает зависимость результата формирования общих компетенций у студентов колледжа от конкретных результатов, в основе которых лежат разработанные критерии и показатели сформированности общих компетенций, а также их уровни.

Ключевые слова: формирование общих компетенций, модель, математические и естественнонаучные дисциплины, развитие личности, педагогические функции, методы научного познания, критерии и показатели.

© N. B. Lumbunova

ABOUT THE MODEL OF DEVELOPMENT MIDDLE-LEVEL SPECIALISTS' GENERAL COMPETENCES

Abstract. The article describes the model for development of general competencies of middle-level specialists in the process of teaching mathematical and natural-science disciplines. The model consists of objective, content, organizational and activity, assessment units. The objective unit includes the goals and objectives, corresponding to the social order and based on such principles as social and professional orientation of students, personal development with account of individual features, independent activity

of students and interdisciplinary communication. The content unit involves motivation to get knowledge and use them in professional activities, acquisition of the system of mathematical and natural-science knowledge, readiness to realize the acquired knowledge and necessary skills, as well as development of personal qualities. The organizational and activity unit contains the most appropriate forms, methods and means of teaching, aimed at effective and complex development of students' general competencies. The assessment unit shows the dependence of general competencies development in college students on learning outcomes, which are based on the developed criteria and indicators of general competencies development, as well as their levels.

Keywords: development of general competences; model; mathematical and natural-science disciplines; personality development; pedagogical functions; methods of scientific cognition; criteria and indicators.

Согласно федеральным государственным образовательным стандартам среднего профессионального образования основными образовательными результатами выпускников являются общие и профессиональные компетенции. В группу общих компетенций включены социально-коммуникативные, экологические, информационные, предпринимательские и познавательные компетенции, а также компетенции здоровьесбережения, гражданского патриотизма и самосовершенствования.

В последнее время для подавляющей части студентов наблюдается снижение статуса математических и естественнонаучных дисциплин. Они оценивают их как «бесполезные, рутинные и лишние, не имеющие ничего общего с жизнью». В этих условиях перед преподавателем стоит задача сформировать у студентов не только необходимые знания, умения и навыки, которые послужат основой для успешного освоения специальных дисциплин, но и начать формирование общих компетенций.

Для успешной организации процесса формирования общих компетенций нами разработана модель, которая представляет собой педагогическую систему, направленную на формирование общих компетенций и предполагающую научное обоснование комплекса педагогических условий эффективности ее формирования, а также опирается на потребность государства в приспособленных к быстро меняющимся условиям на рынке труда специалистов среднего звена. Разработанная модель рассматривается нами как совокупность логических и функционально связанных между собой целевого, содержательного, организационно-деятельностного и оценочно-результативного блоков, составляющих целостную систему.

Целевой блок модели базируется на основной задаче реализуемого педагогического процесса в рамках нашего исследования – формировании общих компетенций специалиста среднего звена в процессе обучения

математическим и естественнонаучным дисциплинам. Требования к общим компетенциям разработаны на основе ФГОС СПО и потребностей работодателей в современных условиях: научить планировать и реализовывать личностное развитие, работать в коллективе и команде, осуществлять устную и письменную коммуникацию, содействовать сохранению окружающей среды, осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, использовать ИКТ технологии, планировать предпринимательскую деятельность, использовать возможности физической культуры для сохранения и укрепления здоровья, проявлять гражданско-патриотическую позицию.

Нами сформулированы принципы формирования общих компетенций специалиста среднего звена в процессе обучения математическим и естественнонаучным дисциплинам: социально-профессиональная ориентация, развитие личности студента с учетом его индивидуальных особенностей, самостоятельная деятельность студентов, междисциплинарная связь.

Организация формирования общих компетенций специалиста среднего звена в процессе обучения математическим и естественнонаучным дисциплинам позволяет осуществлять эффективное комплексное воздействие на личность через выполнение ряда педагогических функций:

- образовательную, формирующую у студентов научную картину мира, знания о фундаментальных закономерностях развития окружающего мира;
- мотивирующую, направленную на осознание студентами значимости выбранной профессии;
- развивающую, направленную на формирование человека как личности и его самореализацию;
- диагностическую, способствующую выявлению у студентов склонностей к определенным видам деятельности и позволяющую им осознать и оценить свои профессионально значимые качества;
- организационную, направленную на реализацию педагогических условий для формирования общих компетенций.

В соответствии с определенной целью, процесс формирования общих компетенций у студентов колледжа рассматривается нами как вид учебной деятельности, способствующий формированию и развитию личностных качеств и соответственно характеризующийся мотивационным, когнитивным и деятельностным компонентами, образующими в данной модели содержательный блок. Мотивационный компонент призван формировать у студентов интерес к себе как к будущему специалисту, интерес к будущей профессиональной деятельности, понимание сущности и

значимости этой деятельности, самораскрытие, самовыражение и самосознание, обусловленные потребностями личности.

Когнитивный компонент направлен на формирование у студентов социальных и естественнонаучных знаний и умений, способности и готовности к постоянному расширению кругозора через освоение содержания учебного материала математических и естественнонаучных дисциплин. Овладение такими методами познания научного мира, как наблюдение, сравнение, анализ, синтез, обобщение, измерение, моделирование, исследование, опыт, эксперимент и др., присущими математическим и естественнонаучным дисциплинам, позволяет студенту пользоваться разными видами познавательной деятельности. Умение осмысленно делать выбор, применять полученные знания на практике в нестандартной ситуации формируется через формирование навыков исследовательской и проектной деятельности, математического и алгоритмического стиля мышления.

Деятельностный компонент предполагает готовность и способность реализовывать полученные знания и умения, способность взаимодействовать с другими членами общества, гибко реагировать на происходящие изменения в социально-трудовой сфере, планировать путь своего саморазвития.

Организационно-деятельностный блок характеризуется совокупностью форм, методов и средств формирования общих компетенций специалиста среднего звена, реализуемых через организацию внеаудиторной самостоятельной работы студентов, систему разработанных практических и лабораторных занятий, исследовательскую и проектную деятельность в рамках участия в научном студенческом обществе, участия в различных конкурсах, играх, викторинах и т.д.

Оценочно-результативный блок предполагает наличие конкретных результатов деятельности по формированию общих компетенций специалиста среднего звена в процессе обучения математическим и естественнонаучным дисциплинам. Нами выявлена и разработана система критериев и показателей, позволяющие выявить уровни сформированности общих компетенций у студентов колледжа. Для оценивания уровня сформированности общих компетенций используются такие методы, как опрос, анкетирование, оценка преподавателей, самооценка, тестирование, выполнение индивидуальной проектной деятельности и т.д.

Таким образом, для повышения эффективности педагогической работы по формированию общих компетенций специалиста среднего звена в процессе обучения математическим и естественнонаучным дисциплинам разработана модель, базирующаяся на взаимосвязанных и

интегрированных между собой элементах: целевом блоке (цель, задачи, принципы), содержательном блоке (функции, виды деятельности студентов), организационно-деятельностном блоке (формы, методы, средства) и оценочно-результативном блоке (критерии, показатели и уровни).

Литература

1. Байденко В.И., Оскарссон Б. Базовые навыки (ключевые компетенции) как интегрирующий фактор образовательного процесса / Профессиональное образование и формирование личности специалистов: Научно-методический сборник ИПР СПО. – М.: Наука, 2002. – С. 22-46.

2. Бакшаева Н.А. Вербицкий А.А. Психология мотивации студентов: Учебное пособие. – М.: Логос, 2006. – 184 с.

3. Хуторской А.В. Технология проектирования ключевых и предметных компетенций // Компетенции в образовании: Опыт проектирования: Сб. науч. тр. / Под ред. А.В. Хуторского. М.: Научно-внедренческое предприятие "ИНЭК", 2007. – 327 с

Лумбунова Наталья Баировна, преподаватель, ГБПОУ «Бурятский аграрный колледж им. М.Н. Ербанова», 670031, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Трубочеева, 140, тел.: +7 (3012) 433382, e-mail: gnat6856mk@gmail.com

Lumbunova Natalya Bairovna, Teacher, Buryat Agricultural College named after M.N. Erbanov

ОБ АКТИВИЗАЦИИ УЧЕБНО-ПОЗНАВАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТОВ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Аннотация. В статье исследуются вопросы активизации учебно-познавательной деятельности студентов при обучении математике. Дано определение познавательного интереса, обоснована его важность при обучении студентов. Перечислены педагогические условия, использование которых формирует, развивает и укрепляет познавательный интерес студентов при изучении математики. Приведены приемы обучения, применяемые нами на занятиях по математике. Эти приёмы обучения направлены на подготовку будущих учителей математики, которые могут применять опыт, полученный на занятиях в своей будущей профессии. Применение этих приемов способствует повышению комфорта студентов в обучении, развитию и формированию познавательной активности студентов. Усвоение знаний студентов будет сознательным и прочным, если процесс обучения математике будет организован на каждом занятии так, чтобы учебный материал становился предметом активных действий студента и был направлен на формирование профессиональных компетентностей.

Ключевые слова: познавательный интерес, учебно-познавательная деятельность, активизация учебно-познавательной деятельности студентов при обучении математике.

© *E.P. Mironova*

ABOUT THE ACTIVATION OF EDUCATIONAL-COGNITIVE ACTIVITY OF STUDENTS IN TEACHING MATHEMATICS

Abstract. The article studies the issues of activation of educational and cognitive activity of students in teaching mathematics. The definition of cognitive interest is given, its importance in the training of students is substantiated. The pedagogical conditions are listed, the use of which forms, develops and strengthens the cognitive interest of students in the study of mathematics. The methods of training used by us in the classroom in mathematics. These teaching methods are aimed at training future teachers of mathematics, who can apply the experience gained in their future profession. The use of these techniques helps to improve the comfort of students in learning, development and formation of cognitive activity of students. Students' knowledge will be conscious and strong if the process of learning mathematics is organized in each lesson so that the training material becomes the subject of active student action and was aimed at the formation of professional competencies

Keywords: cognitive interest, educational and cognitive activity, activation of educational and cognitive activity of students at teaching mathematics.

В современных условиях востребованным становится студент, обладающий следующими качествами: активностью, инициативностью, творческим отношением к делу, умением самостоятельно находить нужные знания из большого объема информации, стремлением к саморазвитию. Развитие этих качеств определяет направление совершенствования учебного процесса. Но в действительности большинство студентов не имеют привычки и желания системно и самостоятельно учиться, выполнять задания по изучаемым предметам. Одним из решений этой проблемы является активизация учебно-познавательной деятельности в образовательном процессе, поскольку познавательный интерес мотивирует студентов к учению.

Для того чтобы активизировать любую деятельность, в том числе познавательную, необходимо наличие стимулов. Поэтому одним из важнейших принципов активизации можно назвать мотивацию учебно-познавательной деятельности. Активная деятельность студентов характеризуется желанием самого учащегося исследовать проблему, научиться чему-то новому, доказать, оспорить. Поэтому очень важно у студентов вызвать познавательный интерес, положительное отношение к деятельности, поскольку именно из-за эмоциональной окраски психических процессов внимания, осмысления, запоминания эффективно достигаются педагогические цели.

Познавательный интерес – активное отношение к предметам и явлениям окружающего мира, характеризующееся позитивными эмоциями, стремлением к новым и глубоким знаниям. Следуя своему интересу, студент ставит перед собой задачу и сам ищет пути решения.

Перечислим те педагогические условия, использование которых, по нашему мнению, формирует, развивает и укрепляет познавательный интерес студентов при изучении математики: 1) использование прикладной направленности курса математики; историзма; объектов, процессов, явлений, отношений и ситуаций реальной действительности и соответствующих им математически формализуемых предметных моделей; содержательной и методологической связи курса математики с практикой, в том числе производством, техникой и т.д., а также межпредметных связей математики с другими учебными дисциплинами; 2) реализация личностно-ориентированного, личностно-деятельностного, коммуникативного подходов к организации учебно-воспитательного процесса; 3) создание продуктивной учебно-воспитательной среды в вузе, предполагающей необходимую гуманизацию и гуманитаризацию образовательного процесса; 4) формирование активной позиции студента в выборе и осуществлении самообразовательной деятельности. [1].

Для активизации учебно-познавательной деятельности нами применяются следующие приемы:

- индивидуальный подход (учебный материал подбирается и излагается с учетом уровня математической подготовки студентов, выбор студентами уровня сложности решаемых задач);

- использование групповых, фронтальных и индивидуальных форм обучения на занятиях с учетом взаимоотношений в данной студенческой группе;

- педагогическое сотрудничество (создание ситуаций успеха; оказание своевременной помощи; стимулирование постановки вопросов самими студентами; поддержка инициативы, проявляемой ими, объективное и обучающее оценивание знаний и др.).

Такие приемы способствуют повышению комфорта студентов в обучении, развитию и формированию познавательной активности студентов.

На практических и семинарских занятиях по математике используем проблемные методы обучения, при этом студенты самостоятельно исследуют новую для себя задачу, применяя понятия и факты, с которыми познакомились на лекциях.

Активизация учебно-познавательной деятельности студентов является одним из важнейших направлений совершенствования учебно-воспитательного процесса. Использование перечисленных педагогических условий для формирования и развития познавательного интереса позволит активизировать понимание и осмысление изучаемого материала, память, внимание студента таким образом, что усвоение знаний будет сознательным и прочным. На каждом занятии учебный материал становится предметом активных действий студента и будет направлен на формирование профессиональных компетентностей.

Литература

1. Миронова Е.П. Развитие гуманитарной культуры студентов в процессе изучения математики: диссертация ... кандидата педагогических наук: 13.00.01 / Миронова Екатерина Пурбуевна; [Место защиты: Бурятский государственный университет]. – Улан-Удэ, 2014. – 184 с.

Миронова Екатерина Пурбуевна, кандидат педагогических наук, старший преподаватель кафедры алгебры, геометрии и методики преподавания математики Бурятского государственного университета, 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5, e-mail: mirkaterina84@mail.ru

Mironova Ekaterina Purbuevna, Canditate of Physics and Mathematics, Senior Lecturer, Buryat State University

РЕШЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ОКРУЖНОСТИ

Аннотация. В данной статье рассматривается один из ведущих методов решения геометрических задач – метод вспомогательной окружности. Этот метод позволяет упростить решение особенно сложных геометрических задач. Уже внешнее знакомство с профильными задачами позволяет понять, что в большинстве задач в условии говорится об окружности. Нередко отсутствовавшая в условии окружность появляется в решении. В данной публикации дается общая характеристика метода окружности и необходимые теоретические сведения для успешного его применения. Особое внимание уделено упражнениям на готовых чертежах. Задачи такого типа рассчитаны в основном на повторение теоретического материала с минимальной затратой времени. Суть метода решения геометрических задач с помощью вспомогательной окружности прослеживается в решениях конкретных задач более сложного уровня.

Ключевые слова: геометрия, окружность, метод вспомогательной окружности, чертежи, задачи на готовых чертежах, задачи олимпиадного уровня, ОГЭ, ЕГЭ.

© Т. И. Nekipelova, E. A. Purevdorj

SOLUTION OF GEOMETRIC PROBLEMS BY THE AUXILIARY CIRCLE METHOD

Abstract. The article considers one of the basic methods for solving geometric problems – auxiliary circle method, which simplifies the solution of particularly complex geometric problems. Even an external acquaintance with the profile problems shows that the conditions in most of them involve a circle. Often the circle that has no place in the condition appears in the solution. The article gives a general description of the circle method and necessary theoretical information for its successful application. Particular attention is paid to the exercises on finished drawings. The tasks of this type are based mainly on repetition of the theoretical material in a minimum of time. The auxiliary circle method is effective for solving geometric problems of a more complex level.

Keywords: geometry; circle; the auxiliary circle method; drawings; exercises on finished drawings, tasks of the Olympiad level, Basic State Examination, Unified State Examination.

Введение

Помимо организации особых геометрических навыков, сущностью изучения геометрии является общее развитие личности, ее способность мыслить логически и четко аргументировать истинность высказываний в различных областях деятельности. Много заблуждений существует по поводу того, что математика, в том числе и геометрия нужны только математикам, инженерам, экономистам.

Владение геометрией - это умение находить решение любой геометрической задачи. Непременно нужно выработать подход к решению задач: прежде, чем приступить, следует воочию представить, вообразить, изобразить фигуры, о которых идет речь, "разобраться с геометрической ситуацией", заданной условием этой задачи. Лишь после такого анализа следует приступать к доказательному и вычислительному этапам решения задачи.

На первых стадиях знакомства с геометрией и при ее изучении, основную и возможно главную трудность для школьников представляет выполнение чертежа. Помимо этого, на его построение затрачивается большое количество времени на уроке, что несомненно отражается на усвоении программы. В геометрии на плоскости грамотный рисунок к задаче обычно четко отвечает ее условию: равные углы и стороны фигуры равны и на рисунке к задаче. Однако в стереометрии, при изображении пространственных фигур на плоскости имеет место совсем другая ситуация.

Для успешного развития геометрического воображения на уроках геометрии каждая задача, каждое утверждение, ответы и решения к задачам должны иллюстрироваться на чертежах, которые всегда должны быть перед глазами в процессе обучения. Это несомненно один из главных факторов того, что, видя перед собой чертеж, учащиеся быстрее и легче решат задачу. По этому поводу упражнения, выполненные на готовых чертежах, способствуют усвоению и закреплению новых понятий и теорем, дают возможность в течение минимума времени усвоить и повторить значительно больший объем материала, тем самым наращивать темп работы на уроках. Помимо этого, упражнения способствуют активизации мыслительной деятельности учащихся, обучают умению грамотно рассуждать, находить в них общее и делать различия, сопоставлять и противопоставлять, делать правильные выводы.

Для успешного решения задач с окружностью необходимо знать, как измеряются: центральный угол; угол, вписанный в окружность; угол, вершина которого расположена внутри круга (вне круга) данной окружности; угол между касательной и хордой.

Следует научиться использовать теоремы: о произведении отрезков хорд; о касательной и секущей; о равенстве длин отрезков касательных, проведенных к данной окружности из данной точки. Полезно помнить признак, согласно которому около выпуклого четырехугольника можно описать окружность.

Метод вспомогательной окружности

Метод решения геометрических задач с привлечением "неожиданно появляющейся окружности" называют "методом вспомогательной окружности". Для того чтобы умело пользоваться данным методом, необходимо усвоить основные теоретические моменты.

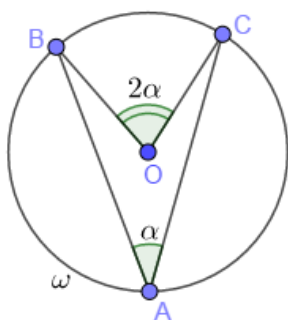


Рисунок 1

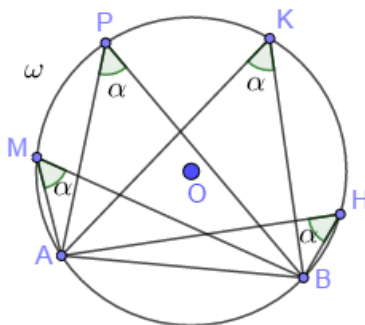


Рисунок 2

Вписанный в данную окружность ω угол BAC (рис. 1) измеряется половиной дуги BC , на которую он опирается. При этом, если $\angle AMB = \alpha$ (рис. 2), то говорят, что отрезок AB "виден" из точки M под углом α . На рис. 2 имеем: $\angle AMB = \angle APB = \angle AKB = \angle AHB = \alpha$, как вписанные в окружность ω и опирающиеся на одну и ту же дугу AB . Это значит, что из точек M, P, K и H окружности ω ее хорда AB "видна" под одним и тем же углом α (под равными углами α).

Так как вписанный угол, опирающийся на диаметр, прямой, то окружность с диаметром AB представляет собой множество всех точек плоскости, из которых, (кроме точек A и B), отрезок AB "виден" под прямым углом (рис. 3).

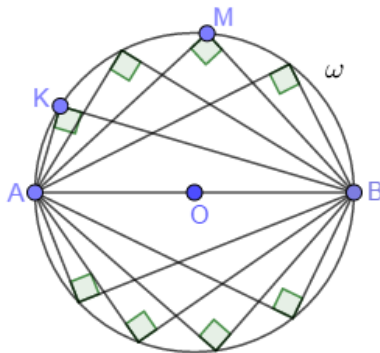


Рисунок 3

Если точки A, B, M и K расположены так, что M и K лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB , при этом $\angle AMB = \angle AKB = \alpha$, то точки A, B, M и K лежат на одной окружности. Если $\angle AMB = \angle AKB = 90^\circ$ то центр окружности, проходящей через точки A, B, M и K является середина O отрезка AB (рис. 3).

Все эти теоремы находят свое применение при решении многих задач.

В качестве примера рассмотрим задачу на готовом чертеже.

Задача 1.

$$OK = 6$$

$$\angle MON = 120^\circ$$

$$MK, NK - ?$$

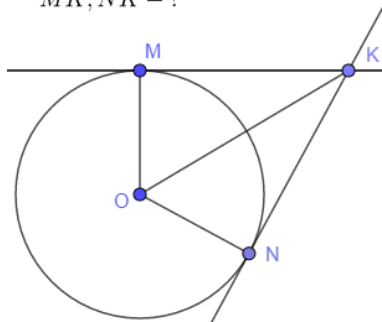


Рисунок 4

Решение:

1) $\angle OMK = \angle ONK = 90^\circ$, MK, NK - касательные; $MK = NK$ по свойству касательных, проведенных из одной точки;

2) по теореме синусов

$$\frac{6}{\sin(90^\circ)} = \frac{MK}{\sin(60^\circ)}, \frac{6}{1} = \frac{MK}{\sqrt{3}},$$

$$\Rightarrow MK = KN = 3\sqrt{3}.$$

Ответ: $MK = KN = 3\sqrt{3}$

Задачи на готовых чертежах служат материалом для повторения, в данном случае по теме «Метод вспомогательной окружности». Такие задачи являются облегченной версией повторения теоретического материала и подготовки к ОГЭ и ЕГЭ базового уровня.

Помимо задач на готовых чертежах, полезно рассматривать решения задач нестандартного олимпиадного типа для более глубокого изучения материала.

Для некоторых задач бывает удобно "привлечь на помощь" треугольник с вершинами в центрах соответственно трех или четырех попарно касающихся данных окружностей. В этом случае стороны треугольника равны суммам радиусов данных окружностей. Примером служит решение следующей задачи.

