

УДК 004.925.84

DOI: 10.18101/978-5-9793-1626-0-11-16

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЛ НА ТРЕУГОЛЬНОМ ПРИЗМАТИЧЕСКОМ КАРКАСЕ

© Аюшеев Тумэн Владимирович

доктор технических наук, доцент,

Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления

Россия, 670013, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40в

Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова

Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а

E-mail: tvaush@yandex.ru

© Ракшаева Ольга Дмитриевна

аспирант,

Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления

Россия, 670013, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40в

E-mail: raksh_od@mail.ru

Аннотация. В этой статье рассмотрены вопросы геометрического моделирования трехмерных тел многослойной структуры на треугольном призматическом каркасе и их описание кубическими параметрическими сплайнами. Выводится уравнение порции тела, позволяющее моделировать как его форму, так и однородную внутреннюю часть. Приведены вычислительные эксперименты с порциями тел с прямолинейными и криволинейными границами, которые могут быть использованы в численном моделировании. Параметрические твердотельные элементы могут быть объединены в одно тело сложной формы. Непрерывность между элементами можно определить как при моделировании кубических параметрических сплайнов.

Ключевые слова: геометрическое моделирование, трехмерные тела, треугольная призма, кубические сплайны

Для цитирования

Аюшеев Т. В., Ракшаева О. Д. Моделирование тел на треугольном призматическом каркасе // Информационные системы и технологии в образовании, науке и бизнесе: материалы региональной научно-практической конференции с международным участием (Улан-Удэ, 1 июля 2021 г.) / отв. ред. А. А. Тонхонова, науч. ред. Е. Р. Урмакшинова. Улан-Удэ: Изд-во Бурят. гос. ун-та, 2021. С. 11–16.

Пусть нам заданы кривые треугольного призматического каркаса. Данный криволинейный каркас определяет нам форму твердотельного элемента, или порцию моделируемого объекта (рис. 1). Допустим, что параметры u , v и w изменяются в пределах от 0 до 1 вдоль соответствующих границ. Тогда вектор-функция $\mathbf{r}(u, v, w)$, $0 < u, v, w < 1$ представляет собой внутренность порции тела, $\mathbf{r}(u, 0, 0)$, $\mathbf{r}(0, v, 0)$, $\mathbf{r}(0, 0, w)$, $\mathbf{r}(u, 0, 1)$, $\mathbf{r}(0, v, 1)$, $\mathbf{r}(1, 0, w)$, $\mathbf{r}(0, 1, w)$, $\mathbf{r}(1, v, 0)$, $\mathbf{r}(1, v, 1)$ представляют 9 известных граничных кривых. Ставится задача: построить вектор-функцию $\mathbf{r}(u, v, w)$, которая при $u = 0$, $u = 1$, $v = 0$, $v = 1$, $w = 0$ или $w = 1$ представляют нужную граничную кривую.

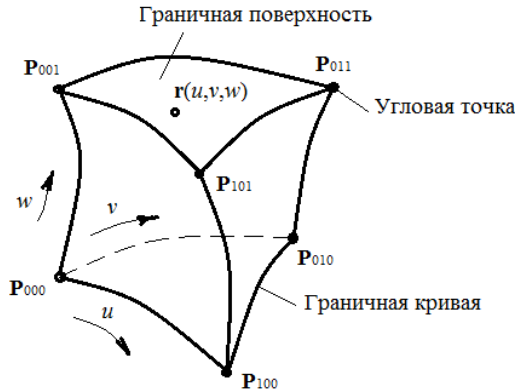


Рис. 1. Порция тела на треугольном призматическом каркасе

Рассмотрим сначала задачу построения порции тела, если заданы кривые только двух ее граничных поверхностей $\mathbf{r}(0, v, w)$ и $\mathbf{r}(1, v, w)$. Применяя линейную интерполяцию в u -направлении, получим тело с линейчатой поверхностью на боковой грани $\mathbf{r}(u, 0, w)$ (рис. 2):

$$\mathbf{r}_1(u, v, w) = (1 - u)[(1 - w)\mathbf{r}(0, v, 0) + w\mathbf{r}(0, v, 1)] + u[(1 - w)\mathbf{r}(1, v, 0) + w\mathbf{r}(1, v, 1)] \quad (1)$$

Линейная интерполяция в v -направлении дает тело с линейчатыми поверхностями на боковых гранях $\mathbf{r}(0, v, w)$ и $\mathbf{r}(1, v, w)$ (рис. 3):

$$\mathbf{r}_2(u, v, w) = (1 - v)[(1 - w)\mathbf{r}(u, 0, 0) + w\mathbf{r}(u, 0, 1)] + v[(1 - w)\mathbf{r}(u, 1, 0) + w\mathbf{r}(u, 1, 1)] \quad (2)$$

