Бурятский государственный университет
имени Доржи Банзарова
Региональный научно-образовательный математический центр
Томского государственного университета

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ В УСЛОВИЯХ ЦИФРОВИЗАЦИИ

Материалы научной конференции
с международным участием,
посвященной 90-летию БГПИ-БГУ

(г. Улан-Удэ — пос. Энхалук — оз. Байкал,
30 июня — 2 июля 2022 г.)

Улан-Удэ
Издательство Бурятского госуниверситета
2022

УДК 514.75-77, 51.72-74, 372.851
ББК 22, 74.
М 34

Сборник размещен в системе РИНЦ
на платформе Научной электронной библиотеки eLibrary.ru

Текст печатается в авторской редакции

М 34 **Математика и математическое образование в условиях цифровизации:** материалы научной конференции с международным участием, посвященной 90-летию БГПИ-БГУ (г. Улан-Удэ — оз. Байкал, 30 июня — 2 июля 2022 г.) / ответственный редактор В. Б. Цыренова. — Улан-Удэ: Изд-во Бурятского госуниверситета, 2022. — 178 с.
ISBN 978-5-9793-1779-3

В сборник включены тезисы и статьи участников научной конференции с международным участием, посвященной 90-летию БГПИ-БГУ «Математика и математическое образование в условиях цифровизации». Представлены следующие направления: некоторые проблемы современной математики, вопросы преподавания математики, математическое и компьютерное моделирование прикладных задач механики, теоретические основы и современные тенденции информационных технологий.

Mathematics and mathematical education in the conditions of digitalization: materials of a scientific conference with international participation dedicated to the 90th anniversary of BSPI-BSU (Ulan-Ude — Lake Baikal, June 30 — July 2, 2022) / sci. ed. by V. B. Tsyrenova. — Ulan-Ude: Buryat State University Publishing Department, 2022. — P. 178.
ISBN 978-5-9793-1779-3

The book includes the participants` abstracts and articles of the scientific conference with international participation dedicated to the 90th anniversary of BSPI-BSU "Mathematics and mathematical education in the conditions of digitalization". There are following fields such as: some problems of modern mathematics, questions of teaching mathematics, mathematical and computer modeling of applied problems of mechanics, theoretical foundations and current trends in information technology.

УДК 514.75-77, 51.72-74, 372.851
ББК 22, 74.

ISBN 978-5-9793-1779-3

НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

УДК 515.162

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА НА КОНИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ

© **Вьюнг Бао**
кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник,
Региональный научно-образовательный математический центр,
Томский государственный университет
Россия, 634028 г. Томск, пр. Ленина 36
vuonghuubao@live.com

Аннотация. В данной статье даются некоторые основные понятия геометрической структуры на многообразиях, орбифолдах и конических многообразий, исследуются основные геометрические инварианты одного конического многообразия. Сингулярное множество данного конического многообразия представляет собой узел-трилистник с мостом, а подлежащее пространство является трехмерной сферой.

Ключевые слова: коническое многообразие, Евклидова структура, объем, узел трилистник.

GEOMETRIC STRUCTURES ON CONE-MANIFOLDS

Bao Vuong
PhD, junior researcher,
Regional scientific and educational mathematical center,
Tomsk State University
Russia, 634028, Tomsk, Lenin Avenue, 36
vuonghuubao@live.com

Abstract. In this article, we give some basic notions of geometric structure on manifolds, orbifolds and cone-manifolds. We investigate the main geometric invariants of a cone-manifold. Singular set of the cone-manifold is the trefoil knot with a bridge and underlying space is the three-dimensional sphere.

Keywords: cone-manifold, Euclidean structure, volume, trefoil knot.

2-мостовой узел — это узел, который можно регулярно изотопировать так, чтобы естественная функция высоты, заданная координатой z, имела только два максимума и два минимума в качестве критических точек. Эквивалентно, это узлы с номером моста 2, наименьшим возможным номером моста для нетривиального узла. Другими названиями узлов с двумя мостами являются рациональные узлы, 4-платы и Viergeflechte (по-немецки «четыре косы»). Связи с двумя мостами определяются так же, как и выше, но каждый компонент будет иметь по одному минимальному и максимальному значению. 2-мостовые узлы были классифицированы Хорстом Шубертом с использованием того факта, что 2-листное разветвленное покрытие 3-сферы над узлом является линзовым пространством.

Евклидова конусная структура на $(S^3, L) = L(\alpha)$ — это метрика на S^3, сингулярная на зацепление L, которая является гладкой римановой метрикой на $S^3 \setminus L$ постоянной кривизны 0, а в окрестности каждой точки L имеет выражение в цилиндрических координатах:

$$ds^2 = dr^2 + \left(\frac{\alpha}{2\pi} r\right)^2 d\theta^2 + dh^2$$

где $\alpha > 0$ — конический угол, $r > 0$ — расстояние до сингулярного геометрического зацепления , θ — пересчитанный параметр угла вокруг L, а $h \in \mathbb{R}$ — параметр высоты или длины вдоль L. Когда $\alpha = 2\pi$, это стандартная гладкая метрика $\mathbb{R}^3$, а когда $\alpha = 2\pi / k$ для некоторого целого числа k, это метрика орбифолдов, и для $k = 1$ орбифолд является многообразием. Аналогичное определение применяется к сферическим и гиперболическим коническим структурам путем замены аффинного расстояния r тригонометрическими функциями и гиперболическими тригонометрическими функциями r соответственно.

А. Медных и А. Рассказов в [1] построили каноническое фундаментальное множество для орбифолдов с 2-мостовыми зацеплениями в гиперболических, евклидовых и сферических трехмерных пространствах. Дж. Порти [2] исследовал сферическую коническую структуру на 2-мостовых зацеплениях.

В данной работе исследуется евклидова структура узла-трилистник с мостом, который является частным случаем 2-мостовых зацеплений с мостом. В случае с обыкновенным трилистником было проделано несколько работ. Узел-трилистник 3_1 является торическим узлом, обозначаемым $T(2,3)$. Это также 2-мостовой узел с обозначением $K(3/4)$ или $K(3/5)$ в зависимости от внешней ориентации. У. Терстон доказал, что дополнение к узлу-трилистнику $S^3 \setminus 3_1$ не допускает гиперболической структуры, но допускает две другие структуры [4], а именно $H^2 \times E$ и $\widetilde{PSL(2,R)}$. Зейферт и Вебер [5] показывают, что сферический пространственный додекаэдр (сфера гомологии Пуанкаре) представляет собой циклическое 5-кратное покрытие S^3, разветвленное над узлом-трилистником. Таким образом, орбифолд $3_1(2\pi/5)$ с узлом-трилистником сингулярного геометрического места и углом конуса $2\pi/5$ имеет сферическую структуру. По классификации Данбара [6] орбифолд $3_1(2\pi/n)$ является сферическим орбифолдом, когда $n<5$; Nil-орбифолдом, когда, $n=6$ и $\widetilde{PSL(2,R)}$-орбифолд, когда $n \geq 7$. Сферическая структура на коническом многообразии $3_1(\alpha)$ изучается в [7]. Теперь обозначим через $3_1(\alpha,\gamma)$ конусное многообразие с подлежащим пространством S^3. Сингулярным местом $3_1(\alpha,\gamma)$ является узел-трилистник 3_1 с перемычкой, конический угол вдоль компонент узла равен α, а конический угол вдоль моста равен γ (рис. 1).

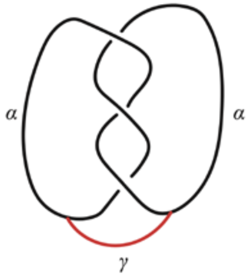


Рис. 1. Коническое многообразие $3_1(\alpha,\gamma)$

Рассмотрим узел-трилистник 3_1 (рис. 2). С помощью алгоритма Виртингера мы получаем представление фундаментальной группы дополнения к узлу-трилистнику:

$$\pi_1(S^3 \setminus 3_1) = \langle s, t \mid stst^{-1}s^{-1}t^{-1} = 1 \rangle$$

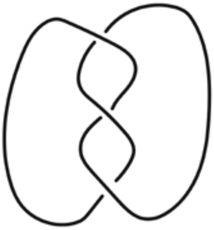


Рис. 2. Узел-трилистник.

Построим фундаментальное множество конического многообразия $3_1(\alpha, \gamma)$ в $\mathbb{E}^3$. Рассмотрим отображение голономии $\varphi : \pi_1(S^3 \setminus 3_1) \to \mathrm{Isom}(\mathbb{E}^3)$, несущее образующие s и t $\pi_1(S^3 \setminus 3_1)$ к следующим изометриям в $\mathbb{E}^3$

$$\mathcal{S}(x) = (x - e_3)S + e_3, \mathcal{T}(x) = (x + e_3)T - e_3$$

соответственно, где $e_3 = (0,0,1)$, а S и T — матрицы вращения.

Согласно [8] матрицы S и T имеют следующий вид

$$S = \frac{1}{M^2+1}\begin{bmatrix} M^2+X^2-Y^2 & 2XY & -2MY \\ 2XY & M^2-X^2+Y^2 & 2MX \\ 2MY & -2MX & -1+M^2 \end{bmatrix},$$

$$T = \frac{1}{M^2+1}\begin{bmatrix} M^2+X^2-Y^2 & -2XY & 2MY \\ -2XY & M^2-X^2+Y^2 & 2MX \\ -2MY & -2MX & -1+M^2 \end{bmatrix},$$

где $M = \cot\frac{\alpha}{2}, X = \cos\frac{\theta}{2}, Y = \sin\frac{\theta}{2}$ и θ — угол относительного поворота между сингулярными дугами.

Предположим далее, что отображение голономии переводит элемент $l = stst^{-1}s^{-1}t^{-1}$ в поворот на угол γ относительно сингулярной компоненты конического многообразия $З_1(\alpha,\gamma)$, соответствующее мосту узла-трилистника (рис. 1).

Теперь группа голономии $З_1(\alpha,\gamma)$ имеет представление как группа, порожденная поворотами $\mathcal{S}$ и $\mathcal{T}$ на угол α относительно сингулярная компонента соответствующего фундаментального множества.

Рассмотрим невыпуклый 12-гранный многогранник $FS(\alpha)$, образованный вершинами P_i, Q_j с ребрами P_iQ_j, P_iP_{i+1} и треугольными гранями $P_iP_{i+1}Q_j$, где $i=1,...,6$ и $j=0,1$ в предположении $P_7=P_1$. В этом случае удобно рассматривать невыпуклый многогранник $FS(\alpha)$ как криволинейный многогранник с двенадцатью треугольными гранями $Q_0P_iP_{i+1}, Q_1P_iP_{i+1}$, шестью тетраэдрами $Q_0Q_1P_iP_{i+1}$ при $i=1,...,6$ и четыре криволинейные грани:

$$Q_0P_1P_2P_3P_4,\ Q_0P_4P_5P_6P_1,$$
$$Q_1P_6P_1P_2P_3,\ Q_1P_3P_4P_5P_6.$$

Обратите внимание, что каждая из этих криволинейных граней состоит из трех треугольников.

Невыпуклый многогранник $FS(\alpha)$ называется каноническим фундаментальным множеством конического многообразия $З_1(\alpha,\gamma)$ (рис. 3), если он обладает следующими свойствами:

(i) Существуют некоторые евклидовы повороты $\mathcal{S}$ и $\mathcal{T}$, которые идентифицируют криволинейные грани:

$$\mathcal{S}: Q_0P_1P_2P_3P_4 \to Q_0P_4P_5P_6P_1,$$
$$\mathcal{T}: Q_1P_6P_1P_2P_3 \to Q_1P_3P_4P_5P_6.$$

(ii) Сумма внутренних двугранных углов вдоль ребер 6-угольника $P_1...P_6$ равна γ.

(iii) Внутренние двугранные углы вдоль ребер $Q_0P_1, Q_0P_4, Q_1P_3, Q_1P_6$ равны α.

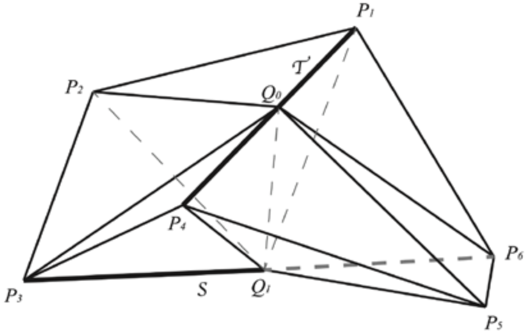


Рис. 3. Фундаментальное множество

Доказали следующие теоремы:

Теорема 1. Пусть $\pi/3 < \alpha < 5\pi/3$, а γ определяется следующим уравнением

$$\cos\gamma = \frac{1}{729}(521 + 1200\cos\alpha - 2112\cos^2\alpha + 448\cos^3\alpha +$$
$$1920\cos^4\alpha - 1536\cos^5\alpha + 512\cos^6\alpha)$$

Тогда коническое многообразие $3_1(\alpha,\gamma)$ допускает евклидову структуру. Более того, в $\mathbb{E}^3$ существует 12-гранный многогранник, являющийся каноническим фундаментальным множеством конусного многообразия $3_1(\alpha,\gamma)$.

Теорема 2. Евклидов объем конусного многообразия $3_1(\alpha,\gamma)$ равен

$$\mathrm{Vol}(3_1(\alpha,\gamma)) = 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{9 - 14\cos\alpha + 4\cos 2\alpha}{3 - 4\cos\alpha + \cos 2\alpha}}.$$

Литература

1. Mednykh A., Rasskazov A. On the structure of the canonical fundamental set for 2-bridge link orbifolds. // Universitt Bielefeld, Sonderforschungsbereich 343, Discrete Structuren in der Mathematik, 1998. (preprint, 98062).

2. Porti J., Spherical cone structures on 2–bridge knots and links // Kobe J. Math. 2004. 21:1–2, 61–70.

3. Thurston W. P. Hyperbolic geometry and 3-manifolds // Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1982. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; V. 48).