Задача 2. Три данные окружности радиуса 6 попарно касаются друг друга. Найдите отношение радиусов двух окружностей, каждая из которых касается трех данных. В ответ запишите отношение большего к меньшему.

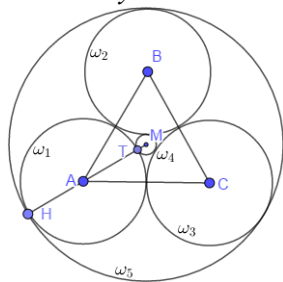


Рисунок 5.

Решение: Пусть $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ - три данные равные попарно касающиеся окружности радиуса 6 с центрами A, B и C (рис. 5); точка M - центр касающейся их окружности ω_4 .

Тогда треугольник ABC - равносторонний;

$$AB=12; AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{AB\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}, \text{ где } M -$$

центроид треугольника ABC .

С одной стороны, $AM = AB = CM = 4\sqrt{3}$ (в треугольнике ABC), и, с другой стороны, центр K окружности ω_4 совпадает с центроидом M треугольника ABC .

Обозначим через T и H точки пересечения прямой MA с окружностью ω_1 . Тогда отрезки MT и MH равны радиусам концентрических окружностей ω_4 и ω_5 с центром M , одна из которых касается окружностей $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ внутренним, а другая - внешним образом.

Так как $MT = AM - AT$, $MH = AM + AH$, то $MT = 4\sqrt{3} - 6$, $MH = 4\sqrt{3} + 6$.

Таким образом, радиусы двух концентрических окружностей с центром M , касающихся данных трех окружностей, равны $4\sqrt{3} - 6$ и $4\sqrt{3} + 6$, а отношение радиуса большей окружности к радиусу меньшей равно:

$$\frac{4\sqrt{3} + 6}{4\sqrt{3} - 6} = \frac{(4\sqrt{3} + 6)^2}{(4\sqrt{3} - 6)(4\sqrt{3} + 6)} = \frac{84 + 48\sqrt{3}}{12} = 7 + 4\sqrt{3}.$$

Ответ: $7 + 4\sqrt{3}$

Полезно помнить, что вписанный угол, опирающийся на дугу, заключенную между хордой и касательной, проведенной к окружности в одной из концов этой хорды, равен углу между данной касательной и хордой. Для примера рассмотрим решение следующей задачи.

Задача 3. Докажите, что расстояние от точки окружности до хорды есть средняя пропорциональная величина между расстояниями от этой точки до касательных к окружности, проведенных в концах хорды.

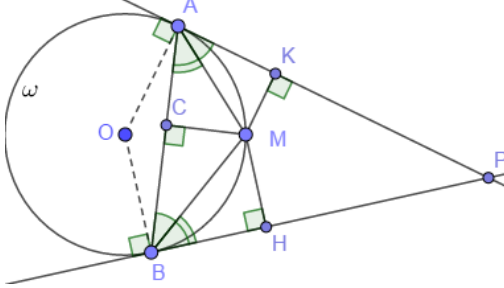


Рисунок 6.

Доказательство: Пусть AB -хорда данной окружности ω , M -любая точка этой окружности; касательные к окружности, проведенные в точках A и B , пересекаются в точке P (рис. 6). Расстояния от точки M до хорды и касательных равны длинам перпендикуляров

MC , MK , MH соответственно. Докажем, что $MC^2 = MK \cdot MH$.

Угол между хордой AM и касательной к окружности ω в точке A так же, как и вписанный в эту окружность угол ABM , измеряется половиной дуги AM , поэтому $\angle MAK = \angle ABM$. Тогда прямоугольные треугольники AKM и BCM подобны, откуда следует: $\frac{AK}{BC} = \frac{AM}{BM} = \frac{KM}{CM}$. (1)

Аналогично, угол между хордой BM и касательной к окружности ω в точке B так же, как и вписанный в эту окружность угол BAM , измеряется половиной дуги BM , поэтому $\angle MBH = \angle BAM$. Тогда прямоугольные треугольники ACM и BHM подобны, откуда следует: $\frac{AC}{BH} = \frac{AM}{BM} = \frac{CM}{HM}$. (2)

Из (1) и (2) получаем: $\frac{KM}{CM} = \frac{CM}{HM}$, откуда $CM^2 = KM \cdot HM$. ■

Полезно помнить условия, согласно которым около выпуклого четырехугольника можно описать окружность и в выпуклый четырехугольник можно вписать окружность. Эти условия находят свое применение при решении многих задач на доказательство и на вычисление. Кроме того, важно помнить формулу вычисления площади треугольника через полупериметр и радиус вписанной окружности, и формулу площади правильного многоугольника.

Еще большая эффективность метода вспомогательной окружности становится заметной при решении, на первый взгляд, трудно разрешимой геометрической ситуации. Но стоит заметить четыре "волшебные" точки-вершины вписанного четырехугольника - тотчас появляется вспомогательная окружность, о которой в условии задачи не упоминалось. Иногда обнаруживается существование нескольких таких четырехугольников, значит нескольких вспомогательных окружностей. С

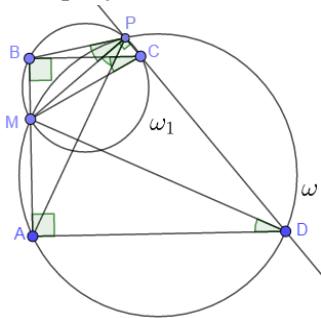


Рисунок 7.

помощью этих вспомогательных окружностей удастся обнаружить равные вписанные углы, которые до этого казались не равными, после чего становятся отчетливо видны дальнейшие шаги решения данной задачи. Подтверждением тому может служить решение следующей задачи.

Задача 4. В трапеции $ABCD$ (AD параллельна BC) $\angle A = 90^\circ$. На стороне AB выбрана такая точка M , что

$AM : MB = AD : BC$. Точка P - основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую CD (рис. 7). Докажите, что PM - биссектриса угла APB .

Доказательство. Из условия $AM : MB = AD : BC$ следует подобие треугольников MBC и MAD , откуда $\angle ADM = \angle BCM$. Замечаем, что $\angle MAD = \angle MPD = 90^\circ$, значит точки A, M, P и D лежат на одной окружности ω с диаметром MD (появилась одна вспомогательная окружность!). Тогда $\angle MPA = \angle ADM$ (как вписанные в эту окружность и опирающиеся на дугу AM). Кроме того, $\angle MBC = \angle MPC = 90^\circ$, поэтому точки B, M, P и C лежат на одной окружности ω_1 диаметра MC (появилась вторая вспомогательная окружность!). Значит, $\angle BPM = \angle BCM$ (как вписанные в эту окружность и опирающиеся на дугу BM). Тогда из равенств $\angle ADM = \angle BCM$, $\angle BPM = \angle BCM$, $\angle MPA = \angle ADM$ следует: $\angle MPA = \angle BPM$, то есть PM - биссектриса угла APB . ■

Заключение

Метод вспомогательной окружности является одним из сильных методов, но и одновременно одним из редко применяемых в школе.

Отличительными особенностями этого метода являются простота его логического и вычислительного аппарата, наглядность, естественность включения в процесс решения задачи. Применение метода вспомогательной окружности не сопровождается появлением так называемых побочных решений, не требует исследования ответа, проверки, согласования ответа с условиями задачи. Этот метод успешно конкурирует с другими методами решения геометрических задач по части рациональности и эстетики, давая неожиданно простые и красивые решения.

Литература

1. Балаян, Э. Н. Геометрия: задачи на готовых чертежах для подготовки к ОГЭ и ЕГЭ: 7-9 классы / Э. Н. Балаян. – Изд. 3-е-Ростов н/Д: Феникс, 2016. – 223 с.
2. Балаян, Э. Н. Репетитор по математике для поступающих в вузы / Э. Н. Балаян. – Ростов н/Д: Феникс, 2015. – 752 с.
3. Мерзляк, А. Г. Математика: полный справочник для подготовки к ЕГЭ / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир.-М.:Издательство АСТ, 2017. – 559 с.
4. Потоскуев, Е. В. Решения разноуровневых задач по геометрии. Подготовка к ЕГЭ. / Е. В. Потоскуев. – М.: Илекса, 2016. – 271 с.
5. Потоскуев, Е. В., Звавич, Л.И. Геометрия. 11 кл.: Задачник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики. / Е. В. Потоскуев, Л.И. Звавич. – М.: Дрофа, 2010. -112 с.

Некипелова Татьяна Ивановна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры, геометрии и методики преподавания математики, Бурятский государственный университет, 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5, e-mail: inltavo@mail.ru

Пурэвдорж Евгения Анатольевна, студент института математики и информатики, Бурятский государственный университет, Россия, 670000, Улан-Удэ, ул. Смолина, 24 а, e-mail: evanikitina5443@gmail.com

Nekipelova Tatyana Ivanovna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Buryat State University

Purevdorzh Evgeniya Anatolyevna, student of the Institute of mathematics and informatics, Buryat State University

ВОПРОСЫ РЕАЛИЗАЦИИ КОНЦЕПЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В РЕСПУБЛИКЕ САХА (ЯКУТИЯ)

Аннотация. Статья посвящена вопросам реализации в Республике Саха (Якутия). Концепции математического образования, утвержденной распоряжением Правительства Российской Федерации в 2013 году, в той части, что касается профессионального образования. Обсуждаются проблемные моменты при подготовке математиков на уровне бакалавриата. Эти проблемы не могут быть разрешены, если не произойдут системные изменения на уровне общего образования при обучении математике. Современные учителя математики не раскрывают учащимся суть математики, её место и роль в науке, культуре и общественной жизни. Одной из важных целей образовательных организаций высшего образования должна быть подготовка учителей, которые способны качественно преподавать математику и при этом готовы вести инновационную, исследовательскую и творческую деятельность, направленных не только на развитие самого учителя, но и на его учеников. В статье представлен опыт реализации магистерской программы по подготовке учителей математики.

Ключевые слова: математическое образование, подготовка учителей математики, компетентностный подход.

© *E. S. Nikitina, T. K. Neustroeva*

ISSUES OF IMPLEMENTATION OF THE CONCEPT OF MATHEMATICAL EDUCATION IN THE REPUBLIC OF SAHA (YAKUTIA)

Abstract. The article is devoted to the implementation of the Concept of Mathematical Education in the Republic of Sakha (Yakutia), approved by the decree of the Government of the Russian Federation in 2013, as far as professional education is concerned. Problems are discussed during the training of mathematicians at the bachelor's level. These problems cannot be solved unless systemic changes occur at the level of general education in the teaching of mathematics. Modern mathematics teachers do not disclose to students the essence of mathematics, its place and role in science, culture and social life. One of the important goals of educational institutions of higher education should be the training of teachers who are able to teach mathematics in a qualitative way and at the same time are ready to conduct innovative, research and creative activities aimed not only at the development of the teacher himself, but also at his students. The article presents the experience of implementing a master's program in the preparation of math teachers.

Keywords: mathematical education; training of mathematics teachers; competence approach.

Введение

Концепция развития математического образования Российской Федерации была утверждена распоряжением Правительства Российской Федерации 24 декабря 2013 года №2506-р. Главными являются, на наш взгляд, следующие идеи Концепции:

- математика – это важный элемент национальной идеи и конкурентное преимущество России;
- необходимым условием для социально-экономического развития страны является высокий уровень математической науки, математического образования и математической грамотности населения.

В Республике Саха (Якутия) в 2016 г. был принят Комплексный план мероприятий по развитию математического образования на 2016-2020 годы, который был согласован Министерством образования республики и Северо-Восточным федеральным университетом имени М.К. Аммосова (СВФУ) – единственным высшим учебным заведением в республике, осуществляющим подготовку математических кадров. О реализации этого плана и существующих проблемах его реализации сообщается далее.

Кафедра алгебры и геометрии Института математики и информатики СВФУ является разработчиком и реализует две основные профессиональные образовательные программы:

- программу бакалавриата по направлению подготовки 01.03.01 Математика;
- программу магистратуры «Учитель-исследователь в области математического образования» по направлению подготовки 44.04.01 Педагогическое образование.

Те или иные сложности при реализации есть по обеим программам.

1. Проблемы фундаментального математического образования

В настоящее время кафедра испытывает большие трудности, как с набором контингента на бакалавриат, так и его сохранением. Если 7-8 лет назад можно было сделать полный набор с конкурсом в объеме 30-35 человек, то сейчас сложно набрать и 20 человек. С 2013 г. объем контрольных цифр сократился на 40%. Число подаваемых заявлений с 2013-2016 росло, но в 2017 упало на 63% в сравнении с 2016 годом. За последние 2 года конкурс на направление «Математика» является одним из самых низких не только по институту, но и университету. Причин снижения

заинтересованности в бакалаврской программе «Математика» мы видим в следующем:

- во-первых, учащиеся стали «бояться» математики, особенно после внедрения ЕГЭ;

- во-вторых, сами учителя математики стали «бояться» результатов ЕГЭ; порой обстановка настолько нагнетается, что наблюдается ситуация, когда учитель рекомендует своим ученикам сдавать ЕГЭ по математике на базовом уровне; уже можно констатировать, что количество учащихся, сдающих профильную математику становится меньше из года в год.

Наряду с проблемой набора полноценной группы на программу, стоит задача сохранения контингента. За последние пять лет доля отчисленных студентов составила 37%, а доля обучающихся перешедших на другие программы – 12%. Заметим, что доля отчисленных за академическую неуспеваемость составляет лишь 2% из числа тех, кто был отчислен по тем или иным причинам. Основной отсев происходит на первом курсе. Почему студенты «уходят» с программы? Объяснений этой ситуации мы видим несколько. Основной фактор отсева студентов состоит в недостаточно высоком уровне школьной подготовки по математике. Средний балл ЕГЭ по математике у студентов, поступивших на бакалавриат «Математика» в период с 2015 по 2017 гг., составляет 63,5 балла (без учёта лиц, поступивших по результатам олимпиад). Многим сложно воспринимать материал по таким базовым дисциплинам как «Алгебра», «Аналитическая геометрия» и «Математический анализ». Особенно трудно усваивается теория; теоремы и их доказательства понимают по большому счёту только выпускники физико-математических классов лицеев и гимназий. И это несмотря на то, что понятие доказательства является основным понятием в математике (изучается ли она в лицее или обычной школе), оно не доносится учителями математики до учащихся. Для многих первокурсников математика состоит только в решении типовых задач, строго по алгоритму. Бывают случаи, когда студент возмущается, что преподаватель просит рассказать ход решения задачи, объяснить шаги, приводящие к получаемым результатам. Для студента достаточно того, что правильный ответ получен, и он не задумывается, на основе каких определений и теорем решалась задача. Первокурсники с баллами свыше 70 уходят на другие образовательные программы, где математика усваивается в рамках дисциплины «Высшая математика», потому что «там её меньше». Вторым основным фактором отсева первокурсников является, как мы считаем, неумение студентов работать самостоятельно, читать учебную литературу. Последнее даже важнее, так как самостоятельная работа на младших курсах в основном и состоит в чтении учебников и учебных пособий. Сколько бы

преподаватели не шли на упрощение содержания дисциплин и на снижение требований к оценке уровня усвоения учебного материала, пока в университет приходят абитуриенты, не подготовленные самостоятельно работать, на качественный выпуск математиков или учителей математики не стоит надеяться.

В 2015 г. содержание ОПОП «Математика» было обновлено, при этом была расширена вариативная часть, за счёт увеличения «корзины» выборных дисциплин, что позволяет удовлетворить интересы обучающихся. В 2018 г. программа также претерпела изменения, были внедрены дисциплины по математической теории машинного обучения, что отвечает современным требованиям экономики. Мы надеемся, что в свете тех изменений, которые произошли в содержании, программа станет более привлекательна для абитуриентов.

2. Подготовка учителей математики в рамках магистерской программы

Понижение уровня математического образования на наш взгляд в большей степени связано с кадровыми проблемами. Пока у нас есть учителя, которые (а) сами с трудом решают задачи ЕГЭ, (б) не заинтересованы в результатах своего труда, то ни о каком развитии математического образования мы не можем говорить. Университеты и институты в первую очередь должны быть заинтересованы в качественной подготовке учителей математики, чтобы впоследствии получить от них «качественных студентов», в том числе будущих учёных-математиков, учителей и преподавателей математики.

В Комплексный план мероприятий по развитию математического образования в Республике Саха (Якутия) на 2016-2020 годы была включена разработка и утверждение авторской магистерской программы «Учитель-исследователь в области математического образования» А.Ж. Жафярова, член-корреспондента РАО, доктора физико-математических наук, профессора, профессора кафедры. В 2016 г. состоялся первый набор на программу.

Цель программы – это подготовка высококвалифицированных научно-педагогических кадров – учителей математики для работы в образовательных организациях, способных преподавать математику на высоком научно-методическом уровне и осуществлять научно-исследовательскую деятельность.

Программа ориентирована на подготовку педагогически компетентных учителей математики, свободно владеющих материалом высшего и школьного курса математики, способных оптимально использовать

психолого-педагогические и информационно-телекоммуникационные технологии. Большое внимание уделено на то, чтобы выпускник магистратуры:

- был способен успешно работать с одаренными детьми в области математики на основе овладения им новых педагогических эффективных инновационных технологий, разработанных в России и за рубежом;

- был готов к решению проблем повышения качества математической подготовки учащихся на основе разработки и внедрения в образовательный процесс новых технологий и методик изучения дисциплин, основанных на компетентностном подходе;

- имел развитые личностные качества, сформированные на высоком уровне общекультурные и профессиональные компетенции в соответствии с требованиями ФГОС ВО направлению подготовки 44.04.01 Педагогическое образование за счет усиления содержания учебных дисциплин на основе интеграции вузовской математики, школьного курса математики и психолого-педагогических и информационных коммуникационных технологий.

Программа включает в себя модуль «Математика» в объеме 24 зачетных единиц и содержит такие дисциплины, как:

- Линейные и квадратичные функции, их приложения;
- Функции переменных высоких степеней и их приложения;
- Функция переменных рациональных степеней и её приложения;
- Логарифмические и показательные функции;
- Стереометрия;
- Планиметрия;
- Тригонометрия;
- Комбинаторика и теория вероятностей;
- Прогрессии и последовательности;
- Делимость целых чисел.

Содержание данного модуля полностью охватывает учебный материал по математике общего образования. Модуль «Математика» представляет собой не традиционный курс «Элементарной математики», изучаемый студентами математических факультетов и институтов. Он основан на уточненных понятиях «компетенция» и «компетентность», введенных А.Ж. Жафяровым. По каждой дисциплине разработаны общие требования к формированию базисных компетенций, приведена технология формирования базисных компетенций и компетентностей, представлена модель формирования базисной компетентности. Все дисциплины имеют учебно-методическое обеспечение, содержащее достаточное число задач

для самостоятельного решения, включая задачи, решения которых требуют творческого подхода.

По магистерской программе на данный момент был осуществлен набор двух групп. Преимуществом данной программы считаем то, что по ней могут получить образование выпускники нематематических или непедagogических направлений подготовки и специальностей, что особенно актуально в нашей республике, так как большинство школ находится в сельской местности, школы малокомплектные, и достаточно часто учителем математики работает человек, не имеющий специального математического образования. Содержащийся в программе модуль «Математика» позволяет не только повторить и углубить школьные математические знания, но и приобрести навыки творческой и исследовательской деятельности.

Лучшей формой реализации этой программы по нашему мнению является очно-заочная форма обучения, которая позволяет студентам учиться и работать.

В настоящее время проблемой для нас стало снижение количества контрольных цифр приема по направлению подготовки 44.04.01 со стороны МОН РФ. На уровне бакалавриата трудно подготовить учителя, отвечающего тем требованиям для развития математического образования, которые описаны в Концепции. Необходима финансовая поддержка со стороны органов российской и местной власти для подготовки учителей математики через магистратуру.

Заключение

В ноябре 2017 г. был проведен круглый стол «Развитие математического образования», посвященный 55-летию кафедры алгебры и геометрии, с участием преподавателей университета, учителей математики, представителей Министерства образования и науки РС(Я). По его результатам были выработаны рекомендации, в том числе следующие, которые при их реализации могли бы, по нашему мнению, повлиять на повышение уровня математического образования:

- разъяснять ведущую роль математического образования в экономическом развитии страны, воспитывать позитивное отношение к математике, вести популяризацию историй успеха в математике в РС(Я);
- повышать долю учащихся, сдающих профильную математику;
- провести эксперимент по внедрению устных экзаменов по математике с 8 по 11 классы;
- создать базу данных учителей математики в РС(Я), проводить тесты среди учителей математики и по итогам тестов повышать квалификацию учителей по индивидуальным учебным планам;

– провести анализ потребности рынка труда в РС(Я) в аналитиках с математическим образованием, донести до абитуриентов информацию о том, что бакалавриат математики является первой ступенью магистратур «Наука о данных и машинное обучение», «Финансовая математика», «Математика».

Литература

1. Распоряжение Правительства РФ от 24 декабря 2013 г. N 2506-р "О Концепции развития математического образования в РФ". URL: <http://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/70452506/#ixzz5Gu7IWuPd> (дата обращения: 28.05.2018).

2. Приказ Минобрнауки России от 3 апреля 2014 г. № 265 "Об утверждении плана мероприятий Министерства образования и науки Российской Федерации по реализации Концепции развития математического образования в Российской Федерации, утвержденной распоряжением Правительства Российской Федерации от 24 декабря 2013 г. № 2506-р". URL: <https://минобрнауки.рф/документы/4253> (дата обращения: 28.05.2018).

3. Распоряжение Правительства Республики Саха (Якутия) от 6 апреля 2016 года № 326-р "О комплексном плане мероприятий по развитию математического образования в Республике Саха (Якутия) на 2016 - 2020 годы". URL: <http://yakutia.gov.ru/doc/34447> (дата обращения: 28.05.2018).

4. Жафяров А.Ж. Методология и технология внедрения компетентностного подхода в математическом образовании // Вестник новосибирского государственного педагогического университета. – 2016. – № 3(31). – С. 105-115.

Никитина Екатерина Семеновна, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой алгебры и геометрии, ФГАОУ ВО «Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова», Россия, Республика Саха (Якутия), 677000, г. Якутск, ул. Кулаковского, д. 48, каб.253, тел. +7 (4112) 496835, e-mail: eknikitina48@mail.ru

Неустроева Татьяна Кимовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и геометрии, ФГАОУ ВО «Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова», Россия, Республика Саха (Якутия), 677000, г. Якутск, ул. Кулаковского, д. 48, каб.255, тел. +7 (4112) 496835, e-mail: ntk_imi@mail.ru

Nikitina Ekaterina Semenovna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education "M.K. Ammosov North-Eastern Federal University

Neustroeva Tatiana Kimovna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education "M.K. Ammosov North-Eastern Federal University

ФОРМЫ И МЕТОДЫ ОРГАНИЗАЦИИ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТОВ КОЛЛЕДЖА

Аннотация. Инновационные методы в образовании призваны повысить качество подготовки студентов посредством развития творческих способностей и самостоятельности у будущих специалистов. Результатом творческого процесса должно явиться новое знание. Математические темы, изучаемые студентами, являются основой приемов и формул, которые содержатся в прикладных курсах выпускающих кафедр. Одной из основных образовательных задач является воспитание математической культуры, достаточной для восприятия современных технологий и привития навыков математического мышления в профессиональной деятельности. Студенты колледжа должны уметь применять исследовательские навыки, полученные на лекционных и практических занятиях: воспринимать и обрабатывать нужную информацию, проводить анализ полученных фактов, строить адекватные предположения и уметь проверять их, после чего выдавать верные умозаключения, заканчивать исследовательскую работу выводами.

Ключевые слова: математика, инновационные методы, исследовательская работа студентов, творческая деятельность.

© *E. B. Pavlova, E. N. Bulgatova*

FORMS AND METHODS OF ORGANIZATION OF RESEARCH ACTIVITIES

Abstract. Forms and methods of organization of research activities college student Innovative methods in education are designed to improve the quality of students' training by developing creative abilities and independence from future specialists. The result of the creative process should be new knowledge. Mathematical topics, studied by students, are the basis of techniques and formulas, which are contained in the applied courses of graduate departments. One of the main educational tasks is to develop a mathematical culture sufficient for the perception of modern technology and instilling skills of mathematical thinking in professional activities. College students should be able to apply the research skills gained in lectures and practical classes: to perceive and process the necessary information, to analyze the facts, to build adequate assumptions and be able to check them, and then give the right conclusions, to finish the research work conclusions.

Keywords: mathematics, innovative, research work of students, creative activity.

Инновационными методами в высшем образовании считаются методы, основанные на применении достижений современной науки и информационных технологий. Круг методических и педагогических задач,

которые можно решать с помощью информационных технологий, весьма разнообразны. Компьютер является универсальным средством, которое можно использовать в качестве тренажера, электронной доски, калькулятора, средства контроля и оценки знаний, средств моделирования. Изменение технологии получения знаний на основе таких важных дидактических свойств компьютера, как индивидуализация и дифференциация учебного процесса при сохранении его целостности, ведет к изменению роли педагога. Преподавателю необходимо владеть современными методиками и новыми технологиями, чтобы общаться на одном языке со студентами.

Общеизвестный факт, что математика является наукой об общих законах развития природы, для описания этих абстрактных понятий вводится язык математических формул. Последовательность такая: во-первых, новые понятия и идеи, во-вторых, описательный, формальный процесс. Осваивая математические дисциплины, прибегают к прямо противоположной установке: ввод новых определений, различные свойства, затем – различные приложения, которые нас, в основном, и интересуют. Поэтому студенты ошибочно могут предположить, что математические дисциплины – отдельная ветвь естественнонаучного направления, которая развивается независимо от других дисциплин цикла.

Цитируя И.В.Гете: «Математика, как и диалектика, есть орудие высшего, внутреннего разума; практическое занятие ею – такое же искусство, как и красноречие», в данной статье мы хотим представить математику как область интеллектуальной деятельности, не сводящейся только к выведению следствий средствами формальной логики. В преподавании математики предлагаем учитывать несколько иной подход к изучению этого предмета естественнонаучного цикла:

- В математической деятельности крайне важна исследовательская составляющая, которая включает в себя поиск гипотезы, для появления которой необходимы наблюдения, догадки, аналогии, индуктивные предположения, обобщения.

- В математической деятельности далеко не все дороги ведут к успеху, возможны заблуждения, тупики, ошибки.

- Наряду с исследовательской деятельностью в математике необходима деятельность критическая. Всегда должно быть место сомнению, устранять которое можно с помощью различной аргументации. Поиск традиционного доказательства также может быть отнесен к исследовательской, а затем и к критической деятельности. Существенным в обоих видах деятельности является и поиск контр примеров. Частью критической деятельности

является оценка выполненной работы, в том числе и из эстетических соображений.

В ходе обучения в вузе важная роль отводится исследовательской работе будущих специалистов. В этой статье попытаемся рассмотреть вопрос о формировании исследовательских компетенций.

Основная идея творческого обучения студентов математике состоит в организации продуктивного поиска идей и фактов и дальнейшем исследовании, где и как можно реализовать полученные результаты. Современный специалист должен уметь переводить получаемые знания в инновационные технологии, превращая новые знания в конкретные предложения, знать, как обеспечить доступ к глобальным источникам знаний, владеть современными информационными технологиями.

Совершенствование образования в высшей школе во многом определяется внедрением в учебный процесс личностно-ориентированных технологий обучения. Реализация такого подхода ведет к изменению позиции педагога, которая оставаясь такой же важной, должна сводиться к организации познавательной деятельности студентов. Педагог теперь не является источником первичной содержательной информации, лишь консультирует и осуществляет систематический контроль аудиторной СРС, ориентируя их на разнообразные виды деятельности, на приоритет деятельности исследовательского, творческого характера [1, с.430]. Одной из важных задач, которые решаются на занятиях, является организация поиска и применения полученных знаний. Исследовательские методы рекомендуется применять не на одном занятии, а в целом в дисциплине, иногда на стыке учебных дисциплин (например, вычисление интегралов при изучении физики). Применяется модульный принцип обучения: материал, традиционно трудно поддающийся изучению, разбивается на блоки, которые в свою очередь делятся на целевые, информационные и операционные. Для того чтобы не дублировать полностью учебный материал, проводятся «игры» с математическими объектами, в результате чего студенты выходят самостоятельно или с помощью преподавателя на учебно-математические идеи, которые получают развитие в дальнейшем.

Одним из приемов творческой деятельности на занятиях по математике является составление задач на основе полученного результата. Студентам можно предложить составить задачу на основании той или иной деятельности и результатов этой деятельности. Часто это происходит после решения студентами какой-либо задачи, тогда на придумывание новой задачи уходит немного учебного времени, но эта деятельность приносит большой поисковый и учебный эффект. Действительно, «когда идеи идут

вперед информации, а не плетутся вслед за ней, прогресс не заставит себя ждать» [2, с.10].

Одним из самых распространенных приемов усложнения (упрощения) математических объектов является использование формул (закономерностей, связей). Так переход от одной части формулы к другой дает более простое выражение, то обратный переход более сложное (например, тригонометрические формулы). Важный прием усложнения алгебраических выражений заключается в применении различных подстановок, которые необходимы при вычислении интегралов, пределов. «Скрывая» идею, студент отыскивает идеи в различных ситуациях, составляя задачу, сам составитель учится искусству решения задачи. Умение пользоваться исследовательскими методами: собирать информацию, факты, уметь анализировать их с разных точек зрения, выдвигать гипотезы, делать выводы и заключения, необходимо каждому современному специалисту.

Также весьма полезным оказывается проведение онлайн-консультаций для студентов: все желающие могут задать интересующие их вопросы по скайпу в заранее определенное время.

Предлагая решение творческих и логических заданий, преподаватель, по нашему мнению, создает реальные предпосылки для дальнейшего ознакомления с различными случаями применения полученных знаний в ситуациях сходных реальной действительности. Математика формирует алгоритмическое мышление, т.е. умение четко разложить решение сложной задачи на ряд более простых, и сделать это эффективно.

Литература

1. Трунова Е.В., Тур А.И. Самостоятельная работа в процессе формирования математической культуры студентов учетно-экономического профиля университетов // Молодой ученый. – 2013. - №7. – С. 428-431

2. Боно Э. Латеральное мышление // Э.Боно. – СПб.: Питер Паблишинг. - 1997. - С.10

Павлова Елена Бадмаевна, старший преподаватель, Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, 670013, Россия, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40в, тел.: +7 (3012) 431415, e-mail: pavlova2607@mail.ru

Булгатова Елена Николаевна, кандидат физико-математических наук, доцент, Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, 670013, Россия, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40в, тел.: +7(3012)431415, e-mail: belena77@mail.ru

Pavlova Elena Badmaevna, Senior Lecturer, East Siberian State University of Technology and Management

Bulgatova Elena Nikolaevna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, East Siberian State University of Technology and Management

МЕСТО ЗАДАЧНОГО МАТЕРИАЛА В АВТОРСКОЙ МЕТОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Abstract. В статье рассмотрен подход реализации стандартизации формирования необходимого уровня будущего выпускника на основе государственных стандартов посредством набора учебных дисциплин, элементы освоение которых обеспечиваются задачным материалом. Отмечается, что предлагаемая для этого компетентностная парадигма приводит к изменению роли преподавателя. Это естественно приводит к реформированию такого его инструмента в освоении учебных дисциплин как задачный материал. На основе исследования понятия «задача» выводится представление задачного материала в виде средства усвоения и овладения составляющими компетенций через овладение соответствующими учебными дисциплинами. Проектирование этих дисциплин представляется в виде разработки авторской методической системы обучения (АМСО) учебной дисциплины основе использования принципа академической свободы в условиях образовательной организации высшего образования. Выстраивается следующая логика конструирования АМСО: разработка задачного материала как средства обучения, связанного с соответствующей наукой; на этой основе определение элементов группы, описывающая содержание учебной дисциплины; далее на этой основе определение элементов группы, определяющей методы обучения, дополнительные средства обучения, организационные формы обучения и воспитания; наконец, подготовка обучающихся к этой участию в реализации этой АМСО, например, через специальные факультативы и метадисциплины. Приведены примеры описаний содержания задачного материала для конкретных учебных дисциплин.

Ключевые слова: стандартизация, задача, средство обучения, авторская методическая система обучения.

© А. Е. Polichka

PLACE OF TASK MATERIAL IN THE AUTHOR'S METHODOICAL SYSTEM OF LEARNING OF MATHEMATICS FOR TEACHER EDUCATION

Abstract. The article considers the approach of implementation of standardization of formation of the necessary level of the future graduate on the basis of state standards through a set of academic disciplines, the elements of the development of which are provided with the task material. The proposed competence-based paradigm leads to a change in the role of the teacher. This naturally leads to the reform of such a tool in the development of educational disciplines as problem material. On the basis of the study of

the concept "task" is derived representation of the problem material in the form of a means of assimilation and mastery of the components of competencies through the mastery of the relevant academic disciplines. The design of these disciplines is presented in the form of development of the author's methodical system of training (amso) of the discipline based on the use of the principle of academic freedom in the conditions of educational organization of higher education. The following logic of construction of amso is built: the development of task material as a means of learning associated with the relevant science; on this basis, the definition of the elements of the group describing the content of the discipline; further on this basis, the definition of the elements of the group that determines the methods of training, additional learning tools, organizational forms of training and education; finally, the preparation of students for this participation in the implementation of this amso, for example, through special electives and metadata. Examples of descriptions of the content of the problem material for specific academic disciplines are given

Key words: standardization, task, means of training, author's methodical system of training.

Введение

Общепризнанным является то, что современный этап развития человеческого общества тесно связан с его информатизацией. Мощные потоки информации востребовали процесс постоянного совершенствования и обновления необходимых для этого специальных средств информационных и коммуникационных технологий (ИКТ). Практика их применения в различных сферах человеческой деятельности показала, что эффективность использования этих средств основывается на внедрении стандартизации деятельности во всех видах человеческой деятельности. Естественно процесс стандартизации стал интенсивно внедряться и образовательную сферу. Унификация и стандартизация в этой сфере стала затрагивать все уровни, виды и формы, причем эти процессы определяются применяемых как технических, так и программных средств информационных и коммуникационных технологий. На подход государственной стандартизации, показавшего на определенном этапе развития технической сферы, возложены громадные надежды при реформировании сферы образования, особенно для решения важных образовательных проблем по обеспечению доступности и равенства в получении необходимого для общества уровня образования его членов. Не будем останавливаться на перечне рисков потери индивидуальности и специфичности образовательных основ конкретных стран. В настоящее время определяющей в образовательной сфере является системная модель отношений между обучаемым, педагогическим работником, информационными источниками (книги и т.п.) и средствами ИКТ (ЭВМ и

т.д.). Из специфических средств обеспечения реализации государственных стандартов в этой модели на уровне отношений обучаемого и педагогического работника в высшем образовании выделим одно средство. Именно в качестве этого средства формирования необходимого уровня будущего выпускника традиционно является набор учебных дисциплин, элементы освоения которых обеспечиваются задачным материалом. Наш подход заключается в том, что особенно важно для преподавательского состава описать новые появляющиеся характеристики и требования к задачам, как средствам освоения учебного материала.

1. Новые функции преподавателя в процессе стандартизации

Основой реализации государственных стандартов выбрана компетентностная парадигма, основанная на известных принципах Болонской декларации. Отметим для нашего подхода при этой парадигме изменение роли преподавателя [1], которая представляла его систематизатором знаний, основной фигурой представления и обучении основного понятийного материала, являющейся руководителем и куратором деятельности обучаемого, оценивающего его уровень освоения знаний. При компетентностной парадигме предполагается студентоцентрированная концепция, в которой преподавателю отведена сопровождающая роль при приобретении обучающимся необходимых компетенций. Прежнее значение роли преподавателя сохраняется, но при этом предусматриваются на более высоких уровнях консультирование и мотивирование обучаемых по: месту и значению областей знания; пониманию и способностям применения полученных знаний; достижению профиля; личным интересам, пробелам и достижениям; критическому отбору информационных материалов; использованию учебных ситуаций и т.д. Это естественно приводит к реформированию таких инструментов в освоении учебных дисциплин как задачный материал. Анализ реализации государственных требований показывает, что к контрольным заданиям отнесены и задачи. Наше исследование посвящено другим функциям задачного материала.

2. Задачный материал как средство усвоения и овладения составляющими компетенций

Понятие и термин «задача» является часто употребляемыми в науке и практике. Этому посвящены многочисленные исследования в философии, кибернетике, психологии, педагогике, в предметных методиках и др. (см., напр. [7]).

В частности Г. И. Саранцев и Е. Ю. Миганова отмечают [7], что ряд авторов термин «задача» относят к неопределяемому, а в широком смысле

представляют его означаящим смысл исполнения, решения чего-либо. Для нас важно, ими выделены подходы пояснения содержания этого смысла на основе родового понятия «явление обучения» и видовых отличий как: способа организации и управления видами деятельности обучаемого; их носителя адекватно содержанию обучения; средства целенаправленного формирования компетенций; одна из форм и методов обучения; средство реализации отношений теории и практики. Отмечается актуальность последней трактовки, охватывающей спектр задач, называемых предметными. Они широко представлены в учебной литературе и в настоящее время круг их применений расширяется. Исследования показывают, что классификация задач связана со спецификой методики обучения предмету.

Для нас важно, что авторы выделили исторические этапы использования задач: изучение учебной дисциплины от теории к обучению решению задач; решение задач для сопровождения обучения предмету; организация обучения посредством решения задач; выделение процесса решения задач как основы образовательного процесса. При этом выделяется необходимость способствования использованию и разработке задач, требующих для их решения применения различных методов. Они будут способствовать процессам укрупнения этих методов. Такой новый этап использования задач в качестве уже основы образования обучаемых. Выдвигаются ряд требований к современным задачам: для решения задачи должны быть востребованы знания из смежных образовательных областей; использования методов познания; создание современных методов аргументации; наличие трактовок ответов, связанных с приложениями.

Анализ работ по использованию задач в математике показывает наличие исследований по традиционно выделяемым их ролей и функций: обучающей; развитию у обучаемых мышления; воспитывающей. В ряде работ выделяются и появление новых ролей задач в обучении математике. К ним можно отнести такие, как: анализа учебных и жизненных ситуаций, где применимы математические аппарат и инструменты [6]; ознакомления с новыми алгоритмическими подходами; демонстрации эффективности выделения подзадачи в задаче; демонстрации необходимости перебора возможных вариантов подходов решения и анализа, создания базы полезной для решения новых задач информации; подготовки к решению принципиально новых задач; формирования уважения к интеллектуальному труду и его результатам.

Важным в нашем подходе является то, что ряд авторов выделяют функциональное назначение задачи в виде средства обучения и формирования как профессиональной компетентности, так и

математической компетенции обучаемых. Это позволяет определить вариант места задачного материала в реализации стандартов образования через создание рабочих программ дисциплин (РПД).

3. Проектирование РПД в форме МСО на основе задачного материала

Вариантом разработки РПД рассмотрим процесс проектирования соответствующей педагогической системы, представляемой документально в формате РПД, разработанной соответствующей образовательной организацией. Согласно нашего подхода проектирования педагогических систем разного уровня для подготовки кадров [3, 4, 5] в нашем исследовании будем рассматривать микроуровень педагогических систем, который представляется системами, решающими специфические педагогические цели, в частности системы обучения учебным дисциплинам, авторские методические системы и т. п. Особое место при рассмотрении педагогических систем высшего образования уделит созданию педагогических систем микроуровня, в котором представим системы, решающие специфические педагогические задачи средствами учебных дисциплин и на основе использования принципа академической свободы. Согласно статье 44 Конституции РФ по принципу академической свободы каждому гарантируется свобода преподавания. В связи вводим понятие авторской методической системой обучения (АМСО) учебной дисциплине, под которой будем понимать педагогическую систему микроуровня, решающую специфические педагогические задачи средствами этой учебной дисциплины и на основе использования принципа академической свободы в условиях образовательной организации высшего образования.

В подходе А.М. Новикова и Д.А. Новикова [2] педагогическая система рассматривается как специальная педагогическая компонента с выделенными группами элементов: группа определения целей образования; группа, описывающая содержание образования; группа, определяющая методы обучения, средства обучения, организационные формы обучения и воспитания; группа необходимых педагогических работников; обучающиеся. Элементом педагогической системы, являющимся основным для определения связи с внешней средой, выберем средства обучения, выделив основным из них задачный материал. Таким образом, для реализации целей, поставленной в группе определения целей образования рассматриваемой АМСО, выстраивается следующая логика конструирования: разработка задачного материала как средства обучения, связанного с соответствующей наукой; на этой основе определение элементов группы, описывающая содержание учебной дисциплины; далее

на этой основе определение элементов группы, определяющей методы обучения, дополнительные средства обучения, организационные формы обучения и воспитания; наконец, подготовка обучающихся к этому участию в реализации этой АМСО, например, через специальные факультативы и метадисциплины.

4. Примеры описаний содержания задачного материала

Первый пример посвящен изложению курса «Математический анализ» для одного семестра образовательной программы бакалавриата педагогического образования. Задачный материал разбит на группы.

Раздел «Функции и пределы». Предел функции. Вычисление пределов функций. Непрерывность функции в точке. Односторонняя непрерывность. Непрерывность функции на промежутке. Точки разрыва функции.

Раздел «Дифференциальное исчисление функции одной переменной». Основные правила дифференцирования. Производная функций, заданных неявно, параметрически, логарифмическая производная. Правило Лопиталья. Исследование функций и построение графиков с помощью производной.

Раздел «Интегральное исчисление функции одной действительной переменной». Неопределенный интеграл. Основные методы интегрирования. Определенный интеграл. Вычисление определенного интеграла. Приложение определенного интеграла. Несобственные интегралы. Вычисление несобственных интегралов. Кратные интегралы.

Комплексные числа. Форма записи комплексных чисел. Действия над комплексными числами.

Вторым примером продемонстрируем реализацию данного подхода на примере учебной дисциплины «Уравнения с частными производными», предусмотренную для специальности «Математика» на третьем курсе в течение всего учебного года. Проектирование методической системы данной дисциплины производилось согласно логике.

Предварительный анализ опыта изложения учебной дисциплины в ведущих университетах страны привел к необходимости представить элемент задачный материал АМСО набором специальных проблемных модулей. Далее подбирались тестовый материал, содержание которого позволяло бы разрабатывать задания одного типа на группу обучаемых. Исследование методического опыта ведущих вузов позволило выделить следующие типы задач для обеспечения усвоения основных учебных элементов дисциплины на втором уровне усвоения опыта: исследовать приведенные равенства на принадлежность к дифференциальным уравнениям с частными производными и выяснить их порядок; исследовать с обоснованием следующие уравнения на принадлежность к линейным

(однородным или неоднородным), нелинейным (квазилинейным); выявить тип следующих уравнений; объяснить приведение уравнения к каноническому виду в каждой из областей, где сохраняется тип рассматриваемого уравнения; исследовать и найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду, приведя его к каноническому виду; исследовать задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа, параболического типа, эллиптического типа; записать систему Коши – Ковалевской, для которой справедлива теорема существования и единственности теорем Ковалевской при конкретных значениях порядка уравнения m и размерности пространства n (вид F выбирается самостоятельно); объяснить использование формулы Пуассона для нахождения решения задачи для волнового уравнения на плоскости, формулы Кирхгоффа для нахождения решения задачи Коши для волнового уравнения в пространстве, формулы Пуассона для нахождения решения задачи Коши для уравнения теплопроводности; исследовать и найти в указанной области отличные от тождественного нуля решения $u=y(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющие заданным краевым условиям (Задача Штурма – Лиувилля); исследовать и решить первую смешанную задачу для волнового уравнения на отрезке, в прямоугольнике, в круге; спрогнозировать различные способы нахождения решения первой смешанной задачи для уравнения теплопроводности на отрезке, в круге (с использованием ПЭВМ); исследовать и решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге, для уравнения Пуассона в кольце, в шаровом слое; спрогнозировать различные способы нахождения функции, удовлетворяющей внутри круга уравнению Гельмгольца и принимающую на границе круга заданное значение, удовлетворяющей внутри шара уравнению Гельмгольца и принимающую на границе шара заданное значение.

Заключение

Описанный вариант выделения функционального назначения задачи в виде средства обучения и формирования как профессиональной компетентности, так и математической компетенции обучаемых позволяет проектировать авторские методические системы обучения учебной дисциплине, решающую специфические педагогические задачи на основе задачного материала учебной дисциплины и на основе использования принципа академической свободы в условиях образовательной организации высшего образования, представив проектную документацию в форматах, разработанных этой организацией. Такие АМСО обучения разработаны на кафедре математики и информационных технологий автором и его

учениками. Работа продолжается в направлениях: организации метадеятельности обучаемых на основе учебной дисциплины; их приобщаются к творческой работе посредством проблемных задач, использования национальных и региональных особенностей региона; использования особенностей будущей профессиональной деятельности; обучения составлению самих обучаемых задачам с производственным содержанием.

Литература

1. Байденко В.И. Болонский Процесс: поиск общности Европейских систем высшего образования (проект TUNING). – Режим доступа: <https://www.twirpx.com/file/715953/>. (Дата обращения: 27.05.2018).
2. Новиков, А.М. Образовательный проект (методология образовательной деятельности) / А.М. Новиков, Д.А. Новиков. – М.: «Эгвес», 2004. – 120 с.
3. Поличка, А.Е. Проектирование методических систем инфраструктуры комплексной, многоуровневой и многопрофильной подготовки кадров информатизации региональной системы образования: монография / А. Е. Поличка. – Хабаровск: Изд-во ДВГУПС, 2014. – 119 с.
4. Поличка, А.Е. Особенности проектирования инновационной инфраструктуры подготовки кадров информатизации региональной системы образования в условиях функционирования информационно-коммуникационной предметной среды: Монография/ А. Е. Поличка. – Хабаровск: Изд-во ДВГУПС, 2015. – 86 с.
5. Поличка, А.Е. Технологическая подготовка методических систем в информационно-коммуникационных предметных средах: монография / А. Е. Поличка. – Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2017. – 168 с.
6. Распоряжение Правительства РФ от 24 декабря 2013 г. № 2506-р «Концепция развития математического образования в Российской Федерации». – Режим доступа: <http://base.garant.ru/70552506/>. <https://www.twirpx.com/file/715953/>. (Дата обращения: 27.05.2018).
7. Саранцев Г. И., Миганова Е. Ю., Функции задач в процессе обучения [Электронный ресурс]: электрон. данные. – Минск: Белорусская цифровая библиотека LIBRARY.BY, 17 октября 2007. – Режим доступа: http://library.by/portalus/modules/shkola/readme.php?subaction=showfull&id=1192627890&archive=1196815384&start_from=&ucat=& (свободный доступ). (Дата обращения: 27.05.2018).

Поличка Анатолий Егорович, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Тихоокеанский государственный университет», 680000, г. Хабаровск, ул. Запарина, 30, кв. 120, тел.: +7 914 5499461, e-mail: aepol@mail.ru

Polichka Anatoly Egorovich, Doctor of Pedagogics, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Pacific National University

ИСТОРИЧЕСКИЙ ПОДХОД В ПРЕПОДАВАНИИ СОДЕРЖАТЕЛЬНОЙ ЛИНИИ «ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ» В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ»

Аннотация. В статье кратко рассматриваются исторические аспекты возникновения в России финансовых вычислений, появления коммерческой арифметики и ее основных экономических терминов; анализируются особенности изучения актуальных на данный момент в школьном курсе математики финансово-экономических задач и их значение в повседневной жизни; выделяются ключевые подходы к решению нового вида задач ЕГЭ по математике – задач с «экономическим содержанием». Задачи экономического содержания являются практическими задачами. Рассматривается решение задач в соответствии с формулами. Применение свойства степеней. Задачи экономического содержания являются практическими задачами. Решение подобных задач помогает качественно изучить содержание курса математики и позволяет переносить приобретенные теоретические знания в жизнь, экономику, а это в свою очередь дает возможность активизировать интерес к задачам прикладного характера и исследования математики, в общем.

Ключевые слова: школьный курс математики, экономические знания, финансово-экономические задачи, формулы, проценты, степень.

© М. А. Semenchenko, O. A. Malykhina

HISTORICAL APPROACH IN TEACHING THE CONTENT CIRCUIT "FINANCIAL AND ECONOMIC PROBLEMS" IN THE COURSE OF MATHEMATICS AT SCHOOL

Abstract. The article gives a brief summary of the historical aspects of financial calculations development in Russia, emergence of commercial arithmetic and its main economic terms, analyzes the peculiarities of studying contemporary financial problems in the school course of mathematics and their importance in everyday life; emphasizes the key approaches to the solution of a new type of problems of the Unified State Exam on mathematics with "economic content". Such problems are practical, and we consider their solutions in accordance with the formulas, application of the property of powers. Solution of the problems with "economic content" helps to qualitatively study the content of the course in mathematics and allows us to transfer the acquired theoretical knowledge to life, the economy, and this in turn makes it possible to intensify interest in applied problems and mathematics in general.

Keywords: school course of mathematics; economic knowledge; financial and economic problems; formulas; percentages; degree.

Одним из ключевых вопросов, которые решают в школе на современном этапе, является формирование у учеников умения самостоятельно решать важные задачи. В обстоятельствах рыночной экономики особую роль обретает развитие у школьников экономического мышления, которое обеспечивает понимание сущности протекающих экономических процессов.

В связи с этим уже в школьном курсе математики появляется «экономическая составляющая», которая образует новую содержательную линию – экономическую, в ходе формирования которой математическая подготовка обучающихся и изучение ими экономических терминов совершается в одно и то же время. Школьники обобщают данные о процентах, подробно знакомятся с историей возникновения термина «процент» и его знака, формируют навыки решения задач на проценты.

Финансовые вычисления ведут свое начало с момента появления товарно-денежных отношений. В отдельную отрасль знаний они выделились в XIX веке под названием «коммерческая арифметика». В 1877 г. в Московской практической академии коммерческих наук был издан учебник «Коммерческая арифметика и торговые операции».

В нашем государстве финансовые вычисления были известны как «коммерческая арифметика». В курсе «коммерческой арифметики» исследовалась техника процентных вычислений по процентным акциям и бумагам, расчетов по векселям, предоставлялись методы дисконтирования и др. В дореволюционной России рассматриваемые вопросы анализировались в средних учебных заведениях. Например, в элементарной алгебре А.Н. Глаголева были введены вопросы учета ренты, капитала, вопросы наследства и т.д.

В курсе математики, есть реальная возможность связать экономические задачи с реальной жизнью, актуальными новыми понятиями современности, показать значимость процентов для жизни в современном обществе. Важно также то, что финансовая математика – это единственная область, предполагающая использование процентов не только для определения данных, но и для содержательных вычислений.

В этом же направлении могут решаться задачи на ценообразование. С ценами на товары и услуги человек также встречается ежедневно, и именно школьный курс математики отвечает за то, чтобы данное направление жизнедеятельности было безопасным и эффективным для человека.

Таким образом, целями работы с финансово-экономическими задачами в курсе математики являются:

– овладение математическими знаниями и умениями, которые используются в практической деятельности;

– интеллектуальное развитие и формирование личностных качеств, необходимых для современной жизни в социуме.

В работы профильной математики на ЕГЭ добавлены текстовые задачи по экономике.

Проанализируем ключевые подходы к решению нового вида задач ЕГЭ по математике – задач с «**экономическим содержанием**».

I. Решение задач в соответствии с формулой.

Известно, что если число A повысить на p %, получится $A \left(1 + \frac{p}{100}\right)$.

Если число A уменьшить на p %, мы получим $A \left(1 - \frac{p}{100}\right)$.

1. Цена товара A руб. была увеличена на 25%. На сколько процентов необходимо сейчас ее понизить, для того чтобы получить изначальную стоимость товара.

Решение: Цена товара после увеличения стала $A \left(1 + \frac{25}{100}\right)$.

Предположим ее необходимо уменьшить на p %, тогда цена товара после снижения будет $A \left(1 + \frac{25}{100}\right) \left(1 - \frac{p}{100}\right)$ и получим изначальную цену товара:

$$A \left(1 + \frac{25}{100}\right) \left(1 - \frac{p}{100}\right) = A. \text{ Следовательно, получим ответ: } 20\%$$

II. Определенные задачи правильнее решать в общем виде, не подставляя изначальные данные, т.к. можно сбиться в вычислениях.

2. В банке была размещена сумма 3900 тыс. руб. под 50% годовых. В конце каждого из первых 4-х лет хранения после вычисления процентов вкладчик дополнительно добавлял на счет одну и ту же определенную сумму. По итогу 5-го года после начисления процентов выяснилось, что размер вклада вырос в сравнении с изначальным на 725%. Какую сумму вкладчик ежегодно добавлял к вкладу?

Решение: предположим, что изначальный вклад составлял A руб. и вкладчик ежегодно добавлял x руб. К началу второго года размер вклада

$$\text{составил } A \left(1 + \frac{50}{100}\right) = 1,5A \text{ руб.};$$

К началу третьего года размер вклада составил $(1,5A + x) 1,5 + x$ руб.;

К началу четвертого года размер вклада составил $((1,5A + x) 1,5 + x) 1,5 + x$ руб.;

К началу пятого года размер вклада составил $((((1,5A + x) 1,5 + x) 1,5 + x) 1,5 + x) 1,5 + x$ руб.;

К концу пятого года размер вклада составил $((1,5A + x) 1,5 + x) 1,5 + x) 1,5 + x) 1,5$ руб. Согласно условию задачи величина вклада увеличилась в сравнении с изначальной на 725%, то есть стала $A \left(1 + \frac{725}{100}\right)$.

Раскрыв скобки, получим следующее выражение:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^5 A + \left(\frac{3}{2}\right)^4 x + \left(\frac{3}{2}\right)^3 x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 x + \left(\frac{3}{2}\right) x = \frac{825}{100} A = \frac{33}{4}$$

$$A \frac{195}{16} x = \frac{21}{32} A$$

В результате, подставив вместо $A = 3900$ тыс., получаем $x = 210000$.

III. Применение свойства степеней

3. В период хранения вклада в банке проценты по нему каждый месяц начислялись сперва в размере 5%, потом 12%, затем $11 \frac{1}{9} \%$ и, наконец, 12,5% в месяц. Известно, что под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а после истечения срока хранения изначальная сумма вклада повысилась на $104 \frac{1}{6} \%$. Определите срок хранения вклада.

Решение: Пусть первоначальная сумма вклада будет A рублей, то через месяц эта сумма станет $A \left(1 + \frac{5}{100}\right)$ руб. Если ставку не изменять, то сумма повысится опять на 5% и станет $A \left(1 + \frac{5}{100}\right)^2$ и т.д. Пусть первая ставка продержалась k , вторая – m , третья – n , последняя – t месяцев.

Тогда сумма повысилась в $A \left(1 + \frac{5}{100}\right)^k \left(1 + \frac{12}{100}\right)^m \left(1 + \frac{1000}{900}\right)^n \left(1 + \frac{1125}{100}\right)^t$ раз. И по истечении срока хранения первоначальная сумма стала $A \left(1 + \frac{625}{600}\right)$

$$A \left(1 + \frac{5}{100}\right)^k \left(1 + \frac{12}{100}\right)^m \left(1 + \frac{100}{900}\right)^n \left(1 + \frac{1125}{100}\right)^t =$$

$$A \left(\frac{3 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 5}\right)^k \left(\frac{2 \cdot 2 \cdot 7}{5 \cdot 5}\right)^m \left(\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 3}\right)^n \left(\frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2}\right)^t = A \left(\frac{1225}{100}\right) = A \left(\frac{7 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3}\right)$$

Применяя свойства степеней, получим

$$2^{2m+n-2k-3t} \cdot 3^{k-2n+2t} \cdot 5^{n-k-2m} \cdot 7^{k+m} = 2^{-3} \cdot 3^{-1} \cdot 5^0 \cdot 7^2$$

Приравнять показатели при одинаковых основаниях и решить систему:

$$\begin{cases} m + n - 2k - 3t = -3 \\ k - 2n + 2t = -1 \\ n - k - 2m = 0 \\ k + m = 2 \end{cases}$$

Отсюда $k = m = 1$, $n = 3$, $t = 2$. Тогда срок хранения вклада $1 + 1 + 3 + 2 = 7$ месяцев.

Задачи экономического содержания являются практическими задачами. Решение подобных задач помогает качественно изучить содержание курса математики и позволяет переносить приобретенные теоретические знания в жизнь, экономику, а это в свою очередь дает возможность активизировать интерес к задачам прикладного характера и исследования математики, в общем. Данные задачи помогают наиболее качественно усваивать курс математики и развивать умения в решении такого рода задачи.

Литература

1. Башарин Г. П. Начало финансовой математики. М.: Просвещение, 2016. – 266 с.
2. Глейзер Г. Д., Глейзер М. Г. Интеграция общего математического образования: размышления и предложения // Вечерняя средняя школа. – 2014. - № 4. – С. 57-62.
3. Дорофеев Г. В. Изучение процентов в основной школе. М.: Просвещение, 2014. – 187 с.
4. Симонов А. С. Некоторые применения геометрической прогрессии в экономике. М.: Просвещение, 2012. – 284 с.

Семенченко Марина Альбертовна, магистрант педагогического института, Тихоокеанский государственный университет, 680035, г. Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136, e-mail: solnce92_0891@mail.ru

Мальхина Ольга Акимовна, кандидат педагогических наук, доцент, кафедра математики и информационных технологий, Тихоокеанский государственный университет, 680035, г. Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136

Semenchenko Marina Albertovna, master's school student of Pedagogical Institute, Pacific State University

Malykhina, Candidate of Pedagogics, Associate Professor, Pacific State University

МОДУЛЬНАЯ СТРУКТУРА КУРСА «КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ» ДЛЯ МАГИСТРАНТОВ

Аннотация. Рассматривается опыт построения модульной структуры курса «Компьютерные технологии в обучении математике» для магистрантов направления подготовки «Педагогическое образование». Раскрывается роль компьютерных технологий в математическом образовании и их применимость в учебной и профессиональной деятельности педагога. Выделяются компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения модульного курса «Компьютерные технологии в обучении математике». Указаны модули и типовые задания к ним для данного курса. В модульном курсе сделан акцент на бесплатно распространяемые математические пакеты и продукты. Сформулировано заключение о том, что указанные модули можно использовать для развития профессиональных компетенций магистрантов, связанных с использованием современных компьютерных технологий в обучении математике.

Ключевые слова: модульность, профессиональные компетенции, компьютерные технологии, математические пакеты, математические тренажеры, Математический конструктор, Maxima, Scilab, LaTeX.

© N. P. Tabachuk

MODULAR STRUCTURE OF THE COURSE "COMPUTER TECHNOLOGIES IN TRAINING MATHEMATICS" FOR UNDERGRADUATES

Abstract. The article considers the experience of constructing the modular structure of the course "Computer Technologies in Teaching Mathematics" for candidates for a Master's degree in the field of "Pedagogical Education". The role of computer technologies in mathematical education and their applicability in educational and professional activities of the teacher is revealed. The article describes the competences of the learner, formed as a result of mastering the module course "Computer Technologies in Teaching Mathematics", modules and typical tasks of this course. The emphasis in the course module is made on free distributed mathematical packages and products. It has been concluded that these modules contribute to development of the professional competencies of candidates for a Master's degree associated with the use of modern computer technologies in teaching mathematics.

Keywords: modularity; professional competences; computer technologies; mathematical packages; mathematical simulators; mathematical constructor; Maxima; Scilab; LaTeX.

В центре профессиональных интересов назрел вопрос о содержательной составляющей курсов для магистрантов направления подготовки «Педагогическое образование», связанных с современными компьютерными технологиями в математическом образовании.

Один из таких курсов «Компьютерные технологии в обучении математике», который позволяет развивать профессиональные компетенции магистрантов, связанные с использованием современных компьютерных технологий в профессиональной деятельности педагога-математика.

В федеральных государственных образовательных стандартах высшего образования по направлению подготовки 44.04.01 «Педагогическое образование», магистерская программа «Математическое образование» выделяется ряд компетенций, развитие которых возможно в рамках данного курса:

- способность формировать ресурсно-информационные базы для осуществления практической деятельности в различных сферах (ОК-4);
- способность самостоятельно приобретать и использовать, в том числе с помощью информационных технологий, новые знания и умения, непосредственно не связанные со сферой профессиональной деятельности (ОК-5);
- способность проектировать формы и методы контроля качества образования, различные виды контрольно-измерительных материалов, в том числе с использованием информационных технологий и с учетом отечественного и зарубежного опыта (ПК-9) [2].

На этой основе выделим компетенции, формируемые в результате освоения модульного курса «Компьютерные технологии в обучении математике» и представим их в табл. 1.

Таблица 1. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения модульного курса «Компьютерные технологии в обучении математике»

ОК-4: способностью формировать ресурсно-информационные базы для осуществления практической деятельности в различных сферах	
Знать:	
Уровень 1	классификацию компьютерных технологий в обучении математике;

Уровень 2	аппаратные и программные средства реализации компьютерных технологий;
Уровень 3	возможности математических пакетов.
Уметь:	
Уровень 1	сравнивать бесплатные математические пакеты;
Уровень 2	создавать алгоритмы решения задач в математических пакетах для осуществления практической деятельности;
Уровень 3	решать математические задачи с применением математических пакетов.
Владеть:	
Уровень 1	навыками анализа преимуществ и недостатков бесплатных математических пакетов;
Уровень 2	способами проведения математических расчетов в бесплатных программах;
Уровень 3	способами решения математических задач в пакетах.
ОК-5: способностью самостоятельно приобретать и использовать, в том числе с помощью информационных технологий, новые знания и умения, непосредственно не связанные со сферой профессиональной деятельности	
Знать:	
Уровень 1	обзор онлайн сервисов для проведения расчетов;
Уровень 2	программы-тренажеры по математике;
Уровень 3	сервисы для проведения математических расчетов для смартфонов.
Уметь:	
Уровень 1	самостоятельно составлять карту сайтов для проведения математических расчетов;
Уровень 2	осуществлять поиск программ тренажеров и составлять таблицу с адресами сайтов;
Уровень 3	проводить обзор и установку математических программ на смартфон.
Владеть:	
Уровень 1	навыками анализа онлайн сервисов для проведения математических расчетов;
Уровень 2	навыками работы с тренажерами по подготовке к ОГЭ и ЕГЭ;

Уровень 3	навыками проведения математических расчетов с помощью смартфонов.
ПК-9: способностью проектировать формы и методы контроля качества образования, различные виды контрольно- измерительных материалов, в том числе с использованием информационных технологий и с учетом отечественного и зарубежного опыта	
Знать:	
Уровень 1	алгоритмы проведения символьных вычислений, построения графиков функций в математических программах и онлайн сервисах;
Уровень 2	типовые задачи матричной алгебры, дифференцирования и интегрирования функций одной и нескольких переменных, теории вероятностей и комбинаторики, решаемых с помощью математических программ и онлайн сервисов;
Уровень 3	технологии подготовки математических текстов, пакет TEX (LaTeX).
Уметь:	
Уровень 1	проводить символьные вычисления, строить графики функций в математических программах и онлайн сервисах;
Уровень 2	решать типовые задачи матричной алгебры, дифференцирования и интегрирования функций одной и нескольких переменных, теории вероятностей и комбинаторики, решаемых с помощью математических программ и онлайн сервисов;
Уровень 3	подготавливать математические тексты в пакете TEX (LaTeX).
Владеть:	
Уровень 1	навыками построения алгоритмов решения математических задач;
Уровень 2	способами выделения типовых задач, решаемых с помощью математических программ и онлайн ресурсов;
Уровень 3	навыками подготовки математических текстов.

Развитие данного комплекса компетенций возможно при построении модульного курса «Компьютерные технологии в обучении математике» для магистрантов. Модульное построение курса позволяет варьировать объем и содержание курса, обеспечивать гибкость и свободу в выборе учебного контента [1].

Выделим модульную структуру курса «Компьютерные технологии в обучении математике» для магистрантов направления подготовки «Педагогическое образование», магистерская программа «Математическое образование» и представим в табл. 2.

Таблица 2. Модульная структура курса «Компьютерные технологии в обучении математике» для магистрантов

Модуль 1. Компьютерные технологии (определение, виды, общая характеристика)
Компьютерные технологии (определение, виды, общая характеристика)
Написание эссе о роли компьютерных технологий в обучении математике
Модуль 2. Технические и программные средства реализации компьютерных технологий
Аппаратные и программные средства реализации компьютерных технологий
Модуль 3. Бесплатные математические пакеты: Maxima, Scilab
Составление сравнительной характеристики бесплатных математических пакетов
Выделение преимуществ и недостатков бесплатных математических пакетов в виде таблицы
Модуль 4. Программа Математический конструктор: интерфейс и назначение
Решение математических задач в программе <i>Математический конструктор</i> . Составление лабораторной работы с комплексом математических задач на основе программы <i>Математический конструктор</i> в школе. Создание алгоритма решения задач для школьников в данной программе
Изучение интерфейса программы <i>Математический конструктор</i>
Модуль 5. Онлайн сервисы для проведения математических расчетов
Обзор онлайн сервисов для проведения математических расчетов
Составление карты сайтов для проведения математических расчетов
Модуль 6. Программы тренажеры по математике
Поиск в сети Интернет программ тренажеров и составление таблицы с адресами сайтов
Анализ тренажеров по подготовке к ОГЭ и ЕГЭ
Модуль 7. Сервисы для проведения математических расчетов для смартфонов
Обзор сервисов для проведения математических расчетов для смартфонов
Установка одной из математических программ на смартфон и показ умения работать с данной программой

Поиск дополнительных математических программ как приложений для смартфонов
Модуль 8. Символьные вычисления в математических программах и онлайн сервисах
Произведение символьных вычислений в математических программах и онлайн сервисах
Представление типовых задач символьного вычисления, решаемых с помощью математических программ и онлайн сервисов
Модуль 9. Построение графиков функций с помощью математических программ и онлайн сервисов
Построение графиков функций
Представление типовых задач на построение графиков функций, решаемых с помощью математических программ и онлайн сервисов
Модуль 10. Использование компьютерных технологий для решения задач матричной алгебры
Решение задач матричной алгебры
Представление типовых задач матричной алгебры, решаемых с помощью математических программ и онлайн сервисов
Модуль 11. Использование компьютерных технологий для решения задач дифференцирования и интегрирования функций одной и нескольких переменных
Решение задач символьного дифференцирования и интегрирования функций одной и нескольких переменных
Представление типовых задач дифференцирования и интегрирования, решаемых с помощью математических программ и онлайн сервисов
Модуль 12. Использование компьютерных технологий для решения задач теории вероятностей и комбинаторики
Решение задач теории вероятностей и комбинаторики
Представление типовых задач теории вероятностей и комбинаторики, решаемых с помощью математических программ и онлайн сервисов
Модуль 13. Технология подготовки математических текстов. Пакет Tex (LaTex)
Подготовка математических текстов
Подготовка научной статьи с помощью пакета Tex

Таким образом, роль такого модульного курса как «Компьютерные технологии в обучении математике» велика для магистрантов в виду того, что в его рамках можно развивать умения создавать и намечать пути использования компьютерных технологий в обучении математике и в

совместной деятельности отслеживать их применимость в учебной и профессиональной деятельности педагога.

Литература

1. Принципы модульного обучения: метод. разработка для преподавателей/ Сост. О. Г. Проворова; Краснояр. гос. ун-т. – Красноярск, 2006. – 32с.
2. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования по направлению подготовки 44.04.01 «Педагогическое образование» (уровень магистратуры) [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://pnu.edu.ru/media/filer_public/ae/4f/ae4fa055-d1bd-4ffd-9bce-ad855beb15cf/fgos-440401.pdf (дата обращения 26.05.2018).

Табачук Наталья Петровна, кандидат педагогических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Тихоокеанский государственный университет», 680521 Хабаровский край, Хабаровский район, с. Восточное, ул. Клубная 6-12, e-mail: tabachuk@yandex.ru

Tabachuk Natalia Petrovna, Candidate of Pedagogics, Associate professor, Pacific National University

КОМПЬЮТЕРНАЯ ИГРА КАК СРЕДСТВО ОБУЧЕНИЯ ШКОЛЬНЫМ ПРЕДМЕТАМ

Аннотация. В статье рассмотрены вопросы, связанные с компьютерными играми и их обучающим характером. Отмечено, что школьники уделяют большое количество свободного времени на компьютерные игры, что необходимо учитывать в образовательном процессе и искать положительные аспекты их использования. Выделено, что компьютерная игра есть модель конкретной ситуации или симулятор. Указана польза дидактических игр, компьютерных игр, заключающаяся в том, что с их помощью можно развивать умственную активность, интерес, мыслительные процессы, реакцию, скорость мышления, выбор приоритетов. Приведены примеры компьютерных игр в обучении и мотивировании. Определена опасность компьютерных игр - игромания, выделены ее причины. В заключении отмечено, что компьютерная игра в образовательном процессе может выступать как дидактическая игра.

Ключевые слова: дидактическая игра, компьютерная игра, обучение, мотивирование, учебный материал, моделирование, игромания.

© P. V. Tusikov, V. A. Kazinets

COMPUTER GAME AS A TRAINING FACILITY TO SCHOOLED SUBJECTS

Abstract. The questions connected with computer games and their training character are considered in the article. The article notes that schoolchildren give a lot of free time to computer games, which must be taken into account in the educational process and look for positive aspects of their use. The article emphasizes the computer game is a model of a particular situation or a simulator. The use of didactic games, computer games are shown, which is that with their help it is possible to develop mental activity, interest, thought processes, reaction, speed of thinking, choice of priorities. Examples of computer games in teaching and motivation are given. The danger of computer games is defined - gambling, its causes are highlighted. It has been noted that a computer game in the educational process can act as a didactic game.

Keyword: didactic game, computer game, training, motivation, training material, simulation, igromania.

Введение

Одна из основных задач учителя, это в определённый срок обучить ученика надлежащими знаниями. Подобная задача может стать затруднительной, если ученик плохо понимает содержание урока. Для того, чтобы помочь ученику разобраться в предмете, можно провести дополнительное занятие или замотивировать при помощи игр.

1. Польза дидактических игр

Среди различных путей воспитания у школьников интереса к учению одним из наиболее эффективных является организация их игровой деятельности на уроке. Игры педагогические от игр в целом отличаются требованием к результату. Учитель чётко знает, чему игра должна обучить ученика или на какие действия побудить для дальнейшего обучения.[1]

Учебный материал лучше усваивается, если перед его изучением провести дидактическую игру, благодаря которой можно обучить материалу, заложенному в игре.[2] Каждая игра помогает решить какие-то определенные задачи: дать такое-то знание, сформировать такое-то умение, развить такие-то функции мозга (внимание, память, мышление, речь), воспитывать черты личности (сообразительность, находчивость, коллективизм и т.д.).

Дидактическая игра помогает сконцентрировать внимание школьников любого возраста. Вначале появляется интерес только к игре, а впоследствии появляется необходимость в учебном материале, на котором устроена игра и постепенно ученики начинают проявлять интерес к учебному предмету. Как правило, учебный процесс без использования игр проходит с трудом. Выбирая педагогические игры надо помнить, что они подбираются под детей и должны всесторонне развивать психику школьников, их познавательных способностей, речи, опыта общения со сверстниками и взрослыми, прививать интерес к учебным занятиям. Также следует отметить, что они формируют у учащегося навыки и умения учебной деятельности, учат умениям сравнивать, анализировать, обобщать. Таким образом, дидактическая игра является прекрасным средством для развития умственной активности учащихся. В играх легче преодолеваются трудные задачи, и любой учебный материал становится увлекательным, что благоприятно сказывается на обучающем процессе.[3]

2. Польза компьютерных игр

Игры существенно помогают в усвоении школьного материала. Они обучают определённым принципам в познании или прививают интерес к школьному предмету, или же могут помочь учителю проверить уровень

знаний у учеников. Так же могут быть полезными компьютерные игры, в них можно заложить материал, который займёт много времени на организацию.

Компьютерные игры не заменяют обычные игры, а дополняют их, обогащая педагогический процесс новыми возможностями. Конечно, большинство спросит, какую пользу они вообще дают, нежели стоит их использовать для какого либо обучения. Мнения на эту тему разнятся, одни в свою пользу аргументируют отрицательные последствия использования игр, другие очень сильно переоценивают их возможности. Всё же компьютерные игры могут дать знания, умения и навыки. Если игру называем обучающей, то надо выделять два компонента: игровой и обучающий. Если обучающий компонент превышает игровой, то получения знаний из игры будет весьма эффективным, в другом случае игра подойдёт как средство для наглядности и повышения мотивации к обучению[4].

Н.А. Панков отмечает, что с помощью компьютерных игр можно достаточно легко обучить человека [5]. Взяв за основу историю, достаточно смоделировать историческую ситуацию и заставить играющего принимать в нём участие. То же самое можно проделать и в фильме, и в книге, но в игре всё зависит от игрока, есть возможность сделать что-то по своему.

Чтобы помочь в изучении физики, можно создать модель мира, где будут те же законы физики, что и применимы к нам. При помещении участника в эту среду он сможет устраивать эксперименты, тем самым, на примере, изучая наш мир.

Однако Киризелев А. подчёркивает, что самый большой минус компьютерных игр в процессе обучающем, они в состоянии дать большое количество легкоусвояемой информации, но не практические навыки [6]. Просидев много времени за компьютером можно стать очень осведомлённым, но обладать скудным количеством практических навыков.

3. Опасность компьютерных игр

Есть люди, страдающие игровой зависимостью, - игроманией, и они заняты лишь одними играми и не отвлекаются на другие занятия. Для борьбы с этим увлечением люди иногда безуспешно пытаются переключить внимание на что то другое. Однако вся суть в том, что это следствие другой проблемы. Как отмечал М. Литвак[7] причиной игромании служит скучная учёба. В одном случае школьник может проводить много времени вне дома, увлекаясь далеко неблагонадёжным увлечением, в другом случае школьника увлекут игры, если культурное воспитание не позволяет ему делать первое. И избавиться от такой зависимости поможет увлекательная

работа, которая всегда может помочь, даже если снова потянет к компьютеру.

Ещё Кирилзеев А. [6] подчёркивает, что родители в силу невозможности уделять своему ребёнку больше времени могут переложить свою заботу о воспитании на учителей, сверстников и даже на телевизор. Таким образом, ученик может попасть под какую-нибудь зависимость, такую как алкоголизм, наркомания, секта.

Заключение

Компьютерные игры как дидактические, и как те, что придумывают на ходу, обучают играющего, тем вещам, которые заложены в игре. А отрицательное влияние игр происходит, как правило, не из-за самой игры, а из-за чрезмерного времяпровождения за ней.

Литература

1. Селевко Г. К. Игра как метод обучения [Электронный ресурс]: Учат в школе Режим доступа: <http://uchthat-v-skole.ru/uchitel/28-igra-kak-metod-obucheniya> (дата обращения 04.01.2018)

2. Зверикова М. Н. Дидактические игры на уроках математики [Электронный ресурс]: Социальная сеть работников образования «Наша сеть» Режим доступа: <https://nsportal.ru/blog/obshcheobrazovatel'naya-tematika/all/2012/02/07/igry-na-urokakh-matematiki> (дата обращения 04.01.2018)

3. Заходяева Л. А. Роль дидактической игры на уроках в начальной школе [Электронный ресурс]: Социальная сеть работников образования «Наша сеть» Режим доступа: <https://nsportal.ru/nachalnaya-shkola/obshchepedagogicheskie-tekhnologii/2015/10/25/rol-didakticheskoy-igry-na-urokah-v> (дата обращения 05.01.2018)

4. Жумаев М. Э. Журнал Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук N 3 за Июнь 2016 года [Электронный ресурс]: Журнал Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук Режим доступа: <http://publikacia.net/archive/2016/6/3/12> (дата обращения 08.01.2018)

5. Панков Н. А. Компьютерные игры как средство обучения [Электронный ресурс]: Ярославский Градостроительный колледж, Россия Режим доступа: <http://nit.miem.edu.ru/sbornik/2009/sec4/026.html> (дата обращения 17.01.2018)

6. Кирилзеев А. Игровая зависимость [Электронный ресурс]: Компьютерные игры как искусство Режим доступа: http://gamesisart.ru/igrovaya_zavisimost.html (дата обращения 14.01.2018)

7. Михаил Литвак. 5 методов воспитания детей, 2015 г. – 233 с.

Гусиков Павел Вадимович, магистрант педагогического института, Тихоокеанский государственный университет, 680035, г. Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136, e-mail: pasha_dv@mail.ru

Казинец В. А., кандидат физико-математических наук, доцент, зав. кафедрой математики и информационных технологий, Тихоокеанский государственный университет, 680035, г. Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136

Tusikov Pavel Vladimirovich, master's school student of Pedagogical Institute, Pacific State University

Kazinets Victor Alekseevich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Pacific State University

ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННАЯ ИГРА КАК СРЕДСТВО СТИМУЛИРОВАНИЯ СУБЪЕКТНОСТИ СТУДЕНТОВ, ОСВАИВАЮЩИХ МАТЕМАТИКУ

Аннотация. В работе указывается на необходимость системного обновления образовательной деятельности в сфере математического образования. Такое обновление должно быть ориентировано на переход обучающихся из состояния объектов обучения математике в состояние субъектов. Получение этого результата обеспечивается комплексной методикой, содержащей три компонента: 1) решение задач прикладного характера; 2) применение информационных компьютерных технологий; 3) модернизация характера деятельности учащихся. Характеризуется возможность использования практико-ориентированных компьютерных игр в качестве средства, стимулирующего мотивацию студентов при изучении математики. В качестве примера дано описание компьютерной игры, использованной авторами при преподавании дисциплины «Методы оптимизации». Проведенный эксперимент подтвердил результативность применения игры такого рода при освоении математики. Решение задачи «из жизни», с использованием современных информационных технологий, позволяет, используя тягу современной молодежи к всевозможным гаджетам, сделать такую задачу действенным образовательным средством.

Ключевые слова: математическое образование, мотивация образовательной деятельности, практико-ориентированная игра, субъектность учащихся, стимулирование субъектности, обновление образовательной деятельности, компьютерные технологии.

© *B. E. Fishman, N. V. Eyrikh*

PRACTICALLY-ORIENTED GAME AS A MEANS STIMULATING OF SUBJECTIVITY OF STUDENTS STUDYING MATHEMATICS

Abstract. The work points out the need for a systematic update of educational activities in the field of mathematical education. Such an update should focus on the transition of students from the state of the objects of learning to mathematics to the status of active personalities. The obtaining of this result is provided by a complex methodology containing three components: 1) solving applied problems; 2) application of information computer technologies; 3) modernization of the nature of the activities of students. The possibility of using practice-oriented computer games as a tool that stimulates students'

motivation in the study of mathematics is characterized. As an example, a description of the computer game used by the authors in teaching the discipline "Optimization methods" is given. The experiment carried out confirmed the effectiveness of the application of a game of this kind in mastering mathematics. The solution of the task "from life", supported by modern information technologies, allows, using the thrust of modern youth to all kinds of gadgets, to make such a task an effective educational tool.

Keywords: mathematical education, motivation of educational activity, practically-oriented game, stimulation of students, promotion of subjectivity, renovation of educational activity, computer technologies.

Введение

Согласно «Концепции развития математического образования в Российской Федерации», к основным проблемам, тормозящим развитие математического образования, на современном этапе относится низкая учебная мотивация. При этом слабый интерес школьников и студентов к освоению математики, в значительной мере, предопределяется «формальным и оторванным от жизни» содержанием математического образования [3].

По нашему мнению, сегодня наиболее важным является насыщение содержания любого математического курса задачами «из жизни». В идеале каждая новая тема курса должна предваряться задачей такого рода. Осмысливая подобную задачу, пытаясь ее решить, испытывая горечь неудач и радость достижений, учащиеся незаметно для себя формируют интерес к занятию математикой и становятся субъектами ее освоения.

Вместе с тем, систематическое использование межпредметных связей и практико-ориентированных задач давно известно как фактор повышения эффективности изучения математики [1]. Однако отчуждение от математики, слишком часто наблюдаемое в педагогической действительности, показывает, что сам по себе этот фактор не способен кардинально изменить положение дел. Необходимо системное обновление образовательной деятельности, ориентированное на переход обучающихся из состояния объектов обучения математике в состояние субъектов, активно и осмысленно осваивающих математику.

1. Основы методики

Опишем методику искомого системного обновления образовательной деятельности в предположении, что задачи «из жизни» вызвали интерес, опредмеченный рассматриваемой реальной жизненной ситуацией. При оптимальной педагогической организации деятельности учащихся такой интерес со временем может усиливаться. А необходимые методы – вся

математическая «техника образуется в процессе этой работы, как это происходило исторически: не в изоляции от решения задач, но в органическом соединении с этим процессом» [4, с. 15].

Решение задач прикладного характера, на наш взгляд, является только «первым китом» результативного развития математического образования (при этом нумерация «китов» связана только с удобством изложения, а не с важностью). Первым, но не единственным!

Решение практико-ориентированных задач формирует положительное отношение учащихся к математике, побуждает их инициативно участвовать в продуктивной познавательной деятельности, активно осваивать содержание математического образования. Тем самым молодые люди делают решающий шаг в переходе из состояния объектов, обучаемых педагогами математике, в состояние субъектов, самостоятельно осваивающих математику. А какова при этом деятельность педагога? Теперь он уже не обучает, а помогает, поддерживает, сопровождает [2].

«Вторым китом» повышения мотивации к изучению математики может стать применение информационных компьютерных технологий. Стремление освоить виртуальный мир, познать и использовать его возможности присуще современным молодым людям. Исследование фактической деятельности детей и подростков в возрасте от 5 до 16 лет показало, что сегодня они проводят перед экранами гаджетов в среднем порядка шести с половиной часов ежедневно [7].

Для математического образования настало время не противодействовать естественной тяге к мобильным телефонам, портативным консолям, компьютерам или планшетами, а использовать эту потребность, преобразуя ее в действенное средство дидактики XXI века.

«Третьим китом» результативного развития математического образования может служить новый характер деятельности учащихся. На смену изучению готовых математических знаний, свойственному традиционной учебной деятельности, должен прийти «творческий и полезный процесс изобретения и открытия» их самими учащимися [4, с. 6]. Именно такая модернизация деятельности учащихся способна стать фактором, побуждающим их к продуктивной познавательной деятельности, к активному осмыслению и присвоению содержания и методов математики.

2. Реализация методики

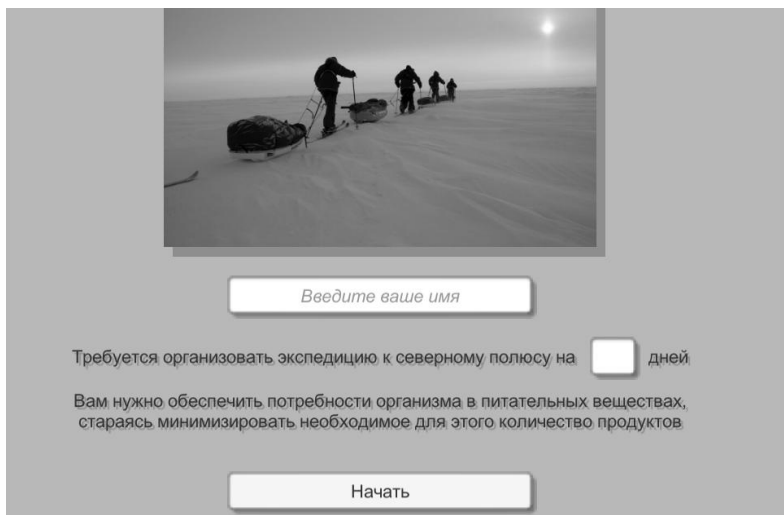
Представим возможную реализацию этих «трех китов» на примере университетского курса «Методы оптимизации». В данном курсе изучаются математические методы решения задач нахождения наилучших вариантов

из всех возможных (так называемые задачи математического программирования).

Каждая тема курса начинается с задачи из реальной жизни. Например, теме «Линейное программирование» предшествует задача определения оптимального набора продуктов для экспедиции на Северный Полюс». Тема «Транспортная задача» начинается с построения оптимального плана перевозки лесоматериалов, имеющегося на складах четырех компаний, функционирующих на российском Дальнем Востоке, в три сопредельные страны. Тема «Нелинейное программирование» естественно «возникает» из задачи оптимизации работы с ценными бумагами (формирование портфеля ценных бумаг) и т.д.

Используются разнообразные формы предъявления указанных задач. В частности, перед знакомством с методом поиска экстремума линейной функции при наличии ограничений типа линейных неравенств студентам предлагается компьютерная игра.

Сюжет этой игры, имитирующей классическую задачу линейного программирования, прост. Организуется экспедиция к Северному Полюсу. Для нее требуется взять минимальное (по весу) количество продуктов P_1 , P_2 , P_3 и P_4 , обеспечив при этом суточную потребность организма в питательных веществах (белках, жирах и углеводах). Количество дней, необходимое для такой экспедиции, студенты могут выбрать сами (см. рис.1).



The image shows a screenshot of a computer game interface. At the top, there is a black and white photograph of an expedition team in a snowy, flat landscape, pulling sleds. Below the photo is a text input field with the placeholder text "Введите ваше имя". Underneath that is a text prompt: "Требуется организовать экспедицию к северному полюсу на дней". Below the prompt is a paragraph of text: "Вам нужно обеспечить потребности организма в питательных веществах, стараясь минимизировать необходимое для этого количество продуктов". At the bottom of the interface is a button labeled "Начать".

Рисунок 1. – Начало игры

На экране компьютера содержание каждого из питательных веществ в 1 кг каждого из продуктов изображается в виде цветных кубиков: белкам соответствуют кубики зелёного цвета, жирам – жёлтого, углеводам – синего. Суточная потребность организма в питательных веществах представлена в виде башни из бесцветных кубиков (см. рис.2).



Рисунок 2. – Суточная потребность организма в белках, жирах и углеводах и их содержание в 1 кг каждого из четырех продуктов

Студент, нажимая на какой-либо цветной кубик в продукте, «забирает» его (этот кубик в продукте обесцвечивается). Одновременно при этом окрашивается соответствующий кубик, представляющий потребности организма (см. рис.3).



Рисунок 3. – Ход игры: обеспечение 1-го дня экспедиции необходимым набором питательных веществ

Игра завершается, как только будет обеспечена потребность организма в питательных веществах на все дни экспедиции. Количество использованных килограммов каждого из продуктов выводится на экран (см. рис. 4).

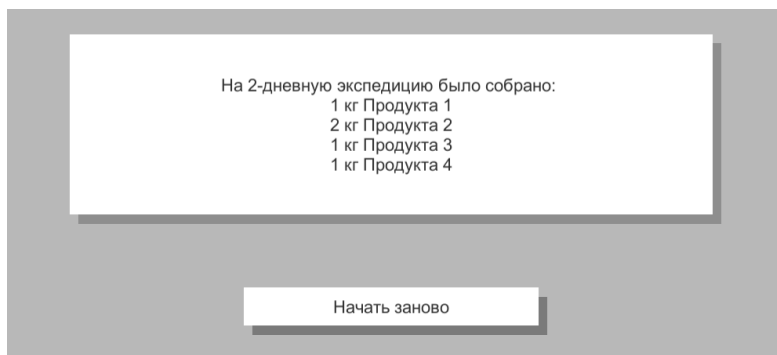


Рисунок 4. – Результат игры

Сформировав свой рацион, каждый студент сравнивает его с результатами, полученными другими. Наилучшее решение представляется наиболее легким запасом продуктов.

Преподаватель провоцирует дальнейшие рассуждения, задавая вопросы:

- Как узнать действительно ли найденное решение – самое лучшее?
- Нет ли другого решения, более оптимального, которое пока не известно?
- Как найти оптимальное решение?

Естественным итогом поиска ответов на вопросы и попутных обсуждений становится переход к математической модели задачи. При этом вводятся символы x_1 , x_2 , x_3 и x_4 , которые обозначают неизвестные оптимальные количества продуктов P_1 , P_2 , P_3 и P_4 соответственно. Определяются условия того, что будет обеспечена суточная потребность организма в каждом питательном веществе. И, наконец, записывается требование оптимальности: суммарное количество продуктов P_1 , P_2 , P_3 и P_4 должно быть минимальным (по весу).

Вследствие указанной деятельности формируется готовность студентов перейти к общей теории задач линейного программирования и к осмысленному освоению основного метода их решения – симплекс-метода.

3. Результаты

Экспериментальная апробация представленной методики проходила в Приамурском государственном университете имени Шолом-Алейхема в осеннем семестре 2017-2018 учебного года.

Отметим, что курс «Методы оптимизации» входит в учебный план 2-го курса по направлениям подготовки «Информационные системы и

технологии» (далее «ИСиТ») и «Прикладная информатика» (далее «ПИ»). Это позволило выделить две группы – экспериментальную («ИСиТ») и контрольную («ПИ»). На занятиях в группе «ИСиТ» была реализована представленная методика, а в группе «ПИ» занятия велись по традиционной методике. Обе группы сначала были сопоставимы по основным характеристикам мотивации к образовательной деятельности. Для постановки простейшего эксперимента мы использовали описанную компьютерную игру.

Уже с самого начала занятий применение описанной компьютерной игры позволило значительно активизировать учебную активность студентов. Они с интересом перешли от игры к изучению алгоритма симплексного метода, правил заполнения симплексной таблицы и поиску оптимального плана.

Подтверждением этого служат выполненная студентами самостоятельная работа. В качестве домашнего задания студентам обеих групп было предложено придумать и описать другие прикладные задачи на нахождение оптимального решения. Студентами направления подготовки «ИСиТ» в среднем было предложено от двух до четырех задач (в среднем – 2,9 задачи на одного студента). В то же время студенты в группе «ПИ» описали лишь по одной – две задачи (в среднем – 1,4 задачи на одного студента). При этом первая группа проявила не только большую самостоятельность, но и креативность. Их задачи были разнообразнее по отраслям применения, по типу и количеству наложенных ограничений, по числу неизвестных.

Заключение

Таким образом, получено подтверждение известного закона Йеркса-Додсона, в соответствии с которым эффективность учебной деятельности находится в прямой зависимости от силы мотивации [5]. Вместе с тем, заметим – преподаватель должен сознавать, что у этого закона существуют ограничения. Важно знать пределы его справедливости и не нарушать их. Ведь «по мере увеличения интенсивности мотивации качество деятельности изменяется по колоколообразной кривой: сначала повышается, затем, после перехода через точку наиболее высоких показателей успешности, постепенно снижается» [6].

Литература

1. Гнеденко, Б.В. Формирование мировоззрения учащихся в процессе обучения математике / Б.В. Гнеденко. – М.: Просвещение, 1982. – 144 с.
2. Ковалева Т.М., Кобыща Е.И., Попова (Смолик) С.Ю., Теров А.А., Чередилина М.Ю. Профессия тьютор. – М. – Тверь: СФК-офис, 2012. – 246 с.

3. Концепция развития математического образования в Российской Федерации (утверждена распоряжением Правительства Российской Федерации от 24 декабря 2013 г. № 2506-р). URL: <http://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/70452506/> (дата обращения 24.05.2018).

4. Локхард П. Плач математика. URL: https://royallib.com/book/Lokhard_pol/plach_matematika_esse_o_prepodavanii_matematiki_v_shkole.html (дата обращения 26.05.2018).

5. Оптимум мотивации // Экспериментальная психология / под ред. П. Фресса и Ж. Пиаже. – Москва: Прогресс, 1975. – Вып.5. – С.119-125. URL: <http://flogiston.ru/library/piazhe1> (дата обращения 25.05.2018).

6. Психологос: энциклопедия практической психологии. URL: <https://www.psychologos.ru/articles/view/zakon-yerksa-dodsona> (дата обращения 25.05.2018).

7. Report: Minimum 6 Hours Of Screen Time For Children Daily. URL: <http://www.ubergizmo.com/2015/03/report-minimum-6-hours-of-screen-time-for-children-daily/> (дата обращения 26.05.2018).

Фишман Борис Ентильевич, кандидат физико-математических наук, доктор педагогических наук, профессор, заведующий центром исследований и инноваций, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Приамурский государственный университет имени Шолом-Алейхема», 679015, ЕАО, г. Биробиджан, ул. Широкая, 70-а, тел.: +7 (42622) 46611, e-mail: bef942@mail.ru

Эйрих Надежда Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент, декан факультета математики, информационных технологий и техники, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Приамурский государственный университет имени Шолом-Алейхема», 679015, ЕАО, г. Биробиджан, ул. Широкая, 70-а, тел.: +7 (42622) 46611, e-mail: nadya_eyrikh@mail.ru

Fishman Boris Entilievich, Candidate of Physics and Mathematics, Doctor of Pedagogics, Professor, Sholom-Aleichem Priamursky State University

Eyrikh Nadezhda Vladimirovna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Sholom-Aleichem Priamursky State University

СТРАТЕГИЯ ШКОЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ В КОНТЕКСТЕ ЭВОЛЮЦИИ ОБЩЕСТВА

Аннотация. В своей статье автор делится своими представлениями о стратегии школьного образования отвечающей запросам времени. В свете новых тенденций в мировом педагогическом опыте несомненный интерес представляет практика американских школ. В своем анализе автор опирается на общую логику эволюционных процессов и рассматривает проблему эволюционного кризиса в двух аспектах: 1) соотношении принципов организации общества и его техно-экономического прогресса, 2) соотношении индивидуального сознания и техно-экономического прогресса. В обоих вопросах автор выделяет принципиальное значение критического мышления для успешной эволюции общества - для осознания индивидом своего участия в сложной системе взаимодействий, реализации свободы в принятии решений и заинтересованности в поддержании порядка в общественной системе. Так же, критическое мышление принципиально важно в век роботизации и искусственного интеллекта, которые ставят новые проблемы не только в вопросах трудовой занятости людей, но и в большей мере становятся испытанием для самого сохранения свободного общества. Автор приводит свидетельства ориентации американских школ на развитие критического мышления.

Ключевые слова: образование, стратегия, сознание, эволюция, общество, прогресс, свобода, критическое мышление.

© М. Y. Fortmann-Zhelaeva

STRATEGY FOR SCHOOL EDUCATION IN THE CONTEXT OF SOCIAL EVOLUTION

Abstract. The author shares her thoughts on an educational strategy that could be proper to the contemporary social situation in Russia. Among the new tendencies in the pedagogical approaches in the world, the practice of American schools is interesting to observe. The author bases her arguments on the general logic of evolutionary processes and brings up critical thinking as a key condition for the successful evolution of the society.

Keywords: education, strategy, consciousness, evolution, society, progress, freedom, critical thinking

Нас как родителей чрезвычайно волнует вопрос о том, в каком мире будут жить наши дети. Мы наблюдаем крайне тревожные тенденции - это и неспособность разрешения цивилизационных конфликтов, это и духовная опустошенность в культуре потребления и гедонизма, это и пренебрежение угрозой экологической катастрофы за преследованием экономических интересов. Суть любого социального кризиса – это дисбаланс между уровнями сознания общества и техническим прогрессом. Природа кризиса представляется наиболее ясно, если исходить из логики эволюционных процессов. Мы рассмотрим два аспекта в проблеме сознания и прогресса. Первый - касается несоответствия централизованного управления в российском обществе его экономическому и технологическому прогрессу, объективной необходимости эмансипации общества от ручного управления и перехода к системе, упорядоченной по принципу единения на основе осознанного принятия прав и обязанностей. Мы раскроем роль критического мышления в формировании гражданского сознания. Через второй аспект мы раскроем необходимость воспитания ценностей свободы и критического мышления в целях гуманизации общества, преодоления отчужденности в век замещения человека на производстве роботами и искусственным интеллектом. Исследование этих аспектов поможет нам ответить на вопрос: Какое сознание может успешно преодолевать кризисные испытания и как это сознание воспитать?

Чтобы обозначить стратегию образования, необходимо разобраться в природе кризиса.

1. Для обсуждения первого аспекта предлагаем обратить внимание на один из законов эволюции сформулированный как *закон иерархических компенсаций*. Для иллюстрации этого закона воспользуемся примером системы дорожного движения.

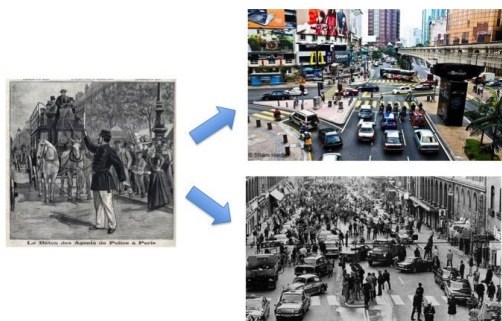


Рисунок 1

На рисунке 1 представлена ситуация, когда в результате развития старая система организации на улицах приходит в противоречие с неизмеримо возросшим разнообразием и количеством участников движения. Регулировщик в центре не в состоянии управлять ситуацией и из организатора порядка превращается в сдерживающий движение фактор.

Ситуация приводит к необходимости перехода системы на новый уровень организации. Система может либо эволюционировать на более сложный уровень, либо впасть в хаос. Это есть точка развилки, бифуркации. Закон эволюции гласит, что *система может успешно перейти на более сложный уровень, если рост многообразия на ее нижнем уровне организации компенсируется упрощением на ее верхнем уровне*, т.е. разнообразие упорядочивается единением всех элементов по какому-то единому для всех стандарту. Действие этого закона очень легко понять, если привести простые примеры: огромное разнообразие компьютерных программ работает в определенной операционной системе, иначе их взаимодействие невозможно. Здесь компьютерные программы составляют нижний уровень системы, а ОС – высший. Другие простые примеры упорядоченного разнообразия: всевозможные электроприборы и стандартное напряжение в сети, разнообразие товаров и единый товарный эквивалент - деньги, слова в языке и грамматика и т. д. Без такого единения по определенному принципу невозможно взаимодействие огромного разнообразия элементов в системе.

В эволюции общества единение происходит в системе ценностей, которая выражается в этических нормах, законах, в так называемом здравом смысле, в Конституции. Чем сложнее общественная динамика, тем выше необходимость единения под общими представлениями об ответственности, что представляет собой гражданское сознание.

Предпосылки для развития гражданского сознания в российском обществе сильно отличаются в сравнении со странами, где частная собственность и принципы самоуправления гораздо более способствовали формированию гражданственности. Запрос российского общества на «твердую руку» говорит об ориентированности общества на систему ценностей, которая поддерживает порядок по принципу централизованного управления, т.е. патриархальность, традиционность, патернализм, конформизм. Мы имеем ситуацию, в которой большинство людей охотнее поддерживает централизованное управление как «единственно-гарантирующее» порядок в обществе. С другой стороны, нас не обошел техно-экономический прогресс, который привнес рост разнообразия во всех сферах деятельности и который требует высокую адаптивность в турбулентном экономическом пространстве. И здесь встает проблема несоответствия техно-экономического прогресса и общественного сознания, которое сохраняет централизованное управление по сути инерционное и неадаптивное.

Поэтому, когда мы говорим о детях, о новой стратегии образования, нужно думать с опережением времени – в контексте эволюционного процесса.

Школа - это институт передачи знаний и опыта общества новому поколению, а также подготовки к жизни в обществе. Как подготовить так, чтобы сознание соответствовало требованию эволюции?

Мы выяснили, что для успешного развития обществу необходима свобода в принятии решений и единение по принципу осознания себя в системе взаимодействия. Как сформировать такое сознание?

Во все более усложняющемся, несравнимо более неоднозначном и динамичном, информационно противоречивом мире, человек должен критически мыслить, чтобы не утратить связи с реальностью и адекватно рефлексировать, быть способным независимо принимать решения и достигать своей личностной реализации. Развитие критического мышления становится более актуальной задачей школы. Сам процесс приобретения знания должен развивать критическое мышление. Эта задача намного сложнее, чем простая передача знаний.

Многие прогрессивные профессионалы в области образования активно откликнулись на призыв разработки стратегии образования. Необходимость развития критического мышления звучит часто, и это единодушие очень обнадеживает. Есть множество примеров новых подходов к обучению, которые стараются заменить формальное заучивание фактов критическим осмыслением. Например, популярным в мире стал сингапурский метод обучения математике в младших классах, где законы алгебры демонстрируются очень наглядно, от конкретного к абстрактному, где важна глубина понимания концепций, а не количество информации, где ученики постоянно взаимодействуют друг с другом в решении задач и тем самым развивают навыки аргументации и учатся оперировать языком математики, где преследуется понимание структуры решения задачи, а не решение по алгоритму. Трансформация преподавания математики в американской школе происходит на наших глазах. Неудовлетворение вызывали уроки математики в школе старшего сына – узость подхода к задаче и простое следование алгоритму решения, домашнее задание из длинного списка однотипных задач доводящих процесс решения до автоматизма. Младшие же дети обучались уже по сингапурскому методу. В программах школ и на родительских собраниях учителя подчеркивают свою задачу как формирование навыков самостоятельного мышления.

Мы наблюдаем, что креативные педагоги обращаются к функциональному образованию как одному из эффективных подходов к развитию критического мышления. Обучение начинается с распознавания проблемы и постановки вопроса, а хороший вопрос – это уже половина дела. Прекрасный пример функционального обучения демонстрирует движение First Lego League. Это соревнования в робототехнике команд школьников 9-14 лет, организованные впервые в США в 1998 году и получившее широкое распространение в мире. Основателем этого движения является Дин Кеймен, знаменитый изобретатель, почетный доктор наук множества престижных университетов. First Lego League это внеклассная деятельность суть которой уже далеко выходит за пределы простого ознакомления с робототехникой. Сейчас уже практически в каждой американской школе есть команды First Lego League, наставниками которых являются, как правило, родители-энтузиасты с техническим образованием. Каждый год перед командами всех школ ставится определенная проблема. Например, в один год это была проблема отходов. Команды должны были прийти со своим предложением решения проблемы и разработкой робота, который должен быть способен выполнить определенные задачи. Несколько недель дети занимались изучением проблемы со всех сторон – социальной, технологической, экологической, культурной. Дети собирали статистические данные, анализировали их, встречались с представителями власти, брали интервью у соседей, посещали предприятия по переработке мусора – их исследовательская программа зависела от того, что они находили важным для наилучшего понимания проблемы и ее решения. В First Lego League дети соприкасаются с реальным положением дел, законодательством, а главное, получают ощущение, что они часть большого мира, и что они могут что-то изменить. Создание робота подключает знания физики, математики, программирования. Все свои изыскания они предлагают вниманию жюри и соперников на региональных соревнованиях в виде презентаций и сценок, которые они сочиняют сами. Это домашние заготовки. На соревнованиях их ждут еще и неожиданные испытания, которые они должны пройти без своих наставников, и это действительно выявит насколько преуспели дети как команда. Победители проходят на национальный уровень, далее – на международный. Дети в командах собираются с самыми разными наклонностями – все складывается в общую копилку умений и навыков, все важно для общего успеха. Мы непосредственно наблюдали работу нескольких таких команд. На соревнованиях жюри оценивает в первую очередь командный дух, этику, креативность. Это потрясающее по своему потенциалу начинание. First Lego League держится чисто на волонтерском

энтузиазме. Это и прекрасно – оно свободно от методических предписаний и руководств. Наставники, как правило, имеют хорошее представление об идее движения – воспитание общественно-активных креативных лидеров, а методы и тактики – это выбор команд и наставников.

Перспективность функционального обучения в том, что когда дети работают над конкретной проблемой, теории уже не кажутся отвлеченными - их ум «настроен» на принятие информации. Решение конкретных задач стимулирует любознательность детей и помогает пониманию взаимосвязи в мире, в котором им жить.

По такому же принципу функционального обучения перестраиваются финские школы. Если посмотреть на обучение с точки зрения первичности постановки вопроса о проблеме-феномене-явлении-тенденции, становится понятной идея отказа от разделения предметов. Проблема изучается во всех аспектах сразу. Такой подход к обучению ставит ребенка в центр – он активный исследователь, он ощущает себя в системе взаимосвязей. Не так ли чувствует себя человек с гражданской позицией, с развитым осознанием прав и обязанностей?

2. Серьезной представляется и другое проявление дисбаланса прогресса и сознания. Эта проблема может быть иллюстрирована как на рис.2:



Рисунок 2

Автоматизация и роботизация ставит людей перед необходимостью соперничать с искусственным интеллектом. Искусственный интеллект - это алгоритм, который

работает в рамках одной парадигмы. Человеческий свободный разум отличается как раз тем, что он способен выходить за рамки парадигм. Так, Лобачевский вышел из парадигмы Евклидовой геометрии, Эйнштейн – из Ньютонической механики, Коперник – из представлений Птолемея, да любой революционный прорыв в науке – это выход из парадигмы.

Свобода разума – мышление вне парадигм. Дорости до такой свободы значит заведомо быть выше искусственного интеллекта.

Свобода в такой же мере относится к этическим системам. Если мир и улучшается в смысле морали, то его улучшение происходит в эволюции свободы. Мой сын в восьмом классе должен был написать сочинение на тему эволюции понимания свободы Нельсоном Манделой на основе книги о его жизни. В этой книге прекрасно прослеживалось, как Мандела начал свою борьбу с желанием добиться свободы для себя и своих близких, дальше - для всех угнетенных, после многих лет заключения он уже хочет свободы и для своих тюремщиков. Прекрасная иллюстрация эволюции свободы. Третья степень свободы – понимание несвободы людей, запертых в своей маленькой парадигме. Это понимание свободы отшлифовано философией двадцатого века из анализа горького опыта человечества впавшего в абсолютизм идей. Единственное противодействие абсолютизму – это свобода разума, критическое мышление.

Замещение человека на производстве искусственным интеллектом есть процесс, от которого вряд ли человечество откажется. Человеку остается высокотворческая трудовая сфера. Высокая планка конкурентоспособности грозит проблемой массовой безработицы. Большой вопрос – что станет с массой освободившихся от труда людей. Гарантированный доход – является ли это решением проблемы? Воспользуется ли освободившийся от необходимости работать человек возможностью для реализации своего творческого потенциала или беззаботность приведет к бесцельному существованию, лени мысли, затуханию интеллекта, деградации критического мышления, т.е. лишение человека той самой свободы разума, без которой он легко становится объектом манипуляций, жертвой идеологий. Тогда общество ждет что-то близкое описанному в книге «451 градус по Фаренгейту» Рэя Брэдбери: за своей тотальной инфантильностью, оторванностью от реальности, жители города даже не заметили как война, которую вели их политики, накрыла их дом.

Где же ответ на все тот же вопрос – что делать?

Александр Пушкин в сказке о золотой рыбке нёс нам намек: какое бы могущество не было нам даровано, без нашего морального роста это могущество становится роком. Получив в руки всю силу власти, темная, без капли фантазии и толики творчества, старуха потеряла все, не сумев обратить его во благо. Так же с техническим прогрессом – без морального роста, без занятости мысли, он станет концом свободного человека. Человек окажется у разбитого корыта, утратив волю к критическому мышлению и, тем самым, уступив место абсолютизму и тоталитаризму.

Как развить в человеке волю к личной свободе, к творчеству?

Мы видим, что передовые школы ориентируются на подготовку детей к автоматизированному будущему. Отдавая отчет тому, что алгоритмизируемая работа достаточно быстро уходит от человека, делают акцент на формировании навыков работы с информацией, анализ данных, готовность самообучаться, поощрение нестандартного мышления, творчества.

Опять же, если только понимать необходимость критического мышления, его принципиальную роль в эволюционном развитии, становится понятным на какие методы из большого мирового опыта стоит обратить внимание.

Из личного опыта складывается впечатление, что преподавание математики в российских школах успешно развивает аналитический ум. Возможно, это объясняет высокий показатель по изобретениям, которые, к сожалению, не доходят до инноваций по все той же причине негибкой, инертной системы централизованного управления.

Если преподавание математики в наших школах действительно развивает аналитический ум, этого не скажешь про общественные дисциплины. Наша школа идеологизирована – здесь внушается одна парадигма, одно представление о справедливости, одна система взглядов. Конформизм понимается как гражданственность и патриотизм, а критический взгляд пресекается по принципу «кто не с нами, тот против нас».

В американских школах (простите за апеллирование только к американской школе - есть непосредственный личный опыт) на уроках обществоведения широко обсуждаются различные точки зрения, представления о справедливости противоборствующих сторон, политические платформы, исторические ситуации, анализ позиций политических оппонентов, их аргументов и логики рассуждений. Скрупулезно изучается Конституция, права человека. Без успешной сдачи экзамена по Конституции и государственному устройству нельзя пройти в старшую школу. Дети учатся самостоятельно выбирать свою позицию и аргументировать по самым разным вопросам. В результате, поражает гражданская активная и осознанная позиция молодых людей и, главное, - открытость к оппонентам. Это сложно: требуются учителя, которые сами являются людьми открытыми и свободными.

Мы наблюдаем, что в демократическом мире принцип Diversity and Inclusion (разнообразие и включение, вовлеченность) становится этическим принципом во многих корпорациях и компаниях. Многие ведущие корпорации вводят в культуру своих организаций принцип

Diversity and Inclusion как философию успеха. Этот принцип есть проявление того закона эволюции, о котором мы говорили выше – единение растущего разнообразия. Единение по принципу уважения мнения, открытости к идеям, которые могут прийти из самых неожиданных источников, и чем больше этих источников и чем разнообразнее они, тем больше шансов на креативное, неожиданное, оригинальное решение. Diversity and Inclusion (открытость к множеству мнений, идей) открывает возможность для обратной связи (feedback), что делает корпорации очень чуткими к изменениям на рынке и в технологиях, а значит, более конкурентоспособными. Децентрализация доказывает свое превосходство над архаичным вертикальным управлением. Открытость – это проявление высокой степени свободы.

Мы должны наступить на свои привычки к единообразию, попробовать превзойти конформизм приобретенный нами в условиях наших реалий.

За тысячелетия величайшая мудрость человечества уже все это сформулировала. Социальные сети полны цитатами и из Сократа, и настоящих Далай Ламы и Папы, и Канта, и Ницше, мудрости разных народов и их религий. Все мы понимаем, что открытость, т.е. понимание того, что парадигма – это лишь одна версия реальности, и есть условие для продвижения человечества вперед. Дайте установку ребенку, что ни у какой теории, системы знаний, точки зрения нет абсолютной истинности, оставьте открытыми вопросы, позвольте усомниться, спорить, ошибаться, но критически мыслить. Не навешивайте ярлыков кто прав, кто виноват. Пусть дети поймут, что понимание сократовского «все что я знаю – это то, что я ничего не знаю» есть демаркация свободного человека от несвободного. Вспомните известную притчу дзен о полной чашке чая – так же как нельзя долить чая в полную чашку, так же категорически мыслящий человек невосприимчив к новому, не способен к взаимодействию.

Итак, в разработке стратегии школы надо исходить из ситуации, в которой находится общество, из логики эволюционных процессов и понимания реальных возможностей в данной ситуации.

Успех эволюции общества в единении, которое в высоком своем проявлении есть открытость – открытость к идеям, взглядам, разнообразию. Такое сознание формируется с осознанием себя в системе взаимосвязей и кристаллизуется критическим мышлением. Приведенные здесь в пример First Lego League, сингапурская математика, стратегия успеха Diversity and Inclusion, показывают в

каких формах стремление к единению проявляется в обществе и как критическое мышление ставится во главу этого процесса.

Здесь была изложена точка зрения, что критически мыслящий человек, т.е. человек вопрошающий, сомневающийся, ищущий, *сознающий* себя частью общего с последующим отсюда *осознанным выбором принятия прав и обязанностей* способен на свободное единение. Воспитание такого человека – задача школы. Это не идеологическая установка, не менторство, это практика критического мышления в каждом акте обучения.

Эволюционные преобразования начинаются на уровне индивидов, только вслед за изменившимся сознанием система перестраивается. От того насколько человек сумеет обрести свободу, зависит какой путь из развилки выпадет на его долю.

Литература

1. *Nazaretyan, A.* Aggression, Morals, and the Crisis in the Development of the World Culture – 1996.
2. *Popper, K.* The Open Society and Its Enemies - 1966
1. *Axelrod, R.* The Evolution of Cooperation. - Basic Books 1984
2. *Ashby W.R.* Introduction to Cybernetics – Moscow, 1959
3. *Kauffman, S.A.* At Home in the Universe: The Search for the Laws of Selforganization and Complexity - New York. Oxford University Press, 1995
4. *Popper, K.* The Logic of Scientific Discovery - London & New York. 1991
5. *Kuhn, T. S.* The Structure of Scientific Revolutions. Chicago - University of Chicago Press, 1962
6. *Henry, J., Coleman Jr.* What Enables Self-Organization in Businesses. - In Emergence, 1999
7. *Boudon, R.* Theories of Social Change - 1986
8. *Boudon, R.* The origin of values - 2001
9. *Sorokin, P.* Social and Cultural Dynamics - 1992
10. *Sorokin, P.* Man, Civilization, Society – 1992

Фортманн-Желаева Марина Юрьевна, Ph.D., Мичиганский Университет, East Quad, 701 E. University, Ann Arbor, MI 48109-1245, email: zhelaeva@gmail.com

Fortmann-Zhelaeva Marina, Ph.D., University of Michigan

ЭЛЕКТИВНЫЙ КУРС: «РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «МНОГОЧЛЕНЫ» С ПОМОЩЬЮ MAPLE»

Аннотация. Статья рассматривает некоторые сведения о многочленах: о роли многочленов в школе, в алгебраической геометрии и других разделах математики. Также говорится о том, что в современной образовательной системе необходимым становится использование инновационных методов, а именно применение, например, пакета математических программ Maple. После этого приводится один пример разработанного нами занятия из элективного курса для учащихся 8 класса образовательных школ на тему: «Решение задач по теме «Многочлены» с помощью Maple». Занятие содержит как теоретическую, так и практическую части.

Практическая часть содержит задания, которые решаются детьми на уроке, и также задания, которые даются для самостоятельного решения.

Будет показан разбор этого занятия с помощью пакета математических программ Maple.

Ключевые слова: многочлены, элективный курс, математика, НОД многочленов, алгоритм нахождения НОД многочленов, пакет математических программ, задачи.

© L. Kh. Tsybikova, N. S. Gachegova

ELECTIVE COURSE: SOLUTION OF THE PROBLEMS RELATED TO THE TOPIC "POLYNOMIALS" BY MAPLE

Abstract. The article considers some data about polynomials: the importance of their learning at school in the course of algebraic geometry and other branches of mathematics. In the context of modern educational system it is necessary to use innovative methods, namely a package of mathematical programs Maple. We give an example of the lesson developed by us within the elective course for 8-grade pupils of regular schools and aimed at solution of the problems related to the topic "Polynomials" by Maple. The lesson contains both theoretical and practical parts.

The practical part contains the tasks, which children solve at the lesson, and also the tasks for independent work at home. We have analyzed this lesson using a package of mathematical programs Maple.

Keywords: polynomials; elective course; mathematics; the greatest common divisor of polynomials; algorithm for finding the greatest common divisor of polynomials; package of mathematical programs; problems.

Преподавание математики, как и других предметов, по обязательной единой общегосударственной программе становится более успешным, если его дополнить элективным курсом.

Элективные курсы – это очень новый пункт учебного плана. Курсы дополняют содержание профиля - это позволяет удовлетворять разнообразные познавательные интересы школьников.

Многочлены и их свойства в основной школе имеют колоссальную важность. Действительно, когда учащихся знакомят с темой «Многочлены», они узнают много нового и интересного. Изучение многочленов составляло, чуть ли не самый основной или даже главный объект «классической алгебры». Когда начали осваивать тему «Многочлены» в математике начал происходить ряд преобразований: рассматривали нуль, комплексные числа и теорию групп как раздел математики.

Многочлены играют очень важную роль в алгебраической геометрии. Объектом этой алгебраической геометрии являются множества, которые определены как решения систем многочленов. Особенности свойства преобразования коэффициентов при умножении многочленов используются для кодирования, или когда многочлены проявляют свойства разных объектов в алгебре, алгебраической геометрии и других разделах математики.

Так же необходимо сказать, что из что многочленов не только создаются многочисленные задачи в алгебре, но и происходит то, что в дальнейшем усложняются простые математические конструкции.

В современной образовательной системе необходимым является использование инновационных методов и средств обучения.

После отработки практических навыков с операциями над многочленами в рамках школьной программы представляется возможным развитие умений учащихся решать задачи с многочленами с помощью пакета математических программ Maple

Применение инновационных технологий, а именно - компьютеров в учебном процессе даст возможность повысить мотивацию учащихся к учебной деятельности, поспособствует развитию самостоятельности в получении необходимых знаний, умений и навыков и поможет сформировать адекватную оценку своего уровня усвоения материала. Однако также необходимо помнить, что в стремлении использовать современные технологии нельзя их превращать в цель образовательного процесса и забывать про основные цели. Компьютерные технологии должны быть лишь средством достижения основного образовательного результата. Разумное их применение

должно регулироваться используемыми методами и приёмами обучения.

Нами был разработан элективный курс для 8 класса общеобразовательных школ на тему: «Решение задач по теме «Многочлены» с помощью Maple».

Представим одно из этих занятий на тему: «НОД двух многочленов».

План занятия:

I. Вступительное слово учителя (объявляется тема занятия, поставленные цели и задачи).

II. Теоретическая часть (алгоритм нахождения НОД двух многочленов).

III. Практическая часть (решение задач с помощью пакета математических программ Maple).

IV. Задачи для самостоятельного решения.

Цели:

Образовательная:

- сформировать у учащихся представление о НОД двух многочленов;
- показать алгоритм нахождения НОД двух многочленов.

Познавательная:

- расширить учебно-познавательные потребности школьников;
- развить интерес к предмету.

Воспитательная:

- повысить математическую культуру.
- научить находить НОД полиномов с помощью Maple.

Объяснение учителя:

Вводится понятие НОД двух многочленов. Затем учитель объясняет алгоритм нахождения НОД двух многочленов. После это он показывает детям, как с помощью пакета математических программ Maple решить эту задачу намного проще. Учитель так же объясняет, что Maple не даёт самого решения задач, а лишь показывает ответ. Поэтому для начала ученикам нужно будет решить самостоятельно задание, а дальше воспользоваться пакетом Maple для самопроверки.

Практическая часть занятия:

Найти НОД многочленов $f(x)$ и $g(x)$:

1. $f(x) = (x^5 + 3x^4 - 12x^3 - 52x^2 - 52x - 12)$, $g(x) = (x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 22x - 12)$;

2. $f(x) = (x^3 - x + 10x^3 - 21)$, $g(x) = (x^3 - 2x^2 - 10)$;

3. $f(x) = (5x^2 + 14x - 12)$, $g(x) = (5 + 12x^2)$;
4. $f(x) = (x - 4x^3)(2 + 5x^5)$, $g(x) = (11x - 2x^2)$;
5. $f(x) = (3 - 4x^2)$, $g(x) = (x^2 - 7x + 1)$;
6. $f(x) = (x^4 + 2x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 8x - 5)$, $g(x) = (x^5 + x^2 - x + 1)$;
7. $f(x) = (x^5 + 3x^2 - 2x + 2)$, $g(x) = (x^6 + x^5 + x^4 - 3x^2 + 2x - 6)$;
8. $f(x) = (x^4 - 10x^2 + 1)$, $g(x) = (x^4 - 4x^3 + 7x^2 + 4x + 1)$;
9. $f(x) = (x^5 + x^4 - x^3 - 2x - 1)$, $g(x) = (3x^5 - 7x^3 + 5x^2 - 7)$;
10. $f(x) = (x^6 - 5x^3 + 1)$, $g(x) = (x^3 - 3x^2 + 1)$.

Учащиеся решают данные примеры в тетради. После чего переходят к самопроверке.

Разбор на Maple:

Учащимся, для того чтобы найти НОД двух полиномов (в Maple многочлены называют – полиномами) нужно воспользоваться такой командой, как

`gcd(pol1,pol2)`

Рассмотрим, на примере (Рисунок представлен в виде скриншота команды программы):

The screenshot shows a Maple command line with a red prompt character '>'. The command is `gcd(x^5 + 3x^4 - 12x^3 - 52x^2 - 52x - 12, x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 22x - 12)`. To the right of the command, the result `x + 3` is displayed.

Задачи, которые дети разбирают самостоятельно:

1. $f(x) = (1/7x^2 + 3x - 2/5x^3)$, $g(x) = (x - 1)$;
2. $f(x) = (x - 5x^2 + 6x^3)$, $g(x) = (x - 2x^2)$;
3. $f(x) = (3x - 4.5x^2 + x^3 + 1/5)$, $g(x) = (0.4x + 2x^2)$;
4. $f(x) = (3x - 7x^2 + 6x^3 + 7)$, $g(x) = (-0.4x - 2x^2)$;
5. $f(x) = (3x - 41x^2 + 6x^3 + 2)$, $g(x) = (3x + 2x^2)$;
6. $f(x) = (5x + 45x^2 + 6x^3 + 3)$, $g(x) = (-0.4x - 2x^2)$;
7. $f(x) = (x - 3x^2 + 6x^3 + 5)$, $g(x) = (-0.4x - 2x^2)$;
8. $f(x) = (3x - 4.3x^2 + 6x^3 + 1)$, $g(x) = (-1x + 2x^2)$;
9. $f(x) = (7x - 4x^2 + 16x^3 + 2)$, $g(x) = (-0.4x - 21x^2)$;
10. $f(x) = (13x + x^2 + x^3 + 2/7)$, $g(x) = (4x + 12x^2)$;

На данную тему даётся 2 урока.

- первый урок – теория и практика.
- второй урок – практика.

Во время второго урока, дети будут больше решать самостоятельно, чтобы хорошо отработать навык нахождения НОД полиномов.

Таким образом, создав данный элективный курс, мы разовьём у детей стремление к учебе. Уроки будут проходить весело и интересно. Ведь каждый современный ребенок очень любит проводить время за компьютером. А изучить что-то новое для себя это еще один путь к саморазвитию, который так важен для каждого ребенка.

Литература

1. Фаддеев Д. К. Сборник задач по алгебре: Учебное пособие. 5-е изд., – СПб.: изд «Лань», 2007. – 416 с.
2. Блох А. Я. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика. / В. А. Гусев, Г. В. Дорофеев. – М.: Просвещение, 2007. – 486 с.
3. Виленкин Н. Я. Современные основы школьного курса математики. – М.: Просвещение, 2010. – 257 с.
4. Савотченко С. Е., Кузьмичева Т. Г. Методы решения математических задач в Maple: Учебное пособие – Белгород : Изд. Белаудит, 2001. – 116 с.

Цыбикова Лидия Ханхаевна, кандидат педагогических наук, доцент, Бурятский государственный университет, Россия, 670000, Улан-Удэ, ул. Смолина, 24 а, e-mail: sibikova@rambler.ru

Гачегова Наталья Сергеевна, студент института математики и информатики, Бурятский государственный университет, Россия, 670000, Улан-Удэ, ул. Смолина, 24 а, e-mail: mgachegova@mail.ru

Tsybikova Lidya Khanhaevna, Candidate of Pedagogics, Associate Professor, Buryat State University

Gachegova Natalia Sergeevna, student of the Institute of mathematics and informatics, Buryat State University

ПРОЕКТНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ КАК ЭЛЕМЕНТ ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННОГО ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Аннотация. На протяжении долгих лет традиционной целью образования было овладение системой знаний, составляющих основу наук. Но современное общество и научно-технический прогресс диктуют новые образовательные цели. Эти цели закреплены в стандартах нового поколения, которые обеспечивают овладение основными компетенциями выпускника среднего профессионального учебного заведения.

В настоящее время обучающиеся не проявляют должного внимания к изучению дисциплин естественнонаучного цикла, особенно математики. Одной из причин этого явления можно назвать оторванность школьного курса математики от практики. Поэтому современный урок и внеурочную деятельность студентов следует планировать с учетом новых требований, одним из которых является практико-ориентированность обучения.

Проектная деятельность является эффективным способом реализации практико-ориентированного обучения математике, так как включает в себя использование проблемных, поисковых методов, практическим результатом которого является разработка собственного проекта, значимый для обучающегося.

Ключевые слова: метод проектов, практико-ориентированное обучение, общие компетенции, профессиональные компетенции, проектная деятельность.

© S. S. Shiretorova

PROJECT ACTIVITIES AS AN ELEMENT OF MATHEMATICS PRACTICE-ORIENTED LEARNING

Abstract. Over the years, the traditional aim of education has been to master the system of knowledge that forms the foundation of sciences. But modern society and scientific progress dictate new educational goals. They are enshrined in new generation standards, which ensure the mastering of the basic competencies of secondary vocational school graduates.

Currently, students do not pay proper attention to studying the disciplines of natural science cycle, especially mathematics. One of the reasons for this phenomenon is the isolation of school mathematics course from practice. Therefore, at the present stage lessons and extracurricular activities of students should be planned taking into account new requirements, one of which is practice-oriented learning.

Project activity is an effective way to implement practice-oriented learning of mathematics, as it involves problematic, search methods, and their practical use result in development of a personal project by the learner.

Keywords: project-based learning; practice-oriented learning; general competence; professional competence; project activity.

Стремление России совершать прорывы во всех сферах жизни привело к переосмыслению целей, задач и содержания обучения. Федеральный государственный образовательный стандарт предъявляет новые требования к выпускнику, которые основаны на компетентностном подходе. Будущий специалист должен обладать общими и профессиональными компетенциями. Однако педагогическое сообщество сталкивается с рядом проблем, связанных с отсутствием положительной мотивации студентов первого года обучения при изучении дисциплин естественнонаучного цикла, особенно математики. Одной из причин можно назвать оторванность школьного курса математики от практики. Действительно, студенты, поступившие на первый курс, не понимают важность математических знаний и не представляют, как их можно использовать в своей будущей профессиональной деятельности, поэтому не уделяют должного внимания к изучению предмета. Поэтому преподавание математических дисциплин должно носить практико-ориентированный характер, т.е. необходимо на уроках математики рассматривать задачи прикладного характера с применением теоретического материала. Такие занятия можно проводить с помощью такой образовательной технологии, как метод проектов, который является одним из эффективных методов практико-ориентированного обучения.

Метод проектов – это способ обучения, при котором в процессе самостоятельного планирования и активного выполнения определенного типа заданий происходит решение учебной проблемы, и создаются условия для формирования профессиональной компетентности, а проектная деятельность рассматривается как деятельность обучающихся в определенных рамках. Использование проектной деятельности в рамках практико-ориентированного обучения, направленное на решение задач окружающей действительности включает в себя использование широкого спектра проблемных, поисковых методов, результатом которого является конкретный практический результат. Современное образование предъявляет к будущему выпускнику новые требования, одно из

которых умение работать над собственными проектами, тем самым реализуется исследовательская модель обучения.

Наиболее эффективно организовать работу над проектом можно при групповой работе, где каждый участник команды ответственен за выполнение своего участка работы, а также он получает возможность оценивать результаты своего труда и труда своих товарищей. Опыт разрешения, пусть локальной, но целостной проблемы формирует привычку доводить дело до конца, не останавливаясь на полпути.

Проектная деятельность студентов в профессиональной образовательной организации может осуществляться как в аудиторное, так и внеаудиторное время. Студенты специальностей «Прикладная геодезия» и «Землеустройство» должны в полной мере овладеть математическими правилами и формулами для обработки данных, полученных при измерении с помощью геодезических приборов, конечным итогом которых является составление топографических и графических карт местности. Исходя из этого, на уроках математики метод проектов применяется при решении геометрических задач на местности.

Основы математического анализа в решении задач на оптимизацию расходов предприятия необходимы для студентов, обучающихся по направлению Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям); математическая статистика поможет в прогнозировании численности популяции собак для студентов ветеринарного отделения и т.п. Такие проекты относятся к практико-ориентированному типу, целью которого является поиск математических методов решения задач, связанных с будущей профессиональной деятельностью специалиста. Учебную деятельность на уроке при этом методе обучения организована в малых группах, где все участники несут ответственность за результат работы. Совместный опыт работы помогает студентам более эффективно усваивать учебный материал, принимать решение в стандартных и нестандартных ситуациях, развивать коммуникационные навыки, умение работать в коллективе и команде. Данный опыт незаменим на старших курсах при прохождении учебной практики, так как студенты делятся на бригады, где для каждой группы ставятся конкретные задачи, выдаются инструменты и успех производственной практики зависит от вклада каждого участника бригады.

Следует отметить, что студенты, поступающие в систему СПО, имеют слабую базовую подготовку по математике, поэтому обучающиеся испытывают затруднения в правильной постановке

вопроса, не могут построить математическую модель при решении прикладных задач, поэтому для выработки учебных навыков на уроках решаются тренировочные задачи, тем самым формируются такие методы познания, как анализ, синтез, обобщение, аналогии, дедукции, индукции, классификации и т.п.

Самостоятельная работа студентов при подготовке специалистов среднего звена играет важную роль в становлении будущего специалиста. Внеаудиторная деятельность занимает более 30% от всей учебной нагрузки. Наиболее эффективным способом реализации внеаудиторной деятельности студентов является работа с индивидуальными проектами, которые в является репетицией курсового и дипломного проекта.

Темы исследовательской работы по математике могут носить междисциплинарный и практико-ориентированный характер, именно в этих проектах можно раскрыть весь потенциал и неограниченные возможности математики. Выделим основные этапы планирования и реализации индивидуальных проектов:

1. Подготовительный этап. Подготовка тематики индивидуальных проектов и согласование темы работы с научным руководителем.

2. Вводный этап. Определение целей и задач проекта; составление графика консультаций в рамках элективного курса по дисциплине; установление сроков выполнения проекта.

3. Поисковый этап. Сбор и систематизация материалов в соответствии с идеей, подготовка эксперимента, разработка математической и компьютерной модели решаемой задачи.

4. Обобщающий этап. Оформление результатов проектной деятельности на бумажном носителе согласно ГОСТ; доработка проектов с учётом замечаний и предложений.

5. Заключительный этап. Публичная защита проектов. Подведение итогов, конструктивный анализ выполненной работы.

В ходе работы над индивидуальным проектом по математике студенты должны переработать и использовать свои знания при решении нестандартных прикладных задач, включая объекты в новые связи и отношения, в которых они могут проявить искомые свойства. Применение данного приема можно разделить на три этапа: а) формализация, этот этап состоит в переходе от исследования реальной ситуации к исследованию адекватной ей математической модели; б) исследования математическими средствами построенной модели; в) интерпретация, на данном этапе осуществляется перенос

полученных результатов исследования математической модели в реальную ситуацию.

Таким образом, в ходе работы над проектом обучающиеся познают основы исследовательской деятельности, такие как, постановка проблемы, формулирование гипотезы, определение целей и задач проекта, вследствие чего создается математическая модель задачи.

Умение строить математические модели прикладных задач и в дальнейшем интерпретировать полученные результаты позволяет формировать профессиональные компетенции у будущих выпускников. Публичная защита, обсуждение и оценка результатов проекта, видение их дальнейшего применения в реальной жизни и будущей профессиональной деятельности позволяет развить умение доказывать и защищать свои идеи, а также прогностические, аналитические и рефлексивные умения.

Приведем примеры тем индивидуальных проектов.

1. Решение геодезических задач средствами компьютерной алгебры MathCAD
2. Системы координат в прикладной геодезии
3. Полярная система координат в землеустройстве
4. Вычисление координат и построение полигона в инженерных графических редакторах
5. Построение розы ветров в полярной системе координат
6. Масштаб в картографии
7. Математический анализ при решении задач на оптимизацию расходов предприятия
8. Исследование графиков спроса и предложения
9. Теория графов в логистике
10. Математическая статистика в прогнозировании численности собак.

Литература

1. Белогрудова В. П. Об исследовательской деятельности учащихся в условиях проектного метода / В. П. Белогрудова // Иностранные языки в школе. – 2005. – №8. – С. 6-12.

2. Вербицкий А. А. Компетентностный подход и теория контекстного обучения / А. А. Вербицкий. – Москва : ИЦ ПКПС, 2004 – 84 с.

Ширеторова Саяна Сергеевна, преподаватель, ГБПОУ «Бурятский аграрный колледж им. М.Н. Ербанова», 670031, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Трубочеева, 140, тел.: +7 (3012) 433382, e-mail: sayanaserg@mail.ru

Shiretorova Sayana Sergeevna, Teacher, Buryat Agricultural College named after M.N. Erbanov

К ПРОБЛЕМЕ ПОДГОТОВКИ БУДУЩЕГО УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ

Аннотация. В данной статье рассматривается одна из задач подготовки магистрантов, работающих уже учителями математики и информатики. Это проблема затрагивает также студентов заочного отделения, которые преподают курсы математики, алгебры и геометрии в средних школах республики. В данной работе, в частности, речь пойдет о реализации принципа «обучаясь – обучай». Задача свободного владения будущим учителем математики и информатики школьным курсом математики может быть решена лишь совместными усилиями специальных кафедр, таких как кафедры алгебры, геометрии, математического анализа и информатики, а также кафедры обеспечивающей подготовку по методике преподавания математики. Будущий учитель математики, изучая фундаментальные курсы математики, получает знания, которые отвечают на конкретные вопросы, которые перед ним ставит преподавание школьного курса математики в средней школе. Существуют разнообразные инновационные формы, позволяющие сделать учебную деятельность максимально эффективной. Одной из наиболее часто используемых форм является проектная технология. При формировании проектной деятельности предпочтение отдается урокам, осуществляющих активную деятельность учащихся, т.е. творческим урокам.

Ключевые слова: подготовка магистрантов и студентов заочного отделения; усилия кафедр алгебры, геометрии, математического анализа, информатики и кафедры по методике преподавания математики; инновационные формы; проектная технология.

© S. S. Yantranova

TO THE PROBLEM OF TRAINING FUTURE TEACHERS OF MATHEMATICS

Abstract. The article deals with the peculiarities of training candidates for a Master's degree already working as teachers of mathematics and computer science, including students of extramural departments, who teach courses in mathematics, algebra and geometry in secondary schools of the republic. In particular, we consider the implementation of the principle of "training by learning". The problem of mastering the school course of mathematics by future teacher of mathematics and computer science can be solved only by the joint efforts of special departments, such as departments of algebra, geometry, mathematical analysis and

computer science, as well as department of mathematics teaching methods. Future teachers of mathematics studying the fundamental courses of the discipline get knowledge in teaching the school course of mathematics in high school. There are various innovative forms, which make it possible to make educational activity as efficient as possible. One of the most commonly used forms is project technology. In project activities preference is given to creative lessons, which are based on the activity of students.

Keywords: training of candidates for a Master's degree and students of extramural departments; the efforts of departments of algebra, geometry, mathematical analysis, informatics and mathematics teaching methods; innovative forms; project technology.

Оказание качественных образовательных услуг является одной из важных задач, которые прописаны в концепции долгосрочного социально-экономического развития России до 2020 года в разделе, посвященном образованию. Решение этой наиважнейшей задачи во многом зависит от подготовки будущих учителей, их способности осуществлять профессиональную деятельность в современных условиях кардинальных изменений в сфере просвещения, умения применять свои знания для решения реальных учебных задач. Как замечено, в настоящее время наметилась устойчивая тенденция спада математической подготовки не только школьников, но и что очень плачевно, студентов – будущих учителей математики. Поэтому одним из факторов, призванных решить эту проблему является преимущество в процессе непрерывного математического образования. В данной статье рассматривается одна из задач подготовки магистрантов, уже работающих учителями математики и информатики. Это проблема затрагивает также студентов заочного отделения, которые преподают курсы математики, алгебры, геометрии и информатики в средних школах республики Бурятия. В данной работе, в частности, речь пойдет о реализации принципа «обучаясь – обучай».

Задача свободного владения будущего учителя математики и информатики школьным курсом математики может быть решена лишь совместными усилиями специальных кафедр, таких как кафедры алгебры, геометрии, математического анализа и информатики, а также кафедры обеспечивающей подготовку по методике преподавания математики. Данные кафедры по своему месту и роли являются выпускающими и непосредственно работающими с магистрантами, а также со студентами заочного отделения, которые к этому времени,

предполагается, имеют хорошую базу по школьному курсу математики. Одним из главных педагогических условий активизации учебной деятельности магистрантов – будущих учителей математики является выявление и правильное применение разнообразных связей между знаниями, которые они получают при изучении различных математических дисциплин в вузе и практической работой учителя математики и информатики в школе. Будущий учитель математики, изучая фундаментальные курсы математики, получает знания, которые отвечают на конкретные вопросы, которые перед ним ставит работа школьного учителя математики в средней школе. Так курс теории чисел позволит педагогу построить дополнительный модуль, который поможет преодолеть олимпиадные трудности и успешно справиться с № 19 ЕГЭ. Курс аналитической геометрии и элементарной геометрии даст возможность будущему учителю математики построить элективные курсы, что расширит геометрические представления школьников. Школьные учителя математики и методисты отмечают, и, прежде всего, ученики, что геометрия трудна и неинтересна. И как результат, к задачам по геометрии, что по ОГЭ так и по ЕГЭ, в большинстве даже не приступают. Курс «Дополнительные главы геометрии», проводимый для магистрантов и студентов заочного отделения, где слушатели имеют возможность ознакомиться с избранными теоремами геометрии должен исправить такое положение. Так студенты к зачетному мероприятию подбирают материал к элективному курсу «Избранные теоремы геометрии». Наряду с такими теоремами, как теоремы Эйлера, Стюарта, Птолемея рассматриваются теоремы Наполеона, Морлея, Жордана и т.д. Кроме того, к данному курсу предполагается насыщенный задачный материал в соответствии с ГОСТ.

Многочисленными проверками соответствия ГОСТ, проводимые в школе в первую очередь проверяются знания учащихся по математике. Этим объясняется особое положение учителя математики и еще из-за значимости математики как школьного предмета. Какой предметник может сказать, что его предмет каждый день недели проводится в школе.

Такое положение вырабатывает в учителя математики стремление к самосовершенствованию и ответственность за результаты своего труда. Этим можно объяснить появление среди магистрантов и студентов заочного отделения учителей, имеющих большой опыт работы в школе. Общеизвестно, что для любого учителя самым

важным в работе являются поиски повышения эффективности обучения. Этот вопрос требует непрерывной работы над формами и методами преподавания математики, которые смогут оптимизировать учебный процесс. Как же учитель сможет сформировать положительную мотивацию учащихся к изучению учебного математического материала, создать условия полного раскрытия творческого и интеллектуального потенциала школьников, развития их познавательных интересов? Существуют разнообразные инновационные формы и методы преподавания математики, позволяющие сделать учебную деятельность максимально эффективной. Одной из наиболее часто используемых форм является проектная технология. Практика использования метода проектов не нова. Элементы проектной технологии встречались в советской педагогике, где демонстрировалось, что “вместе учиться не только легче и интереснее, но и значительно эффективнее”. Под методом проектов подразумевалась система обучения, при которой ребенок приобретал знания и умения в процессе самостоятельного планирования и выполнения, постепенно усложняющихся, практических заданий – проектов. В настоящее время метод проектов предполагает определенную совокупность учебно-познавательных приемов и действий обучаемых, которые позволяют решить ту или иную проблему в результате самостоятельных познавательных действий и предполагающих презентацию этих результатов в виде конкретного продукта деятельности с привлечением современных информационных технологий.

Чаще всего обучающиеся, получая знания по предметам математического цикла, не знают, как воспользоваться полученными знаниями на практике. Одним из решений данной проблемы, является организация проектного обучения предметов естественно-математического цикла. Такой подход предполагает накопление и осмысление не опыта решения учебных задач, а готовность к рассмотрению жизненных задач. Следовательно, основным результатом обучения будут не знания, умения и навыки, а осмысленный опыт жизнедеятельности. При этом как свой, так и чужой жизненный опыт формируется поэтапно, и оцениваться будет не усвоение дидактических единиц, а способность применять освоенные дидактические единицы в различных ситуациях[2]. Отсюда, современная школа должна готовить учащихся к решению возникающих проблем при этом, полагаясь на свою самостоятельную деятельность. Естественно, что формы и методы обучения не должны

быть подчинены только учебному содержанию, а должны выступать как самостоятельные средства для достижения определенных учебно-педагогических задач.

Как показывает опыт экспериментальной работы, проведенной в лицее №27 г. Улан-Удэ, модель построения учебного занятия по проектной методике в системе обучения математике может состоять из четырех основных этапов:

1-й этап – постановка целей и структурирование учебного занятия по рассматриваемой математической теме.

2-й этап – проектирование и формирование учебных задач на этапах проектной деятельности. На данном этапе происходит:

а) выделение содержания учебного занятия по рассматриваемым темам на каждом этапе;

б) установление внутрисубъектных связей содержания изучаемой темы и межпредметных связей между дисциплинами естественнонаучного цикла;

в) планирование результатов прохождения этапов проектирования.

3-й этап – выбор организации учебно-познавательной деятельности при проектном обучении. В основном на последнем этапе данный подход осуществляется посредством моделирования разнообразных ситуаций при изучении рассматриваемых тем.

Производится регулярное консультирование по содержанию проекта, отслеживание деятельности каждого ученика, осуществляется помощь в систематизации и обработке материала.

4-й этап – Итоговый

На данном этапе проводится консультация по оформлению проекта, по форме презентации, дается оценка с развернутым анализом. Проводится оценивание каждого участника проекта.

При формировании проектной деятельности наряду с традиционными уроками предпочтение отдается урокам, осуществляющих активную деятельность учащихся, т.е. творческим урокам.

Литература

1. Янтранова С. С. К проблеме построения новых интегрированных курсов по геометрии (на примере спецкурса "Методы изображений") / С. С. Янтранова // Математика, ее приложения и математическое образование МПМО, 11: материалы IV Междунар. конф., г. Улан-Удэ, Байкал, 27 июня-1 июля 2011 г. / отв. за вып. Л. И. Назарова. – Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ, 2011. – Ч. 2. – С. 291-293.

2. Хуторской А. В. Ключевые компетенции и образовательные стандарты

[Электронный ресурс] // Интернет-журнал «Эйдос». – 2002, 23 апреля. – <http://eidos.ru/journal/2002/0423.htm>.

Янтранова Светлана Степановна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры, геометрии и методики преподавания математики Бурятского государственного университета, 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5.

Yantranova Svetlana Stepanovna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Buryat State University

ПРОЕКТНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Аннотация. В данной статье рассматривается использование таких методик, которые позволят учащимся не просто заучить необходимый материал, а понять его, и в последующем позволить применить полученные знания на практике. Именно поэтому любая тема, изучаемая в рамках курса математики, имеет практическое применение. Удачным экспериментом в данной работе, стал проект «Проектирование баскетбольной площадки в школе». Такая проектная деятельность очень многогранна, и направлена на формирование универсальных учебных действий: во-первых, работа с информационными ресурсами, во-вторых, развитие творческого подхода к выполнению работы, а также формирование навыков коллективной работы, ответственности, самоорганизации, взаимопомощи. Современные ученики начального и среднего звена привыкли к работе «один на один», в этом можно отметить заслугу компьютеризации, на уроках всё иначе – детей много, а учитель один, который объясняет информацию сразу всем, а не каждому отдельно, поэтому некоторые усваивают её гораздо хуже. Чтобы исправить положение вполне целесообразно использовать проектно-ориентированный подход к изучению материала, что позволяет выявить индивидуальные возможности каждого ученика.

Ключевые слова: ФГОС, эксперимент, проектная деятельность, универсальные учебные действия, проектно-ориентированный подход.

© S. S. Yantranova, A. V. Merkushev

PROJECT ACTIVITY AT LESSONS OF MATHEMATICS

Abstract. This article discusses the use of such teaching methods that will allow students not only to memorize the necessary material, but to understand it, and in the future apply the obtained knowledge in practice. That is why any topic studied within the mathematics course should have practical application. The project "Designing of a Basketball Court in the School" is a very successful experiment, aimed at development of universal educational activities: work with information resources, creative approach to the work, and building skills of teamwork, responsibility, self-organization, mutual assistance. Modern students of primary and secondary level are accustomed to work "one on one", computerization played a big part in this. At lessons there are a lot of children, and

the teacher is the one who explains the information to everyone at once, so some pupils acquire it much worse. To remedy the situation, it is quite reasonable to use a project-oriented approach to studying the material, which makes it possible to find out the individual capabilities of each student.

Keywords: Federal Educational Standard; experiment; project activity; universal learning activities; project-oriented approach.

Современные ФГОС предполагают использование таких методик, которые позволят учащимся не просто заучить необходимый материал, а понять его, и «прочувствовать», что в последующем позволит применить полученные знания на практике. Именно поэтому любая тема, изучаемая в рамках курса математики, имеет практическое применение. Учитель может просто рассказать, что нахождение площадей плоских фигур и действия с десятичными дробями нужны инженерам при конструировании различных аппаратов, при проектировании и строительстве зданий, даже при выполнении ремонтных работ дома, то есть снова же «сухая» информация, которую дети должны просто принять. Гораздо лучше, если учащимся предложат самим увидеть, что пройденная тема необходима. Удачным экспериментом в данной работе, стал проект «Проектирование баскетбольной площадки в школе». Что для этого нужно? Измерительная рулетка, энтузиазм и терпение. Учащиеся были разбиты на команды, одна работала с теоретической частью - требования безопасности и санитарные нормы на спортивных площадках. Вторая занималась измерениями площади участка и расположением на нём конструкций так, чтобы они соответствовали технике безопасности. Третья отвечала за вычисление стоимости материала для сооружения спортивной площадки по найденному прайс-листу. В итоге учениками был разработан проект. Такая проектная деятельность очень многогранна, направлена на формирование универсальных учебных действий: во-первых, работа с информационными ресурсами, во-вторых, развитие творческого подхода к выполнению работы, а также формирование навыков коллективной работы, ответственности, самоорганизации, взаимопомощи.

В современной системе образования проектно-ориентированная деятельность является одним из принципов государственной политики в условиях постоянного реформирования образования. Но проектная деятельность это не нововведение, данный подход реализовывался и в школах советского периода. Учащиеся 7-8 классов находятся на том

этапе изучения математики, когда любая информация по алгебре и геометрии является новой и, если не получится сразу её усвоить, в дальнейшем непонимание материала будет только усиливаться. Современные ученики начального и среднего звена привыкли к работе «один на один», в этом можно отметить заслугу компьютеризации, на уроках всё иначе – детей много, а учитель один, который объясняет информацию сразу всем, а не каждому отдельно, поэтому некоторые усваивают её гораздо хуже. Чтобы исправить положение вполне целесообразно использовать проектно-ориентированный подход к изучению материала, что позволяет выявить индивидуальные возможности каждого ученика.

В результате практической деятельности учащиеся будут получать новые знания посредством решения проблемных задач, в создающихся для этого проблемных ситуациях. Сталкиваясь с трудностями, учащиеся будут применять не только стандартные способы решения, но и находить новые – неординарные. Они будут выполнять такие задания, для которых не существует готового решения. А именно способность нестандартно мыслить обеспечивает успех на олимпиадах. Творческий элемент позволит заинтересовать учеников, мотивировать, пробудить тягу к исследованиям, ведь математика – сложный предмет, поэтому за внимание детей нужно бороться, если нет интереса, не будет желания изучать дисциплину, а значит, не будет результата.

Проектная деятельность позволит школьникам лучше познакомиться с информационными технологиями, овладеть умением создания презентаций, которые являются неотъемлемой частью не только на уроках, но и при защите в научно-исследовательских конференциях, и самое важное - научит из большого количества материала выбирать главное, необходимое.

Проект по геометрии «Расчет площади будущей баскетбольной площадки»

МАОУ лицей № 27

Руководитель: Меркушев А. В.

Выполнили учащиеся 8 –го класса.

2018 г.

Цель:

1. Формирование умений и навыков применять формулы нахождения площади многоугольников.

2. Развивать потребность в познании, умение принимать решение, осуществлять поиск направления и методов решения проблемы.

3. Применять знания в необычных ситуациях.

4. Воспитывать умение сотрудничать, работать в группе (коммукативные способности), развивать чувство ответственности.

Актуальность исследования:

Действительно, роль измерений в жизни современного человека очень велика.

В самостоятельной жизни нам потребуются умения рассчитывать площади на местности, выбирать материалы по качеству и стоимости, рассчитывать необходимое количество материалов и затрат на их приобретение.

Задачи:

1. Организовать исследовательскую работу нахождению площади плоской фигуры на местности.

2. Организовать исследовательскую работу по расчету стоимости баскетбольной площадки.

3. Способствовать развитию интеллектуальной активности учащихся.

4. Сделать выводы.

Гипотеза:

В настоящее время измерительные работы на местности играют важную роль для экономических расчетов

Объект исследования: измерения на местности.

Предмет исследования: способы измерений на местности.

Ход исследования:

1. Постановка проблемы. Определение цели проекта.

2. Распределение на группы (спецификация баскетбольной площадки, покрытие и стоимость.)

3. Планирование времени проекта.

4. Поиск информации по проекту. Выполнение необходимых расчётов при проведении исследования.

5. Создание мини-проектов каждому участнику проекта. Каждый мини-проект состоит из цели, оборудования, ожидаемого результата, решения задачи, вывода.

Вывод: Итак, стоимость заливки и укладки баскетбольной площадки при учете минимальной стоимости будет составлять 497700 рублей. Прибавим к этому стоимость щитков с кольцами за 38000 и получим 583000 рублей. Это стоимость баскетбольной площадки без

учета затрат на рабочих и ограждение, а только на материал. В настоящем проекте рассмотрены расчет площади прямоугольника, поиск информации, нахождение объёма, расчеты стоимости материалов для строительства баскетбольной площадки.

Янтранова Светлана Степановна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры, геометрии и методики преподавания математики Бурятского государственного университета, 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5.

Yantranova Svetlana Stepanovna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Buryat State University

СОДЕРЖАНИЕ

ГЕОМЕТРИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Антонова Л. В. Вещественные гиперповерхности в пространствах над алгеброй двойных чисел	3
Башашина К. В. Аффинно-групповые связности, индуцированные композиционным оснащением семейства гиперцентрированных плоскостей в проективном пространстве	9
Букушева А. В. Преобразования продолженных структур на распределениях субримановых многообразий	14
Галаев С. В. Допустимые псевдо-эрмитовы структуры на распределениях би-метрических многообразий	20
Дондукова Н. Н., Заятуев Б. В. Об одном примере келеровой структуры на касательном расслоении	29
Кулешов А. В. Об одной интерпретации линейных реперов в проективной дифференциальной геометрии	34
Рязанов Н. А. О фундаментально-групповых связностях второго порядка	39
Степанов В. Н. Восстановление поверхности по её функцио-налам	45
Цыренова В. Б. Поверхности в квазигиперболическом пространстве ${}^{11}S_3^1$	54
Шевченко Ю. И., Скрыдлова Е. В. Полуголономность фактор-многообразия голономного распределения в пространстве аффинной связности без кручения	59

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ

Баглаев И. И. Моделирование аффинных преобразований плоскости в среде SMALL BASIC	68
Бадмаев С. А., Шаранхаев И. К. Об одном критерии полноты множества мультифункций ранга 2	75
Бердичевский Е. Г. Полигональная графика как инструмент трехмерного моделирования	79
Бубенчиков А. М., Бубенчиков М. А., Мамонтов Д. В., Челнокова А. С. Проницаемость мембраны из плотно уложенных закрытых углеродных нанотрубок	87
Бубенчиков А. М., Бубенчиков М. А., Мамонтов Д. В., Челнокова А. С. Селективные свойства одной идеальной сэндвич структуры в отношении метан-гелиевой смеси	96

Бубенчиков М. А., Лебедев А. В., Орлов С. В., Половко А. В., Потеряева В. А., Промзелева Д. А., Тайлашев А. А. Движение молекул карбина через углеродную нанотрубку и поры в графене	107
Бурзалова Т. В., Данеев А. В. Клеточные автоматы в системе “mathematica”. Компьютерный эксперимент	116
Герман Е. И., Цыдыпов Ш. Б. Молекулярная динамика изобарических и адиабатических процессов	122
Дармаев Т. Г., Калашников С. В., Номоев А. В. Метод хладни разделения ультрадисперсных порошков	128
Дерюгин Д. Ф., Хандаров Ф. В., Бурдуковский П. С. Численное исследование различных способов генерации n-мерного равномерного распределения	135
Ламуева М. В., Луцык В. И., Парфенова М. Д. (EXCEL+ACAD) -технология построения изотермических разрезов t-x-y-z диаграмм состояния четырехкомпонентных систем	145
Ламуева М. В., Воробьева В. П., Луцык В. И., Парфенова М. Д. Полиэдрация концентрационных комплексов многокомпонентных систем с обменным взаимодействием	152
Моржин О. В. О некоторых геометрических аспектах в теории квантовых вентиляей	162
Некипелова Т. И., Цыдыпов С. Г., Цыренова В. Б. Математическое моделирование взаимодействия двух тел	168
Раднаев Б. Б., Цыбиков А. С. Анализ пульсового сигнала методом SSA	178
Хабитуев Б. В., Докур А. М. Веб-ориентированная база данных туристических объектов	186
Эльшенави А., Иваншин П. Н. Линейное сплайн-интерполяционное решение для трехмерного задачи дирихле для произвольного тела с гладкой поверхностью	191

СОСТОЯНИЕ И ПЕРСПЕКТИВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Антонова Л. В. Интеграция математического образования в педагогическом вузе	206
Батхуу Цереннадмид О разработке учебной программы по подготовке преподавателя математики в Монгольском государственном университете образования	211
Гомбоева Л. В. Образы образования: от неопределенности к самопознанию и самообразованию	215
Кислякова М. А. Основы математического моделирования в математических дисциплинах социогуманитарных профилей	225
Литвинова Ж. Б., Цыренова В. Б. Реализация концепции «группо-центрированного лидерства» в современном образовании	235

Лумбунова Н. Б. О модели формирования общих компетенций специалиста среднего звена	239
Миროнова Е. П. Об активизации учебно-познавательной деятельности студентов при обучении математике	244
Некипелова Т. И., Пурэвдорж Е. А. Решение геометрических задач методом вспомогательной окружности	247
Никитина Е. С., Неустроева Т. К. Вопросы реализации концепции математического образования в Республике Саха (Якутия)	255
Павлова Е. Б., Булгатова Е. Н. Формы и методы организации исследовательской деятельности студентов колледжа	262
Поличка А. Е. Место задачного материала в авторской методической системе обучения математики для педагогического образования	266
Семенченко М. А., Малыхина О. А. Исторический подход в преподавании содержательной линии «финансово-экономические задачи» в школьном курсе математики»	274
Табачук Н. П. Модульная структура курса «компьютерные технологии в обучении математике» для магистрантов	279
Тусиков П. В., Казинец В. А. Компьютерная игра как средство обучения школьным предметам	286
Фишман Б. Е., Эйрих Н. В. Практико-ориентированная игра как средство стимулирования субъектности студентов, осваивающих математику	291
Фортманн-Желаева М. Ю. Стратегия школьного образования в контексте эволюции общества	299
Цыбикова Л. Х., Гачегова Н. С. Элективный курс: «решение задач по теме «многочлены» с помощью MAPLE»	309
Ширеторова С. С. Проектная деятельность как элемент практико-ориентированного обучения математике	314
Янтранова С. С. К проблеме подготовки будущего учителя математики	319
Янтранова С. С., Меркушев А. В. Проектная деятельность на уроках математики	325

Научное издание

**Геометрия многообразий
и ее приложения**

*Материалы Пятой научной конференции
с международным участием*

(Улан-Удэ — оз. Байкал, 3–6 июля 2018 г.)

Компьютерная верстка
А. С. Челноковой

Свидетельство о государственной аккредитации
№ 2670 от 11 августа 2017 г.

Подписано в печать 29.06.2018 г. Формат 60×84 1/16.
Усл. печ. л. 19,4. Уч.-изд. л. 13,7. Тираж 150. Заказ 124.
Цена договорная.

Издательство Бурятского госуниверситета
670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: riobsu@gmail.com

Отпечатано в типографии ИП «Бальжинимаев А. Б.»
670000, г. Улан-Удэ, ул. Кирова, 28а, оф. 32
E-mail: zakaz@formatbur.ru