Линейная интерполяция в u - и v -направлениях дает тело с линейчатыми поверхностями на нижней и верхней гранях $\mathbf{r}(u, v, 0)$ и $\mathbf{r}(u, v, 1)$ (рис. 4):

$$\mathbf{r}_3(u, v, w) = (1 - u)[(1 - v)\mathbf{r}(0, 0, w) + v\mathbf{r}(0, 1, w)] + u[(1 - v)\mathbf{r}(1, 0, w) + v\mathbf{r}(1, 1, w)] \quad (3)$$

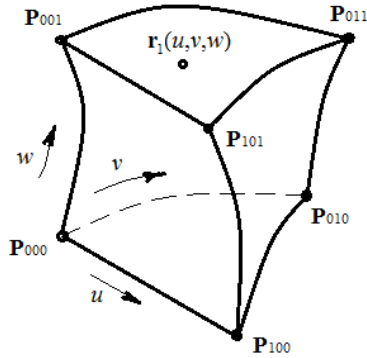


Рис. 2. Порция тела, получаемая линейной интерполяцией в u -направлении

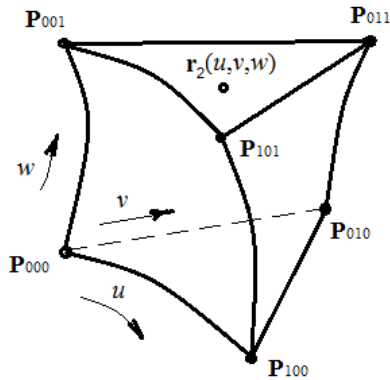


Рис. 3. Порция тела, получаемая линейной интерполяцией в v -направлении

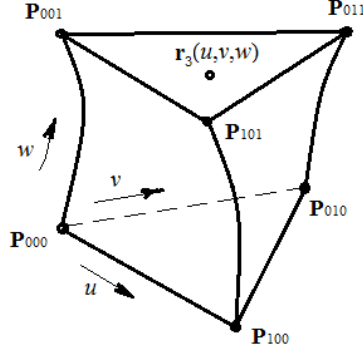


Рис. 4. Порция тела, получаемая линейной интерполяцией в u - и v -направлениях

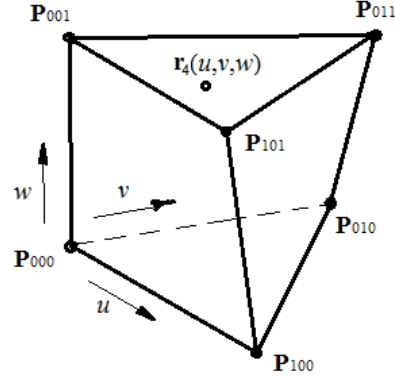


Рис. 5. Порция тела с прямолинейными ребрами

Их сумма $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3$ представляет порцию тела, каждая из границ которой является суммой заданной граничной кривой и прямолинейного отрезка, соединяющего концевые точки этой кривой. Чтобы восстановить первоначальные граничные кривые, составим выражение $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 - 2\mathbf{r}_4$. Тогда порция тела $\mathbf{r}_4(u, v, w)$, границами которых служат вышеупомянутые прямолинейные отрезки, имеет вид:

$$\mathbf{r}_4(u, v, w) = (1-w) \left[(1-u)(1-v)\mathbf{P}_{000} + (1-u)v\mathbf{P}_{001} + (1-v)u\mathbf{P}_{100} + uv\mathbf{P}_{010} \right] + w \left[(1-u)(1-v)\mathbf{P}_{001} + (1-u)v\mathbf{P}_{011} + (1-v)u\mathbf{P}_{101} + uv\mathbf{P}_{011} \right] \quad (4)$$

Вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 - 2\mathbf{r}_4$, полученный из (1), (2), (3), (4) и определяющий искомое тело, удобно представить в матричном виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v, w) = & (1-u \ u) \begin{pmatrix} \mathbf{r}(0, v, 0) & \mathbf{r}(0, v, 1) \\ \mathbf{r}(1, v, 0) & \mathbf{r}(1, v, 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-w \\ w \end{pmatrix} + \\ & + (1-v \ v) \begin{pmatrix} \mathbf{r}(u, 0, 0) & \mathbf{r}(u, 0, 1) \\ \mathbf{P}_{010} & \mathbf{P}_{011} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-w \\ w \end{pmatrix} + \\ & + (1-u \ u) \begin{pmatrix} \mathbf{r}(0, 0, w) & \mathbf{r}(0, 1, w) \\ \mathbf{r}(1, 0, w) & \mathbf{r}(1, 1, w) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-v \\ v \end{pmatrix} - \\ & - 2(1-w \ w) \begin{pmatrix} (1-u \ u) \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{000} & \mathbf{P}_{010} \\ \mathbf{P}_{100} & \mathbf{P}_{010} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-v \\ v \end{pmatrix} \\ (1-u \ u) \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{001} & \mathbf{P}_{011} \\ \mathbf{P}_{101} & \mathbf{P}_{011} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-v \\ v \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \quad (5) \end{aligned}$$

Последовательные подстановки $u = 0$, $u = 1$, $v = 0$, $v = 1$, $w = 0$ и $w = 1$ подтверждают, что порция тела, определенная вектор-функцией (5), имеет 9 первоначальных кривых своими границами.

Эта конструкция, использующая только информацию о границах тела и вспомогательные функции переменных u , v и w , определяет наиболее простой класс тел на треугольном призматическом каркасе. Вспомогательные функции u , $(1-u)$, v , $(1-v)$, w и $(1-w)$, называемые функциями смещения, соединяют воедино 9 отдельных граничных кривых, чтобы дать одно корректно определенное тело.

Проводился вычислительный эксперимент с полученной моделью порции тела в среде MathCAD. При построении заданных граничных кривых порции тела использовались параметрические кубические сплайны с наклонами. Поверхности внутреннего пространства тела строились при значении параметра w равным от 0 до 1 с шагом 0,25. Вычислительный эксперимент проводился в три этапа.

На первом этапе рассматривался исходный твердотельный элемент в форме треугольной призмы. Граничные кривые для данного тела являются линейными сегментами. Пример элемента тела треугольной призмы показан на рис. 6. Простая треугольная призма деформируется перемещением 6 угловых точек вверх и вниз. В результате форма тела меняется, но внутренняя «плотность» не может быть изменена. При перемещении угловых точек нижняя и верхняя грани тела являются плоскостями. Боковые грани призмы деформируются и представляют собой три гиперболических параболоида. Такой твердотельный элемент часто используется в методах конечных элементов, когда в трехмерном элементе используются только линейные базисные функции.

На второй этапе рассматривался твердотельный элемент треугольной призмы с граничными кривыми. При изменении наклонов в угловых точках форма тела деформируется. Граничные кривые этого тела могут определять влияние граничных поверхностей на внутреннюю часть без изменения внешней формы. Эффект изменения параметрических поверхностей показан на рис. 7. Граничные поверхности представляют собой пять билинейных поверхностей Кунса. При этом нижняя и верхняя грани являются билинейными поверхностями Кунса на треугольнике. В простейшем случае, когда граничные кривые линейны, тело фактически является исходной треугольной призмой.

На третьем этапе тело с граничными кривыми деформируется при перемещении угловых точек. Граничные кривые тела определяют влияние граничных поверхностей на внутреннюю часть тела при изменении внешней формы. Эффект изменения плотности параметрических поверхностей показан на рис. 8. Меняя положения угловых точек и наклонов в этих точках можно строить параметрические поверхности разной плотности внутреннего пространства тела при деформации внешней формы. При этом граничные поверхности представляют собой пять билинейных поверхностей Кунса. В частном случае, когда граничные кривые линейны, тело фактически является треугольным призматическим элементом с плоскими гранями.

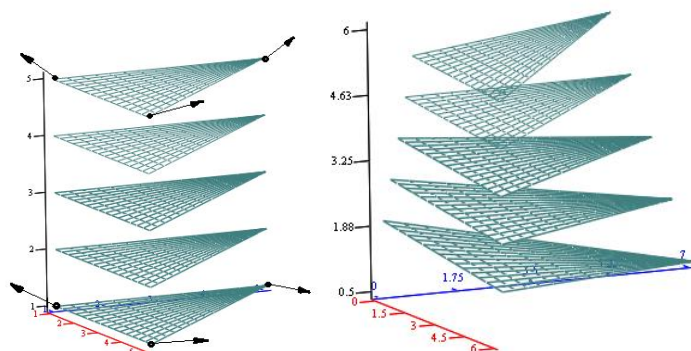


Рис. 6. Изменение формы исходной треугольной призмы при перемещении угловых точек

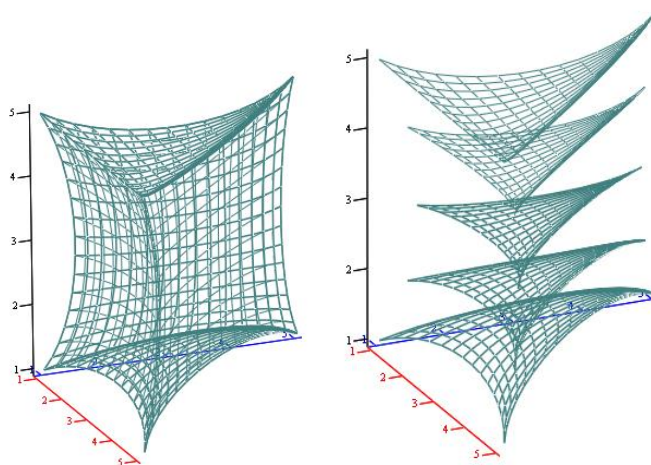


Рис. 7. Изменение формы поверхностей внутри тела с граничными кривыми

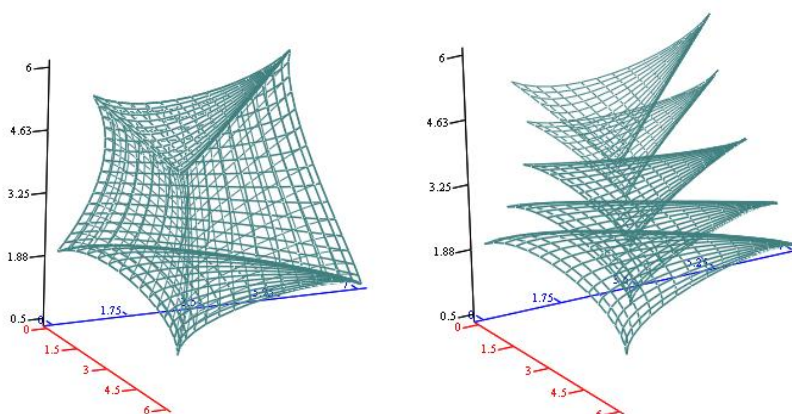


Рис. 8. Изменение формы поверхностей внутри тела с граничными кривыми при перемещении угловых точек

Предлагаемая система реализована в среде MathCAD, использует параметрические тела с граничными поверхностями Кунса для моделирования внешней и внутренней формы тела. Представленные примеры треугольных призматических элементов тела показывают, как можно легко определить и описать внутреннее пространство тела многослойной структуры. Дальнейшим продолжением исследований внутреннего пространства является деформация и метаморфозы форм, обсуждаемых в этой работе.

Авторы видят преимущество этого метода в возможности определения граничных и внутренних начальных условий до численного моделирования. Этот метод хорошо работает при инженерном моделировании различных конструкций многослойной структуры в условиях свободной деформации. Параметрические твердые тела на треугольном призматическом каркасе могут эффективно применяться при решении задачи трехмерной градации тел с неоднородной структурой, которые сейчас исследуются.

Литература

1. Голованов Н. Н. Геометрическое моделирование. Москва: Изд-во Физико-математической литературы, 2002. 472 с. Текст: непосредственный.
2. Farin G. Curves and surface for CAGD. 5th ed. Academic Press, 2002. 521 p.
3. Малоземов В. Н., Сергеев А. Н., Чашников Н. В. Поверхности Кунса на треугольнике // Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD» (Санкт-Петербург, 7 апреля 2007 г.). Санкт-Петербург, 2007. С. 1–6. URL: <http://www.dha.spb.ru/> (дата обращения: 24.05.2021). Текст: электронный.
4. Капеллохин И. А., Малоземов В. Н., Сергеев А. Н. Поверхности Безье на треугольнике. Перепараметризация // Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & CAGD» (Санкт-Петербург, 10 марта 2007 г.). Санкт-Петербург, 2007. С. 1–7. URL: <http://www.dha.spb.ru/ reps07.shtml#0310> (дата обращения: 24.05.2021). Текст: электронный.
5. Фокс А., Пратт М. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве: перевод с английского. Москва: Мир, 1982. 304 с. Текст: непосредственный.

MODELING GEOMETRIC BODIES
ON A TRIANGULAR PRISMATIC FRAME

Tumen V. Ayusheev

Dr. Sci. (Engineering), A/Prof.,
East Siberian State University of Technology and Management
40v Klyuchevskaya St., Ulan-Ude 670013, Russia
Dorzhi Banzarov Buryat State University
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia
E-mail: tvaush@yandex.ru

Olga D. Rakshaeva

Postgraduate student,
East Siberian State University of Technology and Management
40v Klyuchevskaya St., Ulan-Ude 670013, Russia
E-mail: raksh_od@mail.ru

Abstract. This article discusses the issues of geometric modeling of three-dimensional bodies of a multilayer structure on a triangular prismatic frame and their description by cubic parametric splines. An equation for a patch of a body is derived, which makes it possible to model both its shape and isotropic interior. Computational experiments with the patch of the bodies with rectilinear and curved boundaries, which can be used in numerical modeling, are presented. Parametric solids can be joined together to form a complicated shape. Continuity between elements can be defined as in modeling cubic parametric splines.

Keywords: geometric modeling, three-dimensional solids, triangular prism, cubic splines