4. Neumann W. P. Notes on geometry and 3-manifolds, with appendix by Paul Norbury // Low dimensional topology. Bolyai Soc. Math. Studies. 1999. 8. 191–267.

5. Seifert H., Weber C. Die beiden Dodecaederrame // Math. Z., 1933. Bd. 37. S. 237–253.

6. Dunbar W. D. Geometric orbifolds // Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid. 1988. 1. 67–99.

7. Derevnin, D., Mednykh, A., Mulazzani M. Geometry of trefoil conemanifold // Annales Univ. Sci. Budapest. 2014. 57. 3–14.

8. Shmatkov R. N. Properties of Euclidean Whitehead link cone-manifolds // Sib. Adv. Math. 2003. 13(1). 55–86.

УДК 517.977

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОПТИМИЗАЦИИ ВЫРОЖДЕННЫХ БИЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

© **Казьмин Иван Дмитриевич**
аспирант
kazminvanya@mail.ru

© **Гунов Павел Валерьевич**
аспирант
pgunov@mail.ru

Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5

Аннотация. В билинейном классе задач оптимального управления рассматривается неявный метод принципа максимума на основе операции максимизации. Предлагаемый подход оптимизации основывается на операторных формах принципа максимума, имеющих вид задач о неподвижной точке в пространстве управлений. Такое представление дает возможность применить и модифицировать известные методы неподвижных точек для поиска решений рассматриваемых билинейных задач оптимального управления. На каждой итерации модифицированных неявных итерационных алгоритмов на основе операции максимизации по фазовой и сопряженной переменным решается специальная задача Коши в пространстве управлений. Конструируемые алгоритмы позволяют находить вырожденные управления, удовлетворяющие принципу максимума, и строить сходящиеся по невязке принципа максимума итерационные последовательности управлений. На тестовом примере демонстрируются преимущества предлагаемого метода принципа максимума на основе операции максимизации в классе билинейных управляемых систем, в сравнении с известным методом условного градиента.

Ключевые слова: билинейная управляемая система, принцип максимума, операция максимизации, вырожденное управление.

ON ONE METHOD OF OPTIMIZATION OF SINGULAR BILINEAR CONTROL SYSTEMS

Kazmin Ivan D.
Graduate Student
kazminvanya@mail.ru

Gunov Pavel V.
Graduate Student
pgunov@mail.ru

Dorzhi Banzarov Buryat State University
5 Ranzhurova St., Ulan-Ude, 670000, Russia

Abstract. In the bilinear class of optimal control problems, an implicit method of the maximum principle based on the maximization operation is considered. The proposed optimization approach is based on the operator forms of the maximum principle, which have the form of fixed point problems in the control space. This representation makes it possible to apply and modify known fixed point methods to find solutions to the considered bilinear optimal control problems. At each iteration of the modified implicit iterative algorithms, a special Cauchy problem in the control space is solved based on the maximization operation for phase and conjugate variables. The constructed algorithms make it possible to find singular controls satisfying the maximum principle and to construct iterative control sequences converging on the discrepancy of the maximum principle. A test example demonstrates the advantages of the proposed method of the maximum principle based on the maximization operation in the class of bilinear controlled systems, in comparison with the well-known conditional gradient method.

Keywords: bilinear control system, maximum principle, maximization operation, singular control.

Введение. Математические постановки билинейных управляемых систем рассматривались в работах [1–2]. Классическим для решения билинейных задач оптимального управления является градиентный метод [3]. В работе [4] на основе построения нестандартных формул приращения целевого функционала, не содержащих остаточных членов разложений, разработаны эффективные методы нелокального улучшения управления в билинейных управляемых системах. Улучшение управления достигается решением специальных задач Коши для фазовых и сопряженных систем в пространстве состояний.

В данной работе предлагается подход [5], основанный на решении специальных операторных задач о неподвижной точке в пространстве управлений. Это позволяет применить и модифицировать известную теорию и методы неподвижных точек для конструирования итерационных алгоритмов, которые позволяют находить вырожденные управления, удовлетворяющие принципу максимума.

1. Методы принципа максимума на основе операции максимизации. Рассматривается класс задач оптимального управления:

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_T F(x(t),u(t),t)dt \to \inf_{u\in V},$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u(t),t),\ x(t_0) = x^0,\ u(t) \in U \subset R^m,\ t \in T = [t_0,t_1],$$

в котором функция $\varphi(x)$ линейна на R^n, функции $f(x,u,t)$, $F(x,u,t)$ линейны по переменной x, линейны по переменной u и непрерывны по переменной t на множестве $R^n \times U \times T$.

Вектор $x(t) = (x_1(t),...,x_n(t))$ описывает состояние системы. Управление $u(t)$, $t \in T$ моделируется кусочно-непрерывной скалярной функцией со значениями в компактном и выпуклом множестве $U \subset R^m$. Множество V обозначает соответствующее множество допустимых управлений. Начальное состояние x^0 и временной интервал T имеют фиксированные значения.

Функция Понтрягина с сопряженной переменной ψ в задаче (1), (2) имеет вид:

$$H(\psi,x,u,t) = \langle\psi, f(x,u,t)\rangle - F(x,u,t),$$

Стандартная сопряженная система представляется в виде:

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t),x(t),u(t),t),$$

Пусть $v \in V$. Введем следующие обозначения:

– $x(t,v)$, $t \in T$ — решение системы (1) при $u(t) = v(t)$;

– $\psi(t,v)$, $t \in T$ — решение стандартной сопряженной системы (3) при $x(t) = x(t,v)$, $u(t) = v(t)$.

Отображение v^* определяется соотношением:

$$v^*(\psi,x,t)=\arg\max_{w\in U} H(\psi,x,w,t),\ \psi\in R^n,\ x\in R^n,\ t\in T.$$

Известный принцип максимума для управления $v\in V$ можно представить в форме задачи о неподвижной точке:

$$v(t)=v^*(\psi(t,v),x(t,v),t),\ t\in T.$$

Для решения задачи о неподвижной точке принципа максимума рассматривается неявный итерационный алгоритм на основе операции максимизации по фазовой переменной:

$$v^{k+1}(t)=v^*(\psi(t,v^k),x(t),t),\ t\in T, \tag{4}$$

где $x(t)$ — решение специальной фазовой задачи Коши:

$$\dot{x}(t)=f(x(t),v^*(\psi(t,v^k),x(t),t),t),\ x(t_0)=x^0.$$

Алгоритм (4) допускает эквивалентную запись в форме:

$$v^{k+1}(t)=v^*(\psi(t,v^k),x(t,v^{k+1}),t),\ t\in T.$$

Неявный итерационный алгоритм на основе операции максимизации по сопряженной переменной для решения задачи о неподвижной точке принципа максимума имеет вид:

$$v^{k+1}(t)=v^*(\psi(t),x(t,v^k),t),\ t\in T, \tag{5}$$

где $\psi(t)$ — решение специальной сопряженной задачи Коши:

$$\dot{\psi}(t)=f(x(t),v^*(\psi(t),x(t,v^k),t),t),\ \psi(t_1)=-\varphi_x(x(t_1,v)).$$

Алгоритм (5) допускает эквивалентную запись в форме:

$$v^{k+1}(t)=v^*(\psi(t,v^{k+1}),x(t,v^k),t),\ t\in T.$$

2. Пример. Рассматривается пример аналитического и численного расчета билинейной вырожденной задачи предлагаемыми алгоритмами (4),(5).

Рассматривается билинейная задача:

$$\Phi(u)=\int_0^2 u(t)x(t)dt\to\inf_{u\in V},$$

$$\dot{x}(t)=u(t),\ x(0)=1,\ u(t)\in U=[-1,1],\ t\in T=[0,2].$$

Функция Понтрягина и сопряженная система имеют вид:

$$H(\psi,x,u,t)=(\psi-x)u,$$

$$\dot{\psi}(t)=u(t),\ \psi(2)=0.$$

Возьмем в качестве стартового управления $v^0 = 0$ с соответствующей фазовой траекторией $x(t, v^0) = 1$, $t \in T$ и значением функционала $\Phi(v^0) = 0$.

Тогда специальная задача Коши на основе операции максимизации по сопряженной переменной имеет вид:

$$\psi(t) = sign(\psi(t) - 1),\ \psi(2) = 0.$$

Функция переключения: $g(\psi, t) = \psi - 1$.

Так как $g|_{t=2} = -1 < 0$, то имеем задачу Коши:

$$\dot{\psi}(t) = -1,\ \psi(2) = 0.$$

$$\psi(t) = 2 - t.$$

$$g|_t = 1 - t < 0 \text{ при } t \in (1, 2].$$

Поскольку, $g|_{t=1} = 0$, а знак нуля не определен то имеем три возможных случая при $t < 1$:

1) $g|_{t<1} > 0$,

2) $g|_{t<1} < 0$,

3) $g|_{t<1} = 0$.

1) Рассмотрим случай $g|_{t<1} > 0$, тогда имеем задачу Коши:

$$\dot{\psi}(t) = 1,\ \psi(1) = 1.$$

$$\psi(t) = t.$$

Функция переключения $g|_{t<1} = t - 1 < 0$, следовательно, имеем противоречие.

2) Рассмотрим случай $g|_{t<1} < 0$, тогда имеем задачу Коши:

$$\dot{\psi}(t) = -1,\ \psi(1) = 1.$$

$$\psi(t) = 2 - t.$$

Функция переключения $g|_{t<1} = -t + 1 > 0$, следовательно, имеем противоречие.

3) Рассмотрим случай $g|_{t<1} = 0$, тогда дифференцируя это тождество, имеем $v = 0$.

Таким образом, решение имеет вид:

$v^1(t) = -1$, $x(t) = -t + 2$ при $t \in (1, 2]$,

$v^1(t) = 0$, $x(t) = 1$ при $t \in [0,1)$.

$\Phi(v^1) = -0.5$.

Аналогично получим $v^2(t)$:

$v^2(t) = -1$, $x(t) = -t + 2$ при $t \in (1, 2]$,

$v^2(t) = 0$, $x(t) = 1$ при $t \in [0,1)$.

Таким образом, $v^2(t) = v^1(t)$ при $t \in [0, 2]$, полученное управление является экстремальным.

Найдем теперь решение этой же билинейной задачи с тем же стартовым управлением градиентным методом:

Найдем решения $x(t, v^0)$ и $\psi(t, v^0)$:

$$x(t, v^0) = 1,\ \psi(t, v^0) = 0.$$

Определим вспомогательное управление

$v^0(t) = \arg\max\limits_{-1 \le v \le 1}(-v) = -1$.

Определим семейство управлений $u^0_\beta(t) = -\beta$.

Найдем представление функционала $\Phi(u^0_\beta)$, для этого решим задачу Коши:

$\dot{x}(t) = -\beta$, $x(0) = 1$.

$x(t) = 1 - \beta t$.

$\Phi(u^0_\beta) \to \min$,

$2\beta(\beta - 1) \to \min$, $0 \le \beta \le 1$,

$\beta = 0.5$, $v^1 = -0.5$.

Найдем $x(t, v^1) = 1 - 0.5t$:

$\Phi(v^0) = 0$, $\Phi(v^1) = -0.5$, $\Phi(v^0) > \Phi(v^1)$.

Найдем $\psi(t, v^1)$, для этого решим задачу Коши:

$$\dot{\psi}(t) = -0.5,\ \psi(2) = 0.$$

$\psi(t) = 1 - 0.5t$.

Определим вспомогательное управление $v^1(t) = \arg\max\limits_{-1 \le v \le 1}(0)v$.

Таким образом, метод условного градиента не может определить однозначно первое приближение управления на вырожденных интервалах управления, где функция переключения равна нулю, т. е. метод условного градиента не работает на данном примере.

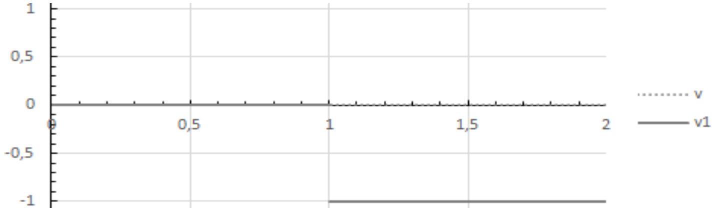
Численные расчеты фазовых и сопряженных задач Коши проводились на языке Fortran PowerStation 4.0 с помощью модуля DIVPRK библиотеки IMSL [6]. Данный модуль использует метод Рунге-Кутта-Вернера, который имеет (5-6) порядок точности. Значения вычисленных управляемых, фазовых и сопряженных переменных сохранялись в узлах заданной на интервале T равномерной сетки T_h с шагом дискретизации $h > 0$. При численном решении задач Коши значения управления в промежутках между соседними узлами сетки T_h принимались равным значению в левом узле. Численный расчет задач о неподвижной точке проводился до выполнения следующего критерия остановки:

$$\max\left\{\left|v^{k+1}(t) - v^{k}(t)\right|, t \in T_h\right\} \le \varepsilon_m ,$$

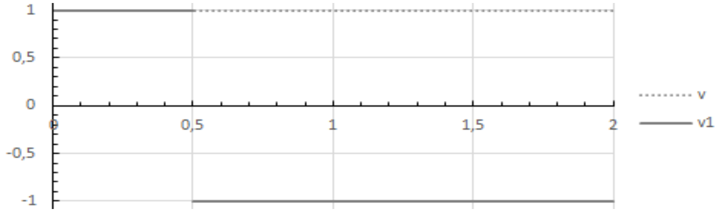
где $\varepsilon_m > 0$ — заданная точность расчета задачи о неподвижной точке.

Численное решение на основе операции максимизации по сопряженной переменной (5):

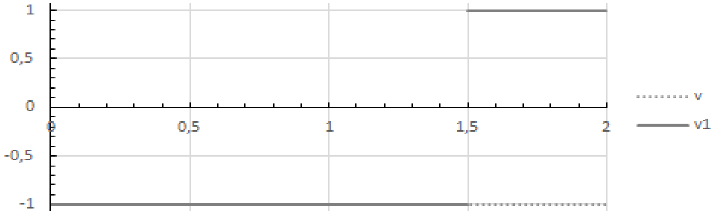
1) $v^0(t) = 0$:



2) $v^0(t) = 1$:

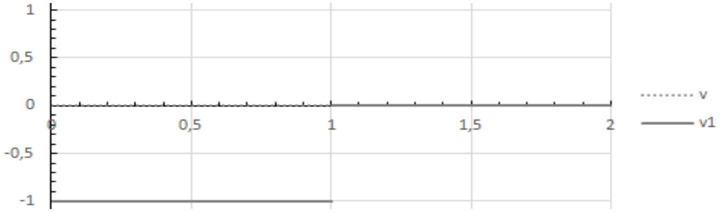


3) $v^0(t) = -1$:

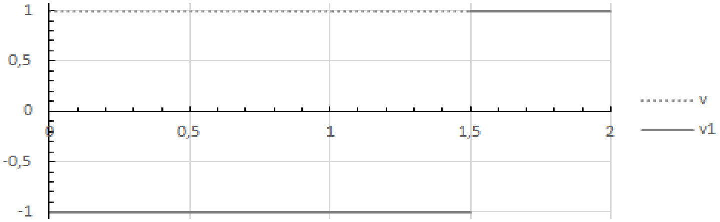


Численное решение на основе операции максимизации по фазовой переменной (4):

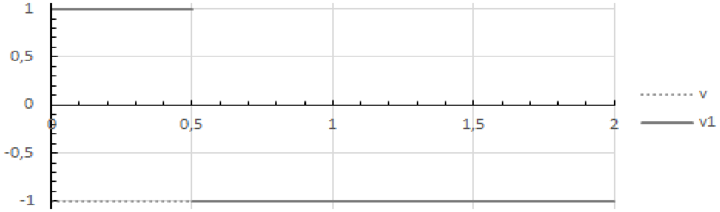
1) $v^0(t) = 0$:



2) $v^0(t) = 1$:



3) $v^0(t) = -1$:



Заключение. В классе билинейных управляемых систем предложены новые итерационные алгоритмы для реализации принципа максимума. Предлагаемые неявные итерационные алгоритмы для решения задачи о неподвижной точке принципа максимума на основе операции максимизации по сопряженной и фазовой переменным позволяют находить вырожденные управления в рассматриваемом классе систем в отличие от метода условного градиента, который не работает на вырожденных интервалах управления. Такая возможность продемонстрирована на модельной задаче. Указанное свойство предлагаемых методов поиска экстремальных управлений является важным фактором для повышения эффективности численного решения задач оптимального управления.

Литература

1. Хайлов Е. Н. Об экстремальных управлениях однородной билинейной системы, управляемой в положительном ортанте // Труды МИАН. 1998. Т. 220. С. 217–235.
2. Срочко В. А., Аксенюшкина Е. В. Задачи оптимального управления для билинейной системы специальной структуры // Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика. 2016. Т. 15. С. 78–91.
3. Васильев О. В. Лекции по методам оптимизации. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1994. 340 с.
4. Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. Москва: Физматлит, 2000. 160 с.
5. Булдаев А. С. Операторные уравнения и алгоритмы принципа максимума в задачах оптимального управления // Вестник Бурятского госуниверситета. Математика, информатика. 2020. № 1. С. 35–53.
6. Бартеньев О. В. Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL. Москва: Диалог-МИФИ, 2001. Ч. 3. 368 с.

УДК 512.54

ГРУППА СИНГУЛЯРНЫХ КРАШЕНЫХ КОС НА 4 НИТЯХ[1]

© **Козловская Татьяна Анатольевна**
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник,
Региональный научно-образовательный математический центр
Томского государственного университета,
доцент кафедры геометрии, Томский государственный университет,
634050, Томск, пр. Ленина, 36
t.kozlovskaya@math.tsu.ru

Аннотация. В работе рассмотрены структурные свойства группы сингулярных кос и группы сингулярных крашеных кос на четырех нитях. Исследована алгебраическая структура группы сингулярных крашеных кос. Найдены автоморфизмы группы сингулярных крашеных кос, индуцированные сопряжением порождающих группы сингулярных кос. Для группы сингулярных крашеных кос строится конечная система порождающих и соотношений. Доказано, что центр группы сингулярных кос на четырех нитях, являющийся бесконечной циклической группой, выделяется прямым множителем в группе сингулярных крашены кос на четырех нитях, но не выделяется прямым множителем во всей группе сингулярных кос.

Исследование ведется методом Рейдемейстера-Шрайера. С помощью этого метода найдены порождающие и определяющие соотношения группы сингулярных крашеных кос на четырех нитях.

Ключевые слова: группа кос, группа крашеных кос, группа сингулярных кос, центр группы, конечное представление.

ON 4-STRAND SINGULAR PURE BRAID GROUP

Kozlovskaya Tatyana Anatolevna
Ph. D. in Physical and Mathematical Sciences, senior scientist
of Regional Scientific and Educational Mathematical Center
of Tomsk State University, associate professor, department of geometry
of Tomsk State University 634050, Tomsk, 36 Lenin Ave.,
t.kozlovskaya@math.tsu.ru

---

[1] Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2022-884).

Abstract. In this paper, we consider the structural properties of the singular braid group and the singular pure braid group on 4 strands. The algebraic structure of the singular pure braid group is investigated. We find the automorphisms of the singular pure braid group induced by conjugation of generators the singular braid group. We construct a finite presentation for the singular pure braid group on 4 strands. It was proved that the center of the singular braid group on 4 strands which is the infinite cyclic group, is a direct factor in the singular pure braid group on 4 strands, but is not a direct factor in the singular braid group.

The study uses the Reidemeister-Shraier method. Using the Reidemeister-Shraier method let us find the generators and the defining relations of the singular pure braid group on 4 strands.

Keywords: braid group, pure braid group, singular braid group, singular pure braid group, center of group, finite presentation.

Введение

Пусть $\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_{n-1}$ это n-нитевые элементарные косы и $\sigma_1^{-1},\sigma_2^{-1},\dots,\sigma_{n-1}^{-1}$ обратные к ним (рис. 1). Обозначим через σ_i косу из n нитей, i-ая нить которой проходит «под» i+1-ой, а остальные нити вертикальны.

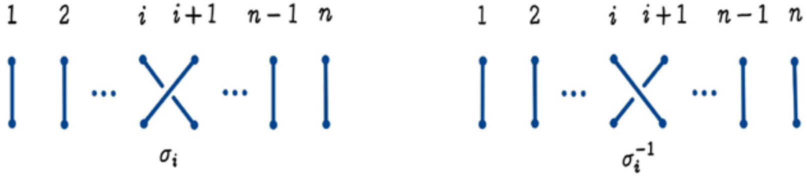


Рис. 1. *n*-нитиевы элементарные косы

Группа кос B_n, $n \geq 2$ на n нитях задается порождающими элементами $\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_{n-1}$ и определяющими соотношениями [1]:

$$\sigma_i\sigma_j=\sigma_j\sigma_i,\ |i-j|\geq 2,$$

$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i=\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1},\ i=1,2,\dots,n-2.$$

Если каждую нить покрасить в свой цвет таким образом, чтобы точки сверху и снизу соединялись одной и той же нитью одного цвета, то такие косы называются *крашеными. Группой крашеных кос* P_n называется ядро гомоморфизма группы B_n на группу подстановок S_n, отображающего порождающий σ_i в транспозицию $(i, i+1)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Понятие сингулярных кос было независимо введено Дж. Баэсом [2] и Дж. Бирман [4]. Сингулярный моноид SB_n определяется как моноид с порождающими $\sigma_i, \sigma_i^{-1}, \tau_i$ и определяющими соотношениями:

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \ |i-j| \geq 2,$$

$$\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i, \ |i-j| \geq 2,$$

$$\tau_i \sigma_j = \sigma_j \tau_i, \ |i-j| \geq 2,$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \ i = 1, 2, \ldots, n-2,$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \ i = 1, 2, \ldots, n-2,$$

$$\sigma_{i+1} \sigma_i \tau_{i+1} = \tau_i \sigma_{i+1} \sigma_i, \ i = 1, 2, \ldots, n-2.$$

При этом элементы σ_i, σ_i^{-1} порождают группу кос.

Р. Фенн Э. Кейман и К. Рурк доказали [5], что моноид Баеса-Бирман вкладывается в группу, которую они назвали группой сингулярных кос: $SB_n \to SG_n$. С каждым порождающим σ_i можно связать n-нитевую косу, а с τ_i – сингулярную n-нитевую косу в соответствии с рисунком 2.

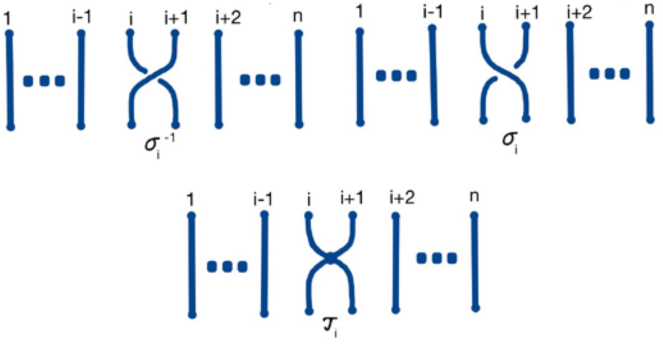


Рис. 2. Порождающие σ_i и τ_i

Определим отображение $\pi : SG_n \to S_n$ заданное на порождающих равенствами: $\pi(\sigma_i) = \pi(\tau_i) = (i, i+1)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Ядро этого отображения $\ker(\pi)$ будем называть *группой сингулярных крашеных кос* и обозначать SP_n.

Результаты

Группы сингулярных крашенных кос на 3 нитях исследована в работе [3]. Для этой группы найдены порождающие и определяющие соотношения.

Теорема 1. Группа сингулярных крашеных кос SP_4 порождается элементами $a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{14}, a_{24}, a_{34}, b_{12}, b_{13}, b_{23}, b_{14}, b_{24}, b_{34}$ и определяется соотношениями:

$$a_{12}b_{12} = b_{12}a_{12};$$

$$a_{13}b_{13} = b_{13}a_{13};$$

$$a_{23}b_{23} = b_{23}a_{23};$$

$$a_{14}b_{14} = b_{14}a_{14};$$

$$a_{12}b_{12} = b_{12}a_{12};$$

$$a_{24}b_{24} = b_{24}a_{24};$$

$$a_{34}b_{34} = b_{34}a_{34};$$

$$a_{12}^{-1}a_{13}a_{12} = a_{13}a_{23}a_{13}a_{23}^{-1}a_{13}^{-1};$$

$$a_{12}^{-1}b_{13}a_{12} = a_{13}a_{23}b_{13}a_{23}^{-1}a_{13}^{-1};$$

$$a_{12}^{-1}a_{23}a_{12} = a_{13}a_{23}a_{13}^{-1};$$

$$a_{12}^{-1}b_{23}a_{12} = a_{13}b_{23}a_{13}^{-1};$$

$$a_{12}^{-1}a_{14}a_{12} = a_{14}a_{24}a_{14}a_{24}^{-1}a_{14}^{-1};$$

$$a_{12}^{-1}b_{14}a_{12} = a_{14}a_{24}b_{14}a_{24}^{-1}a_{14}^{-1};$$

$$a_{12}^{-1}a_{24}a_{12} = a_{14}a_{24}a_{14}^{-1};$$

$$a_{12}^{-1}b_{24}a_{12} = a_{14}b_{24}a_{14}^{-1};$$

$$a_{12}^{-1}a_{34}a_{12} = a_{34};$$

$$a_{12}^{-1}b_{34}a_{12} = b_{34};$$

$$a_{13}^{-1}a_{14}a_{13}=a_{14}a_{34}a_{14}a_{34}^{-1}a_{14}^{-1};$$
$$a_{13}^{-1}b_{14}a_{13}=a_{14}a_{34}b_{14}a_{34}^{-1}a_{14}^{-1};$$
$$a_{13}^{-1}a_{24}a_{13}=[a_{14}^{-1},a_{34}^{-1}]a_{24}[a_{34}^{-1},a_{14}^{-1}];$$
$$a_{13}^{-1}b_{24}a_{13}=[a_{14}^{-1},a_{34}^{-1}]b_{24}[a_{34}^{-1},a_{14}^{-1}];$$
$$a_{13}^{-1}a_{34}a_{13}=a_{14}a_{34}a_{14}^{-1};$$
$$a_{13}^{-1}b_{34}a_{13}=a_{14}b_{34}a_{14}^{-1};$$
$$a_{23}^{-1}a_{14}a_{23}=a_{14};$$
$$a_{23}^{-1}b_{14}a_{23}=b_{14};$$
$$a_{23}^{-1}a_{24}a_{23}=a_{24}a_{34}a_{24}a_{34}^{-1}a_{24}^{-1};$$
$$a_{23}^{-1}b_{24}a_{23}=a_{24}a_{34}b_{24}a_{34}^{-1}a_{24}^{-1};$$
$$a_{23}^{-1}a_{34}a_{23}=a_{24}a_{34}a_{24}^{-1};$$
$$a_{23}^{-1}b_{34}a_{23}=a_{24}b_{34}a_{24}^{-1};$$
$$b_{12}^{-1}(a_{13}a_{23})b_{12}=a_{13}a_{23};$$
$$b_{12}^{-1}(a_{14}a_{24})b_{12}=a_{14}a_{24};$$
$$b_{12}^{-1}a_{34}b_{12}=a_{34};$$
$$b_{12}^{-1}b_{34}b_{12}=b_{34};$$
$$b_{13}^{-1}(a_{14}a_{34})b_{13}=a_{14}a_{34};$$
$$b_{13}^{-1}(a_{34}^{-1}a_{24}a_{34})b_{13}=a_{34}^{-1}a_{24}a_{34};$$
$$b_{13}^{-1}(a_{34}^{-1}b_{24}a_{34})b_{13}=a_{34}^{-1}b_{24}a_{34};$$
$$b_{23}^{-1}a_{14}b_{23}=a_{14};$$
$$b_{23}^{-1}b_{14}b_{23}=b_{14};$$
$$b_{23}^{-1}(a_{24}a_{34})b_{23}=a_{24}a_{34}.$$

Известно, что центр группы B_n — бесконечно циклическая группа, порожденная элементом:

$$\Delta_n=(\sigma_1\ldots\sigma_{n-1})^n=a_{12}(a_{13}a_{23})\ldots(a_{1n}a_{2n}\ldots a_{n-1n})\,.$$

Пусть $\delta_k=a_{1k}a_{2k}\ldots a_{k-1k}$, $k=2,3,4$. Тогда $\Delta_n=\delta_2\delta_3\delta_4$. Известно, что центр группы B_n — бесконечно циклическая группа, порожденная элементом $(\sigma_1 \ldots \sigma_{n-1})^n = a_{12}(a_{13}a_{23})\ldots(a_{1n}a_{2n}\ldots a_{n-1n})$. В [7] установлено, что в группе сингулярных кос центр — бесконечно циклическая группа и совпадает с центром группы кос. В группе крашеных кос центр выделяется простым множителем, а в группе кос не выделается (см. [6]). В работе доказано, что центр группы сингулярных кос выделяется в группе сингулярных крашеных кос прямым множителем, но не выделяется прямым множителем во всей группе сингулярных кос SG_4.

Лемма. Следующие формулы верны в SP_4:

$$a_{14}^{a_{24}^{-1}a_{14}^{-1}\delta_3\delta_4} = a_{14} b_{14}^{a_{24}^{-1}a_{14}^{-1}\delta_3\delta_4} = b_{14},$$

$$a_{24}^{a_{14}^{-1}\delta_3\delta_4} = a_{24} b_{24}^{a_{14}^{-1}\delta_3\delta_4} = b_{24}.$$

$$(a_{14}a_{24}a_{34})^{a_{i3}} = a_{14}a_{24}a_{34},$$

$$(a_{14}a_{24}a_{34})^{b_{i3}} = a_{14}a_{24}a_{34}.$$

Теорема 2. Центр группы сингулярных кос $Z(SG_4)$ выделяется в группе сингулярных крашеных кос SP_4 прямым множителем, но не выделяется прямым множителем во всей группе сингулярных кос SG_4.

Следствие. Группа сингулярных крашеных кос SP_4 порождается элементами

$\Delta_4, a_{13}, a_{23}, a_{14}, a_{24}, a_{34}, b_{12}, b_{13}, b_{23}, b_{14}, b_{24}, b_{34}$ и определяется соотношениями:

$$\Delta_4 c = c\Delta_4, \ c \in \{a_{13}, a_{23}, a_{14}, a_{24}, a_{34}, b_{12}, b_{13}, b_{23}, b_{14}, b_{24}, b_{34}\};$$

$$a_{13}b_{13} = b_{13}a_{13};$$

$$a_{23}b_{23} = b_{23}a_{23};$$

$$a_{14}b_{14} = b_{14}a_{14};$$

$$a_{24}b_{24} = b_{24}a_{24};$$

$$a_{34}b_{34} = b_{34}a_{34};$$

$$a_{13}^{-1}a_{14}a_{13}=a_{14}a_{34}a_{14}a_{34}^{-1}a_{14}^{-1};$$
$$a_{13}^{-1}b_{14}a_{13}=a_{14}a_{34}b_{14}a_{34}^{-1}a_{14}^{-1};$$
$$a_{13}^{-1}a_{24}a_{13}=[a_{14}^{-1},a_{34}^{-1}]a_{24}[a_{34}^{-1},a_{14}^{-1}];$$
$$a_{13}^{-1}b_{24}a_{13}=[a_{14}^{-1},a_{34}^{-1}]b_{24}[a_{34}^{-1},a_{14}^{-1}];$$
$$a_{13}^{-1}a_{34}a_{13}=a_{14}a_{34}a_{14}^{-1};$$
$$a_{13}^{-1}b_{34}a_{13}=a_{14}b_{34}a_{14}^{-1};$$
$$a_{23}^{-1}a_{14}a_{23}=a_{14};$$
$$a_{23}^{-1}b_{14}a_{23}=b_{14};$$
$$a_{23}^{-1}a_{24}a_{23}=a_{24}a_{34}a_{24}a_{34}^{-1}a_{24}^{-1};$$
$$a_{23}^{-1}b_{24}a_{23}=a_{24}a_{34}b_{24}a_{34}^{-1}a_{24}^{-1};$$
$$a_{23}^{-1}a_{34}a_{23}=a_{24}a_{34}a_{24}^{-1};$$
$$a_{23}^{-1}b_{34}a_{23}=a_{24}b_{34}a_{24}^{-1};$$
$$b_{12}^{-1}(a_{13}a_{23})b_{12}=a_{13}a_{23};$$
$$b_{12}^{-1}(a_{14}a_{24})b_{12}=a_{14}a_{24};$$
$$b_{12}^{-1}a_{34}b_{12}=a_{34};$$
$$b_{12}^{-1}b_{34}b_{12}=b_{34};$$
$$b_{13}^{-1}(a_{14}a_{34})b_{13}=a_{14}a_{34};$$
$$b_{13}^{-1}(a_{34}^{-1}a_{24}a_{34})b_{13}=a_{34}^{-1}a_{24}a_{34};$$
$$b_{13}^{-1}(a_{34}^{-1}b_{24}a_{34})b_{13}=a_{34}^{-1}b_{24}a_{34};$$
$$b_{23}^{-1}a_{14}b_{23}=a_{14};$$
$$b_{23}^{-1}b_{14}b_{23}=b_{14};$$
$$b_{23}^{-1}(a_{24}a_{34})b_{23}=a_{24}a_{34}.$$

Заключение

Построено конечное представление для группы сингулярных крашеных кос на четырех нитях SP_4. Как следствие, доказано что центр группы сингулярных кос $Z(SG_4)$ выделяется в группе сингулярных крашеных кос SP_4 прямым множителем, но не выделяется прямым множителем во всей группе сингулярных кос SG_4.

Литература

1. Artin E. Theory of braids // Ann. of Math. 1947. 48(1). 101–126.
2. Baez J. Link invariants of finite type and perturbation theory // Lett. Math. Phys. 1992. 26 (1). 43.
3. Bardakov V. G, Kozlovskaya T. A. On 3-strand singular pure braid group // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. 2020. 29. 10.
4. Birman J. S. New points of view in knot theory // Bull. Amer. Math. Soc. 1993. 28 (2). 253–287.
5. Fenn R., Keyman E., Rourke C. The singular Braid Monoid Embeds in a Group // Brighton: Univ. of Sussex, 1996.
6. Neshchadim M. V. Inner automorphisms and some their generalizations // Sib. Elektron. Mat. Izv. 2016. 13. 1383–1400.
7. Vershinin V. On the singular braid monoid // Algebra i Analiz. 2009. 21(5). 19–36.

УДК 517.977

ПРОЦЕДУРА НЕЛОКАЛЬНОГО УЛУЧШЕНИЯ В БИЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ТЕРМИНАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

© **Трунин Дмитрий Олегович**
кандидат физико-математических наук, доцент,
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
tdobsu@yandex.ru

Аннотация. Для задач оптимального управления, приводимых к билинейным задачам оптимального управления при наличии дополнительных ограничений на фазовую траекторию в конечный момент времени, исследуется задача улучшения допустимого управления. Для решения данной задачи в работе предлагается специальная процедура на основе операции проектирования. Процедура использует точную формулу приращения функционала Лагранжа в регулярном случае с определением значения множителя Лагранжа из условия выполнения ограничения. Данная процедура свободна от трудоемкой операции параметрического варьирования и носит нелокальный характер. Для улучшения допустимого управления рассматриваемая процедура использует редукцию к системе функциональных уравнений, определяющей условие улучшения. К решению данной системы предлагается вспомогательная процедура, основанная на решении специальной задачи Коши и скалярного уравнения.

Ключевые слова: билинейная управляемая система, ограничения на фазовую траекторию, процедура улучшения, функциональные уравнения.

A NONLOCAL IMPROVEMENT PROCEDURE IN BILINEAR OPTIMAL CONTROL PROBLEM WITH TERMINAL CONSTRAINTS

Trunin Dmitry Olegovich
Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof.,
Dorzhi Banzarov Buryat State University
24a Smolin St., Ulan-Ude 670000, Russia
tdobsu@yandex.ru

Abstract. For optimal control problems reducible to bilinear optimal control problems in the presence of additional constraints on the phase trajectory at a final time, the problem of improving the admissible control is studied. To solve this problem, the paper proposes a special procedure based on the projecting operation. The procedure uses the exact formula for the increment of the Lagrange functional in the regular case with the determination of the value of the Lagrange multiplier from the constraint condition. This procedure is free from the laborious operation of parametric variation and is of a non-local nature. To improve the admissible control, the procedure under consideration uses a reduction to a system of functional equations that defines the improvement condition. An auxiliary procedure based on solution of a special Cauchy problem and a scalar equation is proposed for solving this system.

Keywords: bilinear control system, constraints on the phase trajectory, improvement procedure, functional equations.

Введение

В работах [1, 2] разработаны методы нелокального улучшения допустимых управлений для полиномиальных по состоянию задач оптимального управления со свободным правым концом. Модификация сопряженной системы в таких задачах позволяет построить точные формулы приращения целевого функционала, что открывает возможность для построения процедур нелокального улучшения допустимых управлений. Такие процедуры не содержат трудоемкую операцию параметрического варьирования управления, что является существенным фактором повышения эффективности данных процедур.

В данной работе в классе билинейных задач оптимального управления с ограничением на фазовую траекторию в конечный момент времени к нелокальному улучшению допустимых управлений предлагается процедура, основанная на решении специальной системы функциональных уравнений на основе операции проектирования. К решению данной системы в работе применяется подход, основанный на решении специальной задачи Коши.

1. Постановка задачи

Рассмотрим линейную по состоянию и управлению задачу оптимального управления (билинейная задача) с одним терминальным ограничением

$$\dot{x} = A(u,t)x + b(u,t), \quad t \in T = \left[t_0,\ t_1\right], \tag{1}$$

$$x(t_0) = x^0, \qquad\qquad u(t) \in U \subset R^r, \tag{2}$$

$$\Phi(u) = \left\langle c, x(t_1)\right\rangle \to \min, \tag{3}$$

$$x_1(t_1) = x_1^1. \tag{4}$$

Здесь $x(t) \in R^n$ — вектор состояния, $u(t) \in R^r$ — вектор управляющего воздействия, $A(u,t)$, $b(u,t)$ линейны по u и непрерывны по t, U — выпуклый компакт, $c \in R^n$ — заданный вектор, $c_1 = 0$; $x^0 \in R^n$ и x_1^1 заданы, интервал T фиксирован.

Введем множество

$$V = \left\{u \in PC^r(T) : u(t) \in U,\ t \in T\right\}.$$

Пусть $u \in V$. Обозначим $x(t,u),\ t \in T$ — решение задачи Коши (1), (2) при $u = u(t)$.

Рассмотрим множество

$$W = \left\{u \in V : x_1(t_1,u) = x_1^1\right\}.$$

Определим функцию Понтрягина с сопряженной переменной $\psi \in R^n$

$$H(\psi,x,u,t) = \left\langle \psi, A(u,t)x + b(u,t)\right\rangle.$$

В силу линейности по u функций $A(u,t)$ и $b(u,t)$ в рассматриваемом классе задач функция Понтрягина линейна по управлению

$$H(\psi,x,u,t) = H_0(\psi,x,t) + \left\langle H_1(\psi,x,t),u\right\rangle.$$

Сопряженная система

$$\dot{\psi} = -A(u,t)^T\psi,\ t \in T, \tag{5}$$

$$\psi_1(t_1) = -\lambda, \tag{6}$$

$$\psi_i(t_1) = -c_i, \quad i = \overline{2,n}. \tag{7}$$

Пусть $\psi(t,u,\lambda),\ t \in T$ — решение сопряженной системы (5)–(7) при $u = u(t)$.

Рассмотрим регулярный функционал Лагранжа

$$L(u,\lambda) = \Phi(u) + \lambda\left(x_1(t_1) - x_1^1\right),\ \lambda \in R.$$

Пусть $\left(u^0, v\right)$ — доступные управления в задаче (1)–(4). В соответствии с [2] имеет место точная формула приращения функционала Лагранжа

$$\Delta_v L(u^0, \lambda) = -\int_T \left\langle H_1(\psi(t, u^0, \lambda), x(t, v), t), v(t) - u^0(t) \right\rangle dt. \quad (8)$$

Пусть $u^0 \in V$ и параметр $\alpha > 0$ фиксирован. Образуем вектор-функцию

$$u^\alpha(\psi, x, t) = P_U\left(u^0(t) + \alpha H_1(\psi, x, t)\right),\ \psi \in R^n,\ x \in R^n,\ \alpha > 0,$$

где P_U — оператор проектирования на множество U в евклидовой норме.

Пусть $u^0 \in W$. Тогда для построения улучшающего управления $v \in W$ можно решить систему

$$\begin{aligned} &v(t) = u^\alpha(\psi(t, u^0, \lambda), x(t, v), t),\ \alpha > 0,\ t \in T,\ \lambda \in R, \\ &x_1(t_1, v) = x_1^1. \end{aligned} \quad (9)$$

К решению системы (9) применим следующую процедуру.

1. Найдем решение $\psi(t, \lambda),\ t \in T$ задачи Коши (5)–(7) при $u = u^0(t)$.

2. Сформируем управление

$$v^\alpha(x, t, \lambda) = u^\alpha(\psi(t, \lambda), x, t).$$

3. Найдем решение $x^\alpha(t, \lambda),\ t \in T$ специальной задачи Коши

$$\dot{x} = A(v^\alpha(x, t, \lambda), t)x + b(v^\alpha(x, t, \lambda), t),\ t \in T,$$

$$x(t_0) = x^0.$$

4. Определим значение множителя Лагранжа $\overline{\lambda} \in R$ из условия

$$x_1^\alpha(t_1, \overline{\lambda}) = x_1^1.$$

5. Сформируем выходное управление

$$v(t) = v^\alpha(x^\alpha(t, \overline{\lambda}), t, \overline{\lambda}),\ t \in T.$$

На основе формулы приращения (8) в силу допустимости управлений u^0, v нетрудно видеть, что выходное управление v является улучшающим

$$\Phi(v) \le \Phi(u^0).$$

Заключение

Основные свойства процедуры:

1) улучшение допустимых управлений носит нелокальный характер;

2) на каждой итерации построенное управление является допустимым;

3) возможность улучшения управлений, удовлетворяющих стандартным необходимым условиям оптимальности.

Указанные свойства являются важными для повышения эффективности численных методов решения задач оптимального управления с ограничениями.

Литература

1. Булдаев А. С. Методы возмущений в задачах улучшения и оптимизации управляемых систем. Улан-Удэ: Изд-во Бурят. гос. ун-та, 2008. 260 с.

2. Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. Москва: Физматлит, 2000. 160 с.

УДК 519.716

О БЕСПОВТОРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ[1]

© **Шаранхаев Иван Константинович**
кандидат физико-математических наук, доцент
кафедры алгебры, дискретной математики и прикладной информатики
Бурятского государственного университета имени Доржи Банзарова
670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5
goran5@mail.ru

Аннотация. Данная работа посвящена исследованию бесповторных представлений булевых функций в элементарном базисе с медианой. Бесповторные представления, т. е. представления в виде термов, в которых каждая переменная встречается не более одного раза, важны как с теоретической, так и практической точки зрения. С одной стороны бесповторные функции играют ключевую роль в задаче эквивалентности базисов, а с другой стороны находят применение в различных технических системах. Для произвольной булевой функции важно не только распознать ее бесповторность в некотором базисе, но построить бесповторный терм. В данной статье на основе необходимого и достаточного условия бесповторности булевых функций предлагается алгоритм построения бесповторных термов для булевых функций в базисе $\{\vee, \cdot, -, 0, 1, x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_2 x_3\}$.

Ключевые слова: булева функция, бесповторный терм, суперпозиция, базис, алгоритм.

ON READ-ONCE REPRESENTATIONS OF BOOLEAN FUNCTIONS

Sharankhaev Ivan Konstantinovich
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor,
Dorzhi Banzarov Buryat State University

Abstract. This work is devoted to the study of read-once representations of Boolean functions in an elementary base with a median. Read-once

---

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №22-21-20013, https://rscf.ru/project/22-21-20013/ и Правительства Республики Бурятия

representations, i.e. representations in the form of terms in which each variable occurs no more than once, are important both from a theoretical and practical point of view. On the one hand, read-once functions play a key role in the problem of equivalence of bases, and on the other hand, they are used in various technical systems. For an arbitrary Boolean function, it is important not only to recognize its read-once in a certain basis, but to construct a read-once term. In this article, based on the necessary and sufficient condition for the read-once of Boolean functions, an algorithm for constructing read-once terms for Boolean functions in the base $\{\vee, \cdot, -, 0, 1, x1(x2\vee x3)\vee x2x3\}$ is proposed.

Keywords: Boolean function, read-once term, superposition, base, algorithm.

Введение

Одной из основных задач в теории булевых функций является исследование представлений булевых функций с помощью суперпозиций выделенных базисных функций. Такие представления принято называть термами или формулами. Важнейшим классом булевых функций является класс бесповторных функций, т.е. функций, для которых существует представление в виде бесповторных термов над некоторым базисом. В работе [1] рассмотрены алгоритмы нахождения бесповторных представлений булевых функций в бинарных базисах: элементарном базисе и линейном бинарном базисе. В настоящей работе предлагается алгоритм построения бесповторных термов в элементарном базисе с медианой (трехместной функцией голосования), который является небинарным базисом.

1. Основные понятия и определения

Терм Φ над базисом B называется *бесповторным*, если каждая переменная входит в него не более одного раза.

Функция f называется *бесповторной* в базисе B, если существует бесповторный терм Φ над B, представляющий функцию f. В противном случае f называется *повторной* в B.

Все неопределяемые понятия можно найти, например, в [2].

Будут использоваться следующие обозначения:

– символом $\tilde{x}$ обозначается набор $(x_1,\ldots,x_n)$;

– rank f — ранг функции f;

– ρ(f) — множество всех существенных переменных функции f;

– δ(f) — множество всех фиктивных переменных функции f;

Функция d_3=(00010111) называется *медианой*.

Функция f называется *слабоповторной* в базисе B, если любая остаточная функция от функции f является бесповторной, а сама f повторна в базисе B.

Базис

$$B_0=\{\vee, \cdot, -, 0, 1\}$$

называется *элементарным*, а базис $B_0 \cup \{f\}$, где f слабоповторна в B_0, называется *предэлементарным*.

Базис $B_0 \cup \{d_3\}$ обозначим через D.

Будем говорить, что функции f и g *связаны отношением* $\prec$, и писать $f \prec g$, если для любого набора $\tilde{\sigma}$ выполняется $f(\tilde{\sigma}) \leq g(\tilde{\sigma})$.

Функция f называется *обобщенно монотонной по переменной* x, если выполняется либо $f_x^0 \prec f_x^1$, либо $f_x^0 \succ f_x^1$. Для краткости записи обобщенную монотонность функции f по переменной x будем обозначать так: $f \in M_x$.

Производной функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ по переменной x_i называется функция $f_{x_i}^{/} = f_{x_i}^0 \oplus f_{x_i}^1$.

Функцию f будем называть 2-*нежесткой*, если либо rank f < 2, либо для любого $x \in \rho(f)$ справедливо включение $f \in M_x$ и выполняется одно из условий:

1) $\delta(f) = \delta(f_x^0)$ и $\delta(f) \subset \delta(f_x^1)$;

2) $\delta(f) = \delta(f_x^1)$ и $\delta(f) \subset \delta(f_x^0)$;

3) найдется $y \in \rho(f_x^{/})$ такая, что $\delta(f_x^{/}) \subset \delta((f_x^{/})_y^{/})$.

Функцию f будем называть *наследственно* 2-*нежесткой*, если сама f и все ее остаточные функции являются 2-нежесткими.

Теорема 1. [3] Функция f является бесповторной в базисе D тогда и только тогда, когда она является 2-нежесткой.

2. Алгоритм нахождения бесповторных представлений булевых функций в базисе D

Алгоритм является рекурсивным, на вход подается существенная булева функция $f(\tilde{x})$ размерности не менее, чем 1, заданная в векторном виде. На выходе алгоритм находит бесповторный терм Φ($\widetilde{x}$), представляющий f($\widetilde{x}$), или сообщает, что f($\widetilde{x}$) не является бесповторной в базисе D.

A. Проверяем, является ли функция f($\widetilde{x}$) наследственно 2-нежесткой. Если f($\widetilde{x}$) не является 2-нежесткой, то по теореме 1 она является повторной в D и алгоритм завершает работу, иначе переходим к шагу B.

B. Если функция f($\widetilde{x}$) является одноместной, т. е. $\widetilde{x}$ = x_1, то Φ(x_1) = x_1 или Φ(x_1) = $\overline{x}_1$.

C. К этому шагу переходим, если функция f($\widetilde{x}$) не является одноместной.

C.0. Произвольным образом выбираем одну переменную y и находим множества $\tilde{x}_0$ = δ(f_y^0), $\tilde{x}_1$ = δ(f_y^1). Если ровно одно из этих множеств пустое, то переходим к C.1. Если для любой переменной множества $\tilde{x}_0$ и $\tilde{x}_1$ являются пустыми, то переходим к C.2.

C.1. К этому шагу переходим, если нашлась переменная y такая, что только одна из остаточных функций от функции f($\widetilde{x}$) по y несущественна.

C.1.a. К этому шагу переходим, если $\tilde{x}_0 \cup \{y\} = \widetilde{x}$, т. е. f_y^0 – константная. Применив алгоритм к $f_y^1(\tilde{x}_0)$, найдем бесповторный терм Ψ($\tilde{x}_0$), представляющий функцию $f_y^1(\tilde{x}_0)$. Тогда искомый терм Φ($\widetilde{x}$) будет определяться следующим образом: $\Phi(\widetilde{x}) = (y \cdot (\Psi(\tilde{x}_0))^{\bar{\sigma}})^{\bar{\sigma}}$, где σ = f_y^0.

C.1.b. К этому шагу переходим, если $\tilde{x}_1 \cup \{y\} = \widetilde{x}$, т. е. функция f_y^1 – константная. Применив алгоритм к $f_y^0(\tilde{x}_1)$, найдем бесповторный терм Ψ($\tilde{x}_1$), представляющий функцию $f_y^0(\tilde{x}_1)$. Тогда искомый терм Φ($\widetilde{x}$), будет определяться следующим образом: $\Phi(\widetilde{x}) = (y \vee (\Psi(\tilde{x}_1))^{\sigma})^{\sigma}$, где σ = f_y^1.

C.1.c. Обозначим $\tilde{u} = \{y\} \cup \tilde{x}_0 \cup \tilde{x}_1$ и $\tilde{v} = \widetilde{x} \setminus \tilde{u}$. Этот шаг выполняется, если $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ оба непусты. Среди остаточных функций

$f_{\tilde{v}}^{\tilde{\tau}}$ найдем две различных. Обозначим их через f $_1$ ($\tilde{v}$) и f $_2$ ($\tilde{v}$). Определим функции h($\tilde{v}$, z) и g($\tilde{u}$) следующим образом: h($\tilde{v}$, z) = $\overline{z}$ f 1 ($\tilde{v}$) ∨ z f 2 ($\tilde{v}$),

g($\tilde{\tau}$)=$\begin{cases} 0, если f_{\tilde{u}}^{\tilde{\tau}} = f_1; \\ 1, если f_{\tilde{u}}^{\tilde{\tau}} = f_2. \end{cases}$ Дважды применяем алгоритм для нахождения бесповторных термов Ψ_h ($\tilde{v}$, z) и Ψ_g ($\tilde{u}$), представляющих h($\tilde{v}$, z) и g($\tilde{u}$). Тогда искомый терм Ф($\widetilde{x}$) будет определяться следующим образом:

$$Ф(\tilde{u}, \tilde{v}) = \Psi_h(\tilde{v}, \Psi_g(\tilde{u})).$$

С.2. К этому шагу переходим, если обе остаточные функции от функции f по каждой переменной существенны. Если функция f является трехместной, то она принадлежит K, т.е. представляющий ее терм известен. Иначе выберем произвольным образом набор из трех переменных $\tilde{u}$ = (x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}). Среди остаточных функций $f_{\tilde{v}}^{\tilde{\tau}}$ найдем две различных. Обозначим их через f $_1$ ($\tilde{v}$) и f $_2$ ($\tilde{v}$). Определим функции h($\tilde{v}$, z) и g($\tilde{u}$) следующим образом:

$$h(\tilde{v}, z) = \overline{z}\ f\ 1\ (\tilde{v}) \vee z\ f\ 2\ (\tilde{v}),\ g(\tilde{\tau}) = \begin{cases} 0, если f_{\tilde{u}}^{\tilde{\tau}} = f_1; \\ 1, если f_{\tilde{u}}^{\tilde{\tau}} = f_2. \end{cases}$$

Если функция g($\tilde{u}$) ∉ K, то выберем другой набор $\tilde{u}$ и повторим процедуру построения h($\tilde{v}$, z) и g($\tilde{u}$).

Если выполняется g($\tilde{u}$) ∈ K, дважды применяем алгоритм для нахождения бесповторных термов Ψ_h ($\tilde{v}$, z) и Ψ_g ($\tilde{u}$), представляющих h($\tilde{v}$, z) и g($\tilde{u}$). Тогда искомый терм Ф($\widetilde{x}$) будет определяться следующим образом:

$$Ф(\tilde{u}, \tilde{v}) = \Psi_h(\tilde{v}, \Psi_g(\tilde{u})).$$

Заключение

На основе необходимых и достаточных условий бесповторности булевых функций, полученных автором во всех предэлементарных базисах [4], можно построить аналогичный алгоритм в любом предэлементарном базисе.

Литература

1. Винокуров С. Ф., Перязев Н. А. Избранные вопросы теории булевых функций. Москва: Физматлит, 2001. 192 с.

2. Перязев Н. А. Основы теории булевых функций. Москва: Физматлит, 1999. 112 с.

3. Перязев Н. А., Шаранхаев И. К. Критерии бесповторности булевых функций в предэлементарных базисах ранга 3 // Дискретная математика. 2005. Т. 17. Вып. 2. С. 127–138.

4. Шаранхаев И. К. О бесповторных функциях алгебры логики в предэлементарных базисах // Алгебра и логика. 2019. Т. 58, № 2. С. 271–284.

ВОПРОСЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

УДК 372.851

ФОРМИРОВАНИЕ ПРИЕМОВ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ ПО ТЕМЕ «ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА»

© **Антонова Лариса Васильевна**
кандидат физико-математических наук, доцент,
директор Института математики и информатики
ant.lv@mail.ru

© **Бородина Людмила Александровна**
учитель математики и информатики гимназии № 3,
магистрант 1-го курса Института математики и информатики
lalase2015@mail.ru

Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5

Аннотация. Работа посвящена вопросу изучения различных приемов учебной деятельности по теме «Тригонометрические уравнения и неравенства». В работе рассмотрены общие и основные приемы при изучении тригонометрических уравнений и неравенств и определена сложность всех указанных задач.

Ключевые слова: тригонометрия, уравнения, неравенства, приёмы, анализ, синтез.

FORMATION OF EDUCATIONAL ACTIVITY METHODS OF STUDENTS ON THE TOPIC "TRIGONOMETRIC EQUATIONS AND INEQUALITIES"

Antonova Larisa Vasilyevna,
andidate of Physics and Mathematics, Associate Professor
ant.lv@mail.ru

Borodina Ludmila Alexandrovna
Mathematics and informatics teacher at linguistic gymnasium No. 3.
1st year master student of Buryat State University Institute
of Mathematics and Informatics
lalase2015@mail.ru

Dorzhi Banzarov Buryat State University
5 Ranzhurova St., Ulan-Ude, 670000, Russia

Abstract. The work is devoted to the study of various methods of educational activity on the topic "Trigonometric equations and inequalities". The paper considers general and basic techniques in the study of trigonometric equations and inequalities and determines the complexity of all these problems.

Keywords: trigonometry, equations, inequalities, techniques, analysis, synthesis.

1. Общие приемы учебной деятельности по усвоению математических понятий

Главной задачей учителя в формировании приемов учебной деятельности является правильно подобранная организация деятельности учащихся по усвоению материала. Для этого используют такие приемы учебной деятельности, как: наблюдение; анализ; сравнение; заключение по аналогии; абстрагирование; синтез; обобщение; индуктивное умозаключение; конкретизация; приведение контрпримеров; выведение следствий из определения; подведение под понятие; доказательство равносильности различных определений понятия. При доказательстве равносильности различных определений понятия используют также несколько приемов дедуктивного доказательства: прямое доказательство, косвенное доказательство от противного, классификация; систематизация; специализация; усвоение и запоминание определений понятия; контроль за усвоением определения понятия [2].

Рассмотрим некоторые общие приемы, которые применяются при изучении тригонометрических уравнений и неравенств.

Анализ — это такой метод, который заключается в разделении на составные элементы изучаемого объекта, после чего каждый элемент рассматривается отдельно. Обычно этот прием используют вместе с синтезом. Синтез — это прием, обратный анализу, т.е. с помощью него отдельные элементы объединяются в одно целое. Сравнение — это один из приемов, который помогает установить сходства и различия объектов. Заключение по аналогии — это такое заключение, в котором находятся схожие объекты по их признакам и свойствам и на их основании делается вывод [1]. Абстрагирование — это метод выделения существенных свойств объекта, в результате чего формируются суждения. Этот метод дает глубже изучить и изолировать один объект от других [1]. Обобщение — это мысленное объединение объектов по их общим существенным признакам, в результате которого формируются свойства полученного множества объектов [2].

Классификация — разделение объектов на классы, которые нужно занести в классификационную схему (таблицу, диаграмму и т.д.) [1]. Систематизация — разделение объектов на классы и установление связей между ними [1]. Специализация — разделение классов на виды и формулировка их характеристических свойств [1]

Для успешного решения задач учащиеся должны уметь анализировать, систематизировать, оценивать полученные результаты, обобщать. При обучении решению задач необходимо специально анализировать с учащимися связи между элементами задачи, тем самым облегчая учащимся выбор методов решения задачи. Учащиеся при решении задач должны вспомнить необходимую информацию: обобщенные и свернутые структуры. Обучение обобщениям при решении задач развивает математическое мышление, в том числе и память.

2. Особенности формирования приемов учебной деятельности при изучении тригонометрических уравнений и неравенств

При изучении тригонометрических уравнений и неравенств можно использовать такие приемы, как: анализ, сравнение, синтез, обобщение, индуктивное умозаключение, систематизация и др. [1].

Такой прием, как наблюдение также важен в изучении тригонометрии, так как в тригонометрии очень много наглядной информации, а именно исследование графиков тригонометрических функций, работа с числовой окружностью. Поэтому при подготовке к урокам, следует учитывать правила, которые раскрывают принцип наглядности.

Сравнение можно использовать в тригонометрических неравенствах. Пример: $\sin x < -\frac{1}{2}$; $\sin x < 2$; $\sin x > 2$.

Через прием обобщение можно разделить на группы задачи по уровню сложности, сформировать свойства какой-либо группы задач. Например, если взять тригонометрические уравнения, решаемые методом разложения на множители. Эти задачи можно разделить на две группы по уровню сложности. И дать ученикам задачи из той группы, которые соответствуют их умственным способностям.

При помощи индуктивного умозаключения можно определить к какой группе тригонометрических уравнений или неравенств принадлежит та или иная задача. Например, уравнение

$$\sin 5x\,(\sin x - 8) - \sin 2x \sin x + 8 \sin 2x = 0$$

$$\sin 5x\,(\sin x - 8) - \sin 2x\,(\sin x - 8) = 0$$

$$(\sin 5x - \sin 2x)(\sin x - 8) = 0$$

$$\sin 5x = \sin 2x$$

можно отнести к одноименным функциям, так как при помощи некоторых операций мы получили уравнение, где в левой и в правой части присутствуют синусы.

Применяя систематизацию, можно определить связи задач. Связи определяют сложность и структуру задачи. Сколько между действиями выполнено последовательно тождественных преобразований, столько и видов связей в задаче. Например, в уравнении: $7sin^2x + 3cos^2x = 8 \sin x$

1) $7sin^2x + 3(1 - sin^2x) = 8 \sin x$
2) $7sin^2x + 3 - 3sin^2x = 8 \sin x$
3) $4sin^2x + 3 = 8 \sin x$
4) $4sin^2x - 8 \sin x + 3 = 0$
5) $\sin x = t$
6) $4t^2 - 8t + 3 = 0$

$$t_1 = \frac{1}{2};\ t_2 = \frac{3}{2}$$

7) $\sin x = \frac{1}{2}; \sin x = \frac{3}{2}$

8) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k\epsilon z; x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k\epsilon z$

всего 8 действий и действия 1,2,3,6,8 выполнены с помощью тождественных преобразований. Но последовательно выполнены только 1 и 2; 2 и 3. Тогда количество связей в этом уравнении равно 2.

Но в тригонометрии больше используются анализ, синтез и обобщение.

Чтобы повысить качество обучения математике, нужно знать различные методы решения задач. Основным из них является аналитико-синтетический метод. Аналитический метод заключается в том, что задача разбивается ряд простых задач. Синтетический метод можно назвать обратным аналитическому, т.е. решение этих задач соединяется в одно целое. В аналитико-синтетическом методе можно выделить систему действий и операций, необходимых для решения задачи. Учащиеся должны знать из каких операций состоит каждое действие и в какой последовательности их нужно выполнять. Задачи следует выбирать исходя из их сложности и трудности. Отличия сложности и трудности состоят в том, что трудность — это совокупность субъективных факторов, зависящих от психологической стороны человека, умственных способностей, опыта решения задач, а сложность — это совокупность объективных факторов, зависящая от числа связей, элементов, видов связей [1]. Аналитико-синтетический метод поиска решений уравнений и неравенств содержит только два вида преобразований: тождественные и равносильные. К тождественным преобразованиям относятся: приведение подобных членов; раскрытие скобок; разложение на множители; приведение дробей к общему знаменателю [3], а к равносильным преобразованиям относятся: перенос члена уравнения из одной части в другую; умножение обеих частей уравнения на отличное от нуля число; возведение уравнения в нечетную степень; извлечение корня нечетной степени из обоих частей [4].

В структуре уравнений и неравенств могут быть два вида связей: явные и неявные. Явные связи — это элементы, которые не разделены равносильными преобразованиями, неявные — это, наоборот, элементы, которые разделены равносильными преобразованиями. Зная структуру уравнений и неравенств, мы можем определить их сложность, она находится по формуле: $S = m + n + l$, где m – число элементов, n — число явных связей и l — число видов связей в структуре задачи. Число l принимает только три значения: $l = 0; 1; 2$, а именно $l = 0$, когда структура состоит из одного элемента(нет явных и неявных связей); $l = 1$, когда структура состоит либо из явных, либо неявных связей; $l = 2$, когда структура имеет два вида связей: явные и неявные [1]. На примере квадратных тригонометрических уравнений попробуем определить сложность задач разных уровней.

1. $7sin^2x + 3cos^2x = 8\sin x$

1) $7sin^2x + 3(1 - sin^2x) = 8\sin x$

2) $7sin^2x + 3 - 3sin^2x = 8\sin x$

3) $4sin^2x + 3 = 8\sin x$

4) $4sin^2x - 8\sin x + 3 = 0$

5) $\sin x = t$

6) $4t^2 - 8t + 3 = 0$

$t_1 = \frac{1}{2}; \; t_2 = \frac{3}{2}$

7) $\sin x = \frac{1}{2}; \sin x = \frac{3}{2}$

8) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k\epsilon z; x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k\epsilon z$

В этом уравнении действия 1,2,3,6,8 выполнены с помощью тождественных преобразований, а действия 4,5,7 с помощью равносильных преобразований. Согласно структуре уравнения: $m = 5, n = 2, l = 2$. Тогда сложность этого уравнения будет равна: $S = 5 + 2 + 2 = 9$.

2. $\sqrt{3}\sin x - 2cos^2x = 1, \left|x - \frac{\pi}{2}\right| \leq \pi$

А. 1) $\sqrt{3}\sin x - 2(1 - sin^2x) = 1$

2) $\sqrt{3}\sin x - 2(1 - sin^2x) - 1 = 0$

3) $\sqrt{3}\sin x - 2 + 2sin^2x - 1 = 0$

4) $\sqrt{3}\sin x - 3 + 2sin^2x = 0$

5) $t = \sin x$

6) $\sqrt{3}t - 3 + 2t^2 = 0$

$t = \frac{\sqrt{3}}{2}; t = -\sqrt{3}$

7) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}; \sin x = -\sqrt{3}$

$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k\epsilon z; x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k\epsilon z; x = \arcsin\left(-\sqrt{3}\right) +$

8) $2\pi k < k\epsilon z$

Б. 9) $\begin{cases} x - \frac{\pi}{2} \le \pi, x - \frac{\pi}{2} \ge 0 \\ -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \le \pi, x - \frac{\pi}{2} < 0 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x \le \frac{3\pi}{2}, x \ge \frac{\pi}{2} \\ x \ge -\frac{\pi}{2}, x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$

11) $x\epsilon\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$

В. 12) Решением уравнения будут корни, входящие в этот отрезок: $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k\epsilon z; x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$

В этом уравнении действия 1,3,4,6,8,9,11 выполнены с помощью тождественных преобразований, а действия 2,5,7,10 с помощью равносильных преобразований. Согласно структуре уравнения $m = 7, n = 2, l = 2$. Тогда сложность этого уравнения будет равна $S = 7 + 2 + 2 = 11$.

Разберем также задачу повышенного уровня сложности, решаемую методом разложения на множители

А) Решить уравнение: $\sin(\frac{\pi}{2} + x) + \sin 2x = 0$

Б) Найти все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $(0; \frac{5\pi}{2}]$

А) 1) $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$

2) $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

3) $\cos x + 2\sin x \cos x = 0$

4) $\cos x\left(1 + 2\sin x\right) = 0$

5) $\left[\begin{array}{l}\sin x = -\frac{1}{2}\\ \cos x = 0\end{array}\right.$

6) $\left[\begin{array}{l}x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n\epsilon\mathbb{Z}\\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k\epsilon\mathbb{Z}\\ x = \frac{\pi}{2} + \pi m, m\epsilon\mathbb{Z}\end{array}\right.$

Б) 7) $0 < -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \leq \frac{5\pi}{2}$

8) $\frac{5}{12} < k \leq \frac{5}{3}$

9) $k = 1$

10) $x = \frac{7\pi}{6}$

11) $0 < \frac{\pi}{2} + \pi m \leq \frac{5\pi}{2}$

12) $-\frac{1}{2} < m \leq 2$

13) $m = 0; 1; 2$

14) $x = \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}$

В этом уравнении действия все действия составлены с помощью тождественных преобразований. Тогда по структуре уравнения: $m = 12, n = 12, l = 1$. Тогда сложность будет равна $S = 12 + 12 + 1 = 25$.

Таким образом, зная структуру уравнений, мы можем разделять их по уровню сложности, как и сделали мы в своей работе, составив таблицы сложности задач для каждого типа:

Тип 1. Квадратные уравнения

Таблица 1

Уровень	Сложность
А	$3 \leq S \leq 10$
В	$11 \leq S \leq 13$
С	$14 \leq S \leq 16$

Тип 2. Одноименные функции

Таблица 2

Уровень	Сложность
А	$3 \leq S \leq 10$

B	$11 \le S \le 14$

Тип 3. Метод вспомогательного угла

Таблица 3

Уровень	Сложность
A	$3 \le S \le 10$
B	$11 \le S \le 13$
C	$14 \le S \le 16$

Тип 4. Однородные уравнения

Таблица 4

Уровень	Сложность
A	$6 \le S \le 12$
B	$13 \le S \le 15$
C	$16 \le S \le 18$

Тип 5. Понижение степени

Таблица 5

Уровень	Сложность
A	$6 \le S \le 12$
B	$13 \le S \le 15$

Тип 6. Замена $\sin x \pm \cos x; tg\ x \pm ctg\ x$

Таблица 6

Уровень	Сложность
A	$6 \le S \le 12$
B	$13 \le S \le 15$

Тип 7. Уравнения, содержащие сумму и разность четвертых степеней: $(\cos^4 x \pm \sin^4 x)$

Таблица 7

Уровень	Сложность
A	$13 \le S \le 25$

Тип 8. Тригонометрические уравнения, содержащие уравнения третьих степеней

Таблица 8

Уровень	Сложность
A	$13 \leq S \leq 25$

Тип 9. Основные иррациональные тригонометрические уравнения

Таблица 9

Уровень	Сложность
A	$13 \leq S \leq 25$

Тип 10. Универсальная подстановка

Таблица 10

Уровень	Сложность
A	$11 \leq S \leq 15$
B	$16 \leq S \leq 25$

Тип 11. Разложение на множители

Таблица 11

Уровень	Сложность
A	$11 \leq S \leq 15$
B	$16 \leq S \leq 25$

Тип 12. Метод мажорант

Таблица 12

Уровень	Сложность
A	$8 \leq S \leq 12$
B	$13 \leq S \leq 15$
C	$16 \leq S \leq 25$

Тип 13. Тригонометрические неравенства

Таблица 13

Уровень	Сложность
A	$3 \leq S \leq 10$

B	$11 \leq S \leq 13$
C	$14 \leq S \leq 20$

3. Основные приемы организации учебной деятельности при изучении тригонометрических уравнений и неравенств

При изучении тригонометрических уравнений и неравенств для формирования общих умений учащихся используют такие приемы: работа с учебником, составление плана ответа, ведение тетради, организация домашней работы, выполнение письменной работы, изучения содержания задачи, общий прием контроля задачи и другие [1].

Тема «Тригонометрические уравнения и неравенства» является одной из сложнейших тем в математике, поэтому для закрепления этого материала стоит приложить много усилий. Учителю же нужно обеспечить понимание каждого слова, каждого понятия, иначе потеря смысла даже одного слова может привести к непониманию всей темы. Также следует учитывать психологические особенности каждого ученика, а именно: особенности мышления, внимания, восприятия, ощущения, воображения и памяти.

Мышление всегда должно функционировать интенсивно для лучшего усвоения материала. Мышление помогает увидеть ход решения задачи, понять суть и сформулировать правильные ответы. В овладении данной темой ведущую роль играет внимание. Для этого учителю требуется заинтересовать ученика данной темой. Если учащийся уделит недостаточно внимания этой теме, то вряд ли он сможет в ней разобраться.

Восприятие также играет большую роль. Восприятие развивается в ходе практической деятельности учащегося, оно тесно связано с мышлением, с чувствами. Поэтому учителю нужно правильно преподнести материал для лучшего восприятия данной темы. Ощущение основывается в процессе первичной обработки информации. Оно выявляется только на подсознательном уровне. Воображение также тесно связано с мышлением. Эта особенность в изучении данной темы хорошо применяется в ходе решения задач, так как ученикам нужно придумывать какой метод более применим при решении тригонометрического уравнения или неравенства.

Память — очень важная особенность. Здесь следует иметь ввиду, что не стоит перегружать память учащихся лишними данными. В организации уроков следует учитывать особенности запоминания и подготовить правильно материал, основываясь на этот психологический процесс.

Таким образом, результаты данной работы могут применяться учителями при подготовке к урокам на тему «Тригонометрические уравнения и неравенства», а также подборе задач по разному уровню сложности, учитывая индивидуальные качества учеников.

Литература

1. Крупич О. Б. Учить школьников учиться математике: формирование приемов учебной деятельности: книга для учителя. Москва: Просвещение, 1990. 128 с. Библиогр.: с. 127 (22 назв.).
2. Денищева Л. О. Приемы учебной работы как средство формирования частных умений при обучении началам математического анализа // Математика в школе. 1983. Епишева № 1. С. 14–19.
3. Деревянкин А. В. Тождественные преобразования: методическая разработка для учащихся заочной школы «Юный математик» при ВЗМШ и МЦНМО. Москва: МЦНМО, 2009. 28 с.
4. Равносильные уравнения. Равносильные преобразования уравнений. URL: http://cos-cos.ru/math/175/ (дата обращения: 25.05.2022).
5. Айзенберг М. И. Обучение учащихся методам самостоятельной работы с учебником // Математика в школе. 1982. № 6. С. 18–21.
6. Самостоятельная деятельность учащихся при обучении математике (Формирование умений самостоятельной работы): сборник статей / составители С. И. Демидова, Л. О. Денищева. Москва: Просвещение, 1985.

УДК 372.851

О СИСТЕМАТИЗАЦИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ

© **Антонова Лариса Васильевна**
кандидат физико-математических наук, доцент,
директор Института математики и информатики
ant.lv@mail.ru

© **Бурзалова Татьяна Васильевна**
кандидат физико-математических наук, доцент,
заведующая кафедрой прикладной математики
burzalova@mail.ru

Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5

Аннотация. Статья посвящена вопросу систематизации задач и применению различных приемов учебной деятельности по теме «Тригонометрические уравнения». На уроках математики учащихся должны овладеть основными приемами умственной деятельности, чтобы успешно решать сложнейшие из-за обилия тригонометрических формул уравнения и неравенства по данной теме. Из-за большого количества формул в тригонометрии у ученика возникают трудности при выборе способов решения тригонометрических уравнений. Очень часто на уроках учитель обучает учащихся приемам умственной деятельности, предлагая систему уравнений и неравенству без предварительного обобщения их типов. Нами проанализированы основные типы тригонометрических уравнений и основные методы решений этих уравнений. Применяя систематизацию, были исследованы связи в уравнениях, определена сложность этих уравнений. И учитывая индивидуальные способности каждого ученика, учитель имеет возможность дифференцировать учебный процесс.

Ключевые слова: тригонометрия, уравнения, неравенства, приемы, анализ, синтез.

ON THE SYSTEMATIZATION OF TRIGONOMETRIC EQUATIONS TO IMPROVE THE QUALITY OF STUDENT LEARNING

Antonova Larisa V.
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor
ant.lv@mail.ru

Burzalova Tatyana V.
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor
burzalova@mail.ru

Dorzhi Banzarov Buryat State University
5 Ranzhurova St., Ulan-Ude, 670000, Russia

Abstract. The article is devoted to the issue of systematization of tasks and the application of various methods of educational activities on the topic "Trigonometric equations". The teacher is obliged to teach students the techniques of mental activity. It is quite common to teach the reception of mental activity on the basis of unconscious orientation in it by exercises without preliminary generalization of their composition. In our opinion, the examples of thinking described in psychology and the description of the whole process of thinking, give a certain characteristic of the true process of thinking, were its model, but, like any model, describe thinking approximately. The main methods of solving trigonometric equations are analyzed. Applying systematization, the connections in the equations are investigated in the article, the complexity of these equations is determined. And taking into account the individual abilities of each student, it is possible to differentiate the educational process.

Keywords: trigonometry, equations, inequalities, techniques, analysis, synthesis.

Чтобы дифференцировать учебный процесс, необходимо правильно организовать учебную деятельность учащихся на уроках с учетом способностей учащихся и индивидуального подхода. На уроках математики учащиеся должны овладеть основными приемами умственной деятельности, чтобы успешно решать сложнейшие из-за обилия тригонометрических формул уравнения и неравенства по данной теме. Из-за большого количества формул в тригонометрии у ученика возникают трудности при выборе способов решения тригонометрических уравнений.

Очень часто на уроках учитель обучает учащихся приемам умственной деятельности, предлагая систему уравнений и неравенству без предварительного обобщения их типов. С.Л. Рубинштейн выделяет две концепции мышления, утверждая, что они противоречат друг другу. По нашему мнению, это происходит не всегда. По первой концепции, проблемы мышления сводятся к прочному усвоению знаний, чем и занимается учитель, в основном, на уроках, добиваясь прочных знаний. Согласно второй концепции на уроках учитель должен уделять внимание на исследование процесса мышления у учащихся. Но при прохождении тригонометрии вышеуказанные концепции не противоречат друг другу. Именно, на уроках по тригонометрии из-за большого объема формул учитель, применяя такие приемы умственной деятельности, как анализ, синтез, сравнение, обобщение, должен совместно с учащимся систематизировать и обобщать способы решения уравнений. Как известно, синтез — это результат анализа и он очень важен на уроках по тригонометрии, где предстает в виде новых формул, нового обобщения. Эти приемы представляет собой для учителя хороший инструмент, с помощью которого на уроках можно заниматься целенаправленным развитием мышления учащихся.

Большое внимание на уроках математики в 10 классах уделяется обобщению, т. е. объединению задач по их общим признакам, и классификации, т. е. разделению задач на группы. При прохождении тригонометрических уравнений в виду большого количества формул большую роль занимает систематизация этих уравнений. Для успешного решения задач учащиеся должны уметь анализировать, систематизировать, обобщать. При решении тригонометрических уравнений в 10-м классе надо научить учащихся находить связи между элементами задачи, тем самым облегчая учащимся выбор способов их решения. Они овладеют различными методами решения тригонометрических уравнений, несмотря на большое количество их типов.

Применяя обобщение, можно дифференцировать тригонометрические уравнения на группы по типам и по уровню сложности, предлагая учащимся уравнения из той группы, соответствующие их умственным способностям. Применяя систематизацию тригонометрических уравнений, можно определить связи задач, которые определяют сложность и структуру уравнений. Количество преобразований, которые надо проделать для их упрощения, определяет количество и виды связей в уравнение. Например, в уравнении: $7sin^2x + 3cos^2x = 8\sin x$ возможно восемь преобразований и пять из них выполнены с помощью тождественных преобразований и количество связей в этом уравнении равно двум, т. к. последовательных преобразований только два.

Применяя аналитико-синтетические способы решения задач, можно повысить качество обучения математике, классифицируя, обобщая уравнения и их методы решения. Тригонометрические уравнения мы в своем сборнике классифицировали, исходя из их сложности, числа и вида связей [1]. Выделяют два вида связей: явные и неявные [1]. Для определения сложности тригонометрических уравнений применяют известную формулу $S = m + n + l$, где m – число элементов, n — число явных связей и $l = 0; 1; 2$, — число видов связей в структуре задачи [1]. Зная эту формулу, учащиеся совместно с учителем определяют сложность предложенных в учебнике тригонометрических уравнений, тем самым познавая глубже формулы и многочисленные уравнения. Например, при решении квадратных тригонометрических уравнений учащиеся определяют сложность уравнений:

Решить уравнение и отобрать корни:

$$\sqrt{3}\sin x - 2cos^2x = 1, \left|x - \frac{\pi}{2}\right| \le \pi$$

Решая это уравнение, учащиеся находят сложность $S = 11$, анализируя подобные уравнения в учебнике, заносят в предложенную таблицу.

Тема «Тригонометрические уравнения» входит в обязательный перечень ЕГЭ по математике и мы составили таблицу сложности задач для каждого из 12 типов, что поможет учащимся при подготовке к экзамену, а учителю подбирать задачи по разному уровню сложности, учитывая индивидуальные качества учеников. Например, зная структуру тригонометрических уравнений и их уровень сложности по типу №12, можно составить таблицу:

Таблица 12

Тип 12. Метод макси-мини

Классификация тригонометрических уравнений	Сложность уранений
А	$8 \leq S \leq 12$
В	$13 \leq S \leq 15$
С	$16 \leq S \leq 25$

Учитель, учитывая особенности мышления ученика, выбирает для него уравнения и тем самым повышая качество обучения. Автором составлен сборник задач, где представлены все типы тригонометрических уравнений, которые систематизированы по их сложности.

Литература

1. Епишева О. Б., Крупич В. И. Учить школьников учиться математике: формирование приемов учебной деятельности: книга для учителя. Москва: Просвещение, 1990. 128 с. Библиогр.: с. 127 (22 назв.).
2. Денищева Л. О. Приемы учебной работы как средство формирования частных умений при обучении началам математического анализа // Математика в школе. 1983. № 1. С. 14–19.

УДК 372.851

РОЛЬ НЕСТАНДАРТНЫХ ЗАДАЧ В РАЗВИТИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ СПОСОБНОСТЕЙ

© **Антонова Лариса Васильевна**
кандидат физико-математических наук, доцент,
директор Института математики и информатики
ant.lv@mail.ru

© **Зимирева Ксения Вячеславовна**
студентка
kzimireva33@gmail.com

Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5

Аннотация. В работе рассматриваются задачи, отличные от базовой программы по степени сложности учебного материала и усвоения этого материала. Составлен 12-часовой факультативный курс, который содержит нестандартные задачи на темы «Многогранный угол. Трехгранный угол», связанные с тригонометрией многогранного угла и «Тетраэдр», в которых требуются дополнительные знания о многогранниках. Апробация и внедрение осуществлялось в СОШ №19.

Ключевые слова: математические способности, нестандартные задачи, творческая деятельность, обучение математике, факультативный курс, стереометрия, многогранный угол, трехгранный угол, тетраэдр.

THE ROLE OF NON-STANDARD TASKS IN THE DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL ABILITIES

Antonova Larisa V.
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor

Zimireva Kseniya V.
student
kzimireva33@gmail.com

Dorzhi Banzarov Buryat State University
5, Ranzhurova St., Ulan-Ude, 670000, Russia

Abstract. The paper considers tasks that differ from the basic program in terms of the degree of complexity of the educational material and the assimilation of this material. A 12-hour elective course has been compiled, which contains non-standard tasks on the topics «Multi-faceted angle. Triangular angle», connected with the trigonometry of the polyhedral angle and «Tetrahedron», which require additional knowledge about polygons. Approbation and implementation was carried out in Secondary School No. 19.

Keywords: mathematical abilities, non-standard tasks, creative activity, teaching mathematics, elective course, stereometry, polyhedral angle, triangular angle, tetrahedron.

В данной статье рассматривается роль нестандартных задач в развитии математических и творческих способностей учащихся. Считается, что основным способом формирования творческой деятельности и развития математических способностей является включение школьников в процесс решения нестандартных задач. Под нестандартными же задачами в данной работе будут пониматься задачи, которые создают напряженную ситуацию для учащихся, то есть задачи проявляют свои способности в соответствующей области. Таким образом, современному обществу необходимы граждане, склонные к новаторству, с хорошим уровнем знаний и широким кругозором [1].

Значит, необходимо организовать активную познавательную деятельность школьников, которая способствует приобретению творческого опыта каждым учащимся, а этот опыт является фундаментом, без которого самореализация личности на следующих этапах беспрерывного образования будет являться малоэффективной.

К настоящему моменту актуальна проблема отыскания средств совершенствования математических способностей, которые связаны с творческой деятельностью обучающихся в таких формах обучения, как коллективная и индивидуальная.

Решение задач является наиболее эффективной формой развития математической деятельности. Деятельность по решению задач достаточно сложна для ученика. Она включает в себя ряд действий учебного характера, которыми каждый ученик должен владеть.

«Решение задач как основной метод обучения, как метод приобретения учащимися новых знаний, — таков, на наш взгляд, путь решения проблемы развития учащихся» [2].

Проблеме классификации задач в современной методической и психологической литературе посвящено немало работ.

1. *По функциональному назначению (К. И. Нешков):*

– задачи с дидактическими функциями;

– задачи с познавательными функциями;

– задачи с развивающими функциями.

2. По величине проблемности (Ю. М. Колягин):

– стандартные (известны все компоненты задачи);

– обучающие (неизвестен один из четырех компонентов задачи);

– поисковые (неизвестны два из четырех компонентов задачи);

– проблемные (неизвестны три из четырех компонентов задачи).

3. По числу объектов в условии задачи и связей между ними:

– простые;

– сложные.

Кроме того, различают задачи: стандартные и нестандартные; теоретические и практические; одношаговые, двушаговые и др.; и т.д.

Основным способом формирования творческой деятельности и развития математических способностей является включение школьников в процесс решения нестандартных, творческих задач — задач, «решение которых для данного ученика не является известной целью известных действий» [5].

В процессе изучения теории, нестандартные задачи выполняют следующие функции: раскрывают закономерности и приемы доказательства; обучают применению теории и являются основным средством развития творческой деятельности школьников.

Ю. М. Колягин делает выводы о том, что решение задач является важнейшим средством развития математического развития и творческого мышления школьников, повышающим уровень воспитания и обучения в процессе изучения курса математики в школе [1].

В данной работе к нестандартным задачам будут относиться задачи, которые создают напряженную ситуацию для учащихся, т.е. задачи, отличные от базовой программы по степени сложности учебного материала и усвоения этого материала.

Далее представлены нестандартные задачи, то есть задачи, создающие напряженную ситуацию для учащихся. Данные задачи выполняют не только основные дидактические функции: обучающая, развивающая, воспитывающая, контролирующая, но и:

– формируют у учащихся способность самостоятельно находить оригинальные способы решения;

– предотвращают появление шаблонов при решении и разрушают неверные ассоциации в умениях и знаниях школьников;

– подразумевают отыскание новых взаимосвязей в знаниях;

– способствуют переносу знаний к овладению различными приемами познавательной деятельности;

– обеспечивают углубление знаний школьников.

Апробация и внедрение осуществлялось в СОШ № 19 и Гимназии № 33 в течение трех лет в 10-х классах.

Задач по данным двум темам очень мало, и они имеются только в некоторых учебниках, но в данной статье подобрано и систематизировано достаточное количество задач для целостного курса, взятые из различных учебников 10–11-х классов.

Факультативный курс «Тригонометрия трехгранного угла и специальные свойства тетраэдра»

Пояснительная записка

Цель данного курса:

1. Повысить интерес к предмету.
2. Развить навыки в решении трудных задач.
3. Расширить математический кругозор.

Задачи курса:

1. Развитие математических и творческих способностей учащихся.
2. Сформировать познавательный интерес к математике, осознание мотивов изучения.
3. Формирование способности выдвигать гипотезы, выстраивать логические связи.

4. Совершенствовать мышления учащихся, формирование умения самостоятельно использовать полученные знания.

Общая характеристика курса

В факультативном курсе представлены задачи, которые создают напряженную ситуацию для учащихся — нестандартные, т.е. задачи, отличные от базовой программы по степени сложности учебного материала и усвоения этого материала. В данном случае рассматриваются задачи на темы «Многогранный угол. Трехгранный угол», связанные с тригонометрией многогранного угла, и «Тетраэдр», в которых требуются дополнительные знания о многогранниках.

Тематическое планирование

№	Содержание	Задачи	Самостоятельная работа
Многогранный угол. Трехгранный угол			
1–2	Определение выпуклого многогранного угла. Теорема 1 (Первая теорема косинусов для трехгранного угла). Доказательство теоремы 1	1, 2, 3, 4	5, 6, 7
3	Теорема 2. Доказательство теоремы 2	1, 2, 3, 6	4, 5, 7
4–5	Теорема 3 (Сумма плоских углов трехгранного угла). Доказательство теоремы 3	1, 2, 3	4, 5, 6
Тетраэдр			
6–7	Ортоцентрический тетраэдр. Свойства ортоцентрического тетраэдра. Теорема 1 (доказательство).	1, 2, 3	4, 5
8–9	Равногранный тетраэдр	1, 2, 3	4, 5, 6
10–11	Средняя линия тетраэдра. Теорема 2 (доказательство). Медиана тетраэдра. Теорема 3 (доказательство)	1, 2. 1, 2.	3, 4. 3.

12	Теорема 4 (Теорема Менелая для тетраэдра). Доказательство теоремы 4.	1, 2, 3	4, 5, 6

1. Многогранный угол. Трехгранный угол

Даны многоугольник $O_1O_2\ldots O_n$ и точка M, которая не принадлежит его плоскости.

Если соединить точку M с каждой вершиной многоугольника, то углы $O_1MO_2,\ldots, O_nMO_1$ будут ограничивать часть пространства, которая содержит многоугольник. Такая часть пространства вместе с заданными углами называется многогранным углом.

Определение: Многогранный угол считается выпуклым, если он находится по одну сторону от плоскости любой его грани.

Теорема 1: Пусть плоские углы трехгранного угла равны α, β и γ, и двугранный угол при ребре, находящемся напротив плоского угла γ, равен φ, тогда $\cos\varphi = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\,\sin\beta}$.

1. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, известно, что $DC = \sqrt{5}$ см, $DA = 3$ см, $DD_1 = 1$ см. Чему равен угол между плоскостями A_1B_1C и AB_1C_1 .[4]

2. (Вторая теорема косинусов для трехгранного угла) Пусть двугранные углы при ребрах PA, PB и PC трехгранного угла $PABC$ равны α, β и γ, а плоский угол CSB равен φ. Докажите следующее равенство: $\cos\varphi = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\,\sin\gamma}$ [6].

3. (Теорема синусов для трехгранного угла) Пусть плоские углы BPC, APB и CPA трехгранного угла $PABC$ соответственно равны α, β и γ. Двугранные углы при ребрах PA, PB и PC равны α_1, β_1 и γ_1 соответственно. Докажите следующее равенство $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha} = \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta} = \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma}$ [6].

4. Пусть у трехгранного угла все плоские углы прямые. Необходимо доказать, что всякое его сечение, которое не будет проходить через вершину — это остроугольный треугольник. [3].

5. Необходимо доказать, что два трехгранных угла равны, если три плоских угла одного трехгранного угла равны соответственно трем углам другого трехгранного угла [6].

6. У треугольной пирамиды $PABC$ плоские углы находятся при вершине Р, при этом $CP = AP + PB$. Необходимо доказать, что сумма всех плоских углов при вершине С равна $90°$[4].

7. Необходимо доказать, что в трехгранном угле против равных плоских углов находятся равные двугранные углы [6, 7].

Теорема 2: Всякий плоский угол трехгранного угла всегда меньше суммы двух других плоских углов.

1. Необходимо доказать, что в выпуклом многогранном угле сумма плоских углов меньше $360°$ [3].

2. Найдите пределы, в которых может изменяться плоский угол трехгранного угла, если известно, что другие два плоских угла равны: $50°$ и $85°$ [8].

3. Необходимо доказать, что во всякой треугольной пирамиде имеется вершина, все плоские углы при которой меньше $90°$ [3].

4. Необходимо доказать, что в пространственном четырехугольнике сумма углов не превышает $360°$ [3].

5. Необходимо доказать, что в выпуклом четырехгранном угле всякий плоский угол меньше суммы трех оставшихся плоских углов [3].

Дополнительно:

6. Необходимо доказать, что в трехгранном угле биссекторы двугранных углов пересекаются по одному лучу [7]. (Биссектор двугранного угла — это полуплоскость, разбивающая данный угол на два равных по величине двугранных угла).

7. Необходимо доказать, что в тетраэдре биссекторы двугранных углов пересекаются в одной точке.

Теорема 3: В трехгранном угле сумма плоских углов меньше 360°.

1. Прямая k с тремя другими попарно перпендикулярными прямыми образует углы α, β и γ. Необходимо доказать, что $\alpha + \beta + \gamma < 180°$ [4].

2. Найдите пределы, в которых может изменяться плоский угол трехгранного угла, если известно, что другие два плоских угла равны: 130° и 150°.

Дополнительно:

3. Действительно ли, что в сечении всякого трехгранного угла может получиться правильный треугольник? [3].

4. Пусть имеется трехгранный угол. Рассмотрим три плоскости, проходящие через биссектрису противолежащей грани и ребро. Действительно ли данные плоскости пересекаются по одной прямой?

5. Два плоских угла трехгранного угла равны 97° и $115{,}8^\circ$. Пусть величина оставшегося третьего плоского угла будет целым числом, тогда какое наибольшее значение она может принять?

6. Необходимо доказать, что в трехгранном угле сумма внутренних двугранных углов больше 180°, но меньше 540°.[3]

2. Тетраэдр

Определение: Тетраэдр называют ортоцентрическим, если прямые, которые содержат высоты данного тетраэдра, пересекаются в одной точке.

Лемма 1: У тетраэдра, имеющего две пары скрещивающихся перпендикулярных ребер, оставшиеся два ребра также перпендикулярны.

Лемма 2: У тетраэдра, имеющего пару скрещивающихся перпендикулярных ребер, прямые, которые содержат высоты данного тетраэдра, проведенные из концов какого-то одного из данных ребер, пересекаются.

Теорема 1: Тетраэдр является ортоцентрическим, если он имеет две пары скрещивающихся перпендикулярных ребер.

1. Необходимо доказать, что правильная треугольная пирамида считается ортоцентрическим тетраэдром [4].

2. Необходимо доказать, что в ортоцентрическом тетраэдре $DABC$ выполняются следующие равенства $DA^2 + BC^2 = DB^2 + AC^2 = DC^2 + AB^2$ [4].

3. Необходимо доказать, что тетраэдр $DABC$, для которого выполняются следующие равенства $DA^2 + BC^2 = DB^2 + AC^2 = DC^2 + AB^2$, является ортоцентрическим [4].

4. Необходимо доказать, что все плоские углы ортоцентрического тетраэдра, находящиеся у одной вершины являются либо одновременно тупыми, либо острыми, либо прямыми.

5. Все грани параллелепипеда, описанного возле тетраэдра — ромбы. Необходимо доказать, что данный тетраэдр является ортоцентрическим.

Определение: Тетраэдр называют равногранным, если все его грани являются равными треугольниками.

1. Необходимо доказать, что тетраэдр, являющийся одновременно и ортоцентрическим, и равногранным, считается правильным.

2. Необходимо доказать, что если в правильной пирамиде суммы плоских углов при каждой из вершин равны по $180°$, то все грани данной пирамиды являются равными треугольниками, иначе говоря, он является равногранным.

3. Необходимо доказать, что если у тетраэдра все гарни между собой равны, то противоположные его ребра попарно равны.

4. Необходимо доказать, что тетраэдр является равногранным тогда и только тогда, когда описанный возле него параллелепипед является прямоугольным.

5. Пусть в треугольной пирамиде противоположные ребра попарно равны. Необходимо доказать, что грани данной пирамиды являются остроугольными равными треугольниками [3].

6. Необходимо доказать, что если в тетраэдре грани имеют равные периметры, то его противоположные ребра являются попарно равными.

Определение: Средней линией тетраэдра называют отрезок, который соединяет середины скрещивающихся между собой ребер.

Теорема 2: В тетраэдре средние линии пересекаются в одной точке и делятся пополам точкой пересечения.

1. Необходимо доказать, что в тетраэдре отрезки, которые соединяют середины противоположных ребер, пересекаются в одной точке.

2. Необходимо доказать, что если средние линии тетраэдра попарно перпендикулярны, то данный тетраэдр является равногранным.

3. Необходимо доказать, что средние линии тетраэдра будут попарно перпендикулярны, если тетраэдр будет равногранным.

4. Необходимо доказать, что если тетраэдр является ортоцентрическим, то его средние линии равны [4].

Определение: Медианой тетраэдра называется отрезок, который соединяет вершину тетраэдра и точку пересечения медиан противоположной грани.

Теорема 3: В тетраэдре медианы, пересекаясь в одной точке, делятся точкой пересечения в отношении 3:1, считая от вершины данного тетраэдра.

1. Необходимо доказать, что в тетраэдре медианы пересекаются в одной точке и разделяются этой точкой в отношении 3:1, считая от вершины данного тетраэдра.

2. Необходимо доказать, что если тетраэдр равногранный, то его медианы равны [4].

3. Необходимо доказать, что в раногранном тетраэдре центроид равноудален от вершин данного тетарэдра.

Теорема 4 (Теорема Менелая для тетраэдра): Пусть в тетраэдре DABC даны точки $\mathrm{N, P, K}$ и M, отмеченные на ребрах $\mathrm{BD, CB, AC}$ и DA соответственно. Данные четыре точки будут принадлежать одной плоскости тогда и только тогда, когда будет выполняться следующее равенство:

$$\frac{\mathrm{DM}}{\mathrm{MA}} * \frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{KC}} * \frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{PB}} * \frac{\mathrm{BN}}{\mathrm{ND}} = 1$$

1. В тетраэдре DABC отметили точки $\mathrm{F, K, N}$ и M на ребрах $\mathrm{BC, BD, AD}$ и AC соответственно, причем CM:MA=4:1, BK:KD=6:1, BF:FC=5:2 и AN:ND=3:5. Необходимо доказать, что точки $\mathrm{F, K, N}$ и M будут принадлежать одной плоскости [4].

2. В тетраэдре DABC отмечены точки M, N и P, принадлежащие соответственно ребрам $\mathrm{DA, AB}$ и BC, причем $\mathrm{AN:NB} = 2:5,\ \mathrm{DM:MA} = 5:4, \mathrm{BP:PC} = 1:2$. Через данные точки проведена плоскость. