УДК **517.9**
doi: 10.18101/978–5–9793–0814–2–248–250

Задача о наклонной производной для системы гармонических функций

© **Кибирев Владимир Васильевич**
кандидат физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Бурятского государственного университета, г.Улан-Удэ
E-mail: kafedra_pm@bsu.ru

В работе предложен метод редукции задачи о наклонной производной к исследованию некоторой динамической системы. Доказана теорема о том, что задача с наклонной производной для гармонических функций при определенных условиях имеет единственное решение.

Ключевые слова: наклонная производная, гармонические функции.

The oblique derivative problem for a system of harmonic functions

Vladimir V. Kibirev
PhD in Physics and Mathematics, Professor, Ulan-Ude, Buryat State University, Department of Applied Mathematics

In this article the reduction method of sloping derivative task for research some dynamic system is proposed. The theorem of unique solution is proved.

Keywords: sloping derivative, harmonic functions.

Постановка задачи.

Для исследования задачи о наклонной производной для гармонических функций в [1] предложен метод редукции этой задачи к исследованию некоторой динамической системы. В [2] этот метод получил дальнейшее развитие. Задачу о наклонной производной будем рассматривать в следующей постановке:

Найти три регулярные в шаре $D:\ x^2+y^2+z^2<1$ непрерывно дифференцируемые в замкнутом шаре $\overline{D}$ гармонические функции u, v, w, удовлетворяющие на границе шара условиям

$$\begin{aligned} &2u + xu_x + yv_x + zw_x = h, \\ &2v + xu_y + yv_y + zw_y = g, \\ &2w + xu_z + yv_z + zw_z = f, \end{aligned} \tag{1}$$

где h, g, f - непрерывно дифференцируемые на сфере $S:\ x^2+y^2+z^2=1$ функции.

Исследование.

Если функции u, v, w – гармонические, то функции $F_1 = 2u + xu_x + yv_x + zw_x$, $F_2 = 2v + xu_y + yv_y + zw_y$, $F_3 = 2w + xu_z + yv_z + zw_z$ являются бигармоническими и имеют место представление

$$\begin{aligned} &2u + xu_x + yv_x + zw_x = h(x,y,z) + (1-x^2-y^2-z^2)h_1(x,y,z), \\ &2v + xu_y + yv_y + zw_y = g(x,y,z) + (1-x^2-y^2-z^2)g_1(x,y,z), \\ &2w + xu_z + yv_z + zw_z = f(x,y,z) + (1-x^2-y^2-z^2)f_1(x,y,z), \end{aligned} \tag{2}$$

где h, h_1, g, g_1, f, f_1 – регулярные в шаре D гармонические функции [3].

Подействовав оператором Лапласа на систему (2), имеем

$$2u_{xx} + 2v_{xy} + 2w_{xz} = -6h_1 - 4r\frac{\partial h_1}{\partial r},$$
$$2u_{xy} + 2v_{yy} + 2w_{yz} = -6g_1 - 4r\frac{\partial g_1}{\partial r},$$
$$2u_{xz} + 2v_{yz} + 2w_{zz} = -6f_1 - 4r\frac{\partial f_1}{\partial r},$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_x + v_y + w_z) = -3h_1 - 2r\frac{\partial h_1}{\partial r},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(u_x + v_y + w_z) = -3g_1 - 2r\frac{\partial g_1}{\partial r},$$
$$\frac{\partial}{\partial z}(u_x + v_y + w_z) = -3f_1 - 2r\frac{\partial f_1}{\partial r}, \qquad (3)$$

Обозначим для краткости $u_x + v_y + w_z$ через H, т.е.

$$u_x + v_y + w_z = H, \qquad (4)$$

Тогда перепишем систему (3) в виде

$$H_x = 2\left(x\frac{\partial h_1}{\partial x} + y\frac{\partial h_1}{\partial y} + z\frac{\partial h_1}{\partial z}\right) - 3h_1,$$
$$H_y = -2\left(x\frac{\partial g_1}{\partial x} + y\frac{\partial g_1}{\partial y} + z\frac{\partial g_1}{\partial z}\right) - 3g_1,$$
$$H_x = -2\left(x\frac{\partial f_1}{\partial x} + y\frac{\partial f_1}{\partial y} + z\frac{\partial f_1}{\partial z}\right) - 3f_1, \qquad (5)$$

Пусть $h_1 = G_x, g_1 = G_y, f_1 = G_z$, тогда система (5) примет вид

$$-2\ \ xG_{xx} + yG_{xy} + zG_{xz}\ \ -3G_x = H_x,$$
$$-2\ \ xG_{xy} + yG_{yy} + zG_{yz}\ \ -3G_y = H_y,$$
$$-2\ \ xG_{xz} + yG_{zy} + zG_{zz}\ \ -3G_z = H_z,$$

Переписав последнюю систему по-другому, можно получить

$$-2\frac{\partial}{\partial x}\ \ xG_x + yG_y + zG_z\ \ -G_x = H_x,$$
$$-2\frac{\partial}{\partial y}\ \ xG_x + yG_y + zG_z\ \ -G_y = H_y,$$
$$-2\frac{\partial}{\partial z}\ \ xG_x + yG_y + zG_z\ \ -G_z = H_z, \qquad (6)$$

Из этой системы легко получаем следующее равенство:

$$2\ \ xG_x + yG_y + zG_z\ \ + G = -H \qquad (7)$$

Перепишем эту систему (2) так:

$$2u + xu_x + yv_x + zw_x = h + (1 - r^2)G_x,$$
$$2v + xu_y + yv_y + zw_y = g + (1 - r^2)G_y,$$
$$2w + xu_z + yv_z + zw_z = f + (1 - r^2)G_z, \qquad (2^*)$$

Продифференцируем первое уравнение последней системы по *x*, второе по *y*, третье по *z*, сложим полученные уравнения и получим

$$3(u_x + v_y + w_z) = h_x + g_y + f_z - 2xG_x - 2yG_y - 2zG_z.$$

Из уравнения (7) и последнего уравнения имеем следующее равенство:

$$3(u_x + v_y + w_z) = h_x + g_y + f_z + G + H$$

Согласно нашему обозначению (4), последнее равенство запишем так:

$$2(u_x + v_y + w_z) - h_x - g_y - f_z = G\cdot \qquad (8)$$

Возвращаясь к системе (2) и используя тождества вида $xu_x + yv_x + zw_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}(xu + yv + zw) - u$, получим

$$u + \frac{\partial}{\partial x}(xu + yv + zw) = h + (1 - r^2)G_x,$$
$$v + \frac{\partial}{\partial y}(xu + yv + zw) = g + (1 - r^2)G_y,$$
$$w + \frac{\partial}{\partial z}(xu + yv + zw) = f + (1 - r^2)G_z, \qquad (9)$$

Пусть

$$xu + yv + zw = \omega \qquad (10)$$

Умножим первое уравнение системы (9) на x, второе на y, третье на z, сложим полученные уравнения и, учитывая обозначение (10), получим, что

$$\omega + r\frac{\partial \omega}{\partial r} = xh + yg + zf + (1 - r^2)r\frac{\partial G}{\partial r} \qquad (11)$$

Применяя оператор Лапласа к обеим частям уравнения (10), можно (8) переписать так:

$$\Delta\omega = h_x + g_y + f_z + G \cdot \qquad (12)$$

Применяя оператор Лапласа к обеим частям уравнения (11), имеем

$$r\frac{\partial \Delta\omega}{\partial r} + 3\Delta\omega = 2(h_x + g_y + f_z) - 6r\frac{\partial G}{\partial r} - 4r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial G}{\partial r}\right),$$

Учитывая равенство (12), перепишем последнее равенство следующим образом:

$$r\frac{\partial}{\partial r}(h_x + g_y + f_z) + h_x + g_y + f_z = -4r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial G}{\partial r}\right) - 7\frac{\partial G}{\partial r} - 3G$$

Из этого уравнения видно, что по заданным h, g, f однозначно определяется функция $G(x, y, z)$. А тогда из системы (9) также однозначно определяются искомые гармонические функции u, v, w. Таким образом доказана

Теорема. Задача (1) разрешима для любых h, g, f *и имеет единственное решение.*

Заключение

Таким образом, доказана теорема о том, что задача (1) о наклонной производной для гармонических функций имеет единственное решение, удовлетворяющее определенным условиям.

Литература

1. Бицадзе А.В. Задача наклонной производной с полиноминальными коэффициентами // Докл. Акад. Наук СССР. – 1964. – Т. 157. – № 6. – С. 1273–1276.
2. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. – М.: Наука, 1966. –285 с.
3. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. – М.: Гостехиздат, 1950. – 630 с.
4. Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1965. – 580 с.
5. Янушаускас А.И. Применение вырождающихся уравнений к изучению задачи о наклонной производной // Дифференц. Уравнения. – 1969. – Т. 5, № 1. – С. 81–90.

References

1. Bitsadze A.V. Zadacha naklonnoi proizvodnoi s polinominalnimi koefficientami // Dokl. Akad. Naur SSSR. – 1964. – T. 157. – # 6. – S. 1273-1276.
2. Bitsadze A.V. Kraevie zadachi dlya ellipticheskih uravnenii vtorogo poriadka. – M.: Nauka, 1966. – 285 s.
3. Golubev V.V. Leksii po analiticheskoi teorii differencialnih uravnenii. – M.: Gostehizdat. 1950. – 630 s.
4. Kurant R. Uravnenia s chastnimi proizvodnimi. – M.: Mir, 1965. – 580 s.
5. Yanyshauskas A.I. Primemenie virojdaiyshihsa uravnenii k izucheniu zadachi o naklonnoi proizvodnoi // Differehc. Uravneniya. – 1969. – T.5, # 1. – S. 81-90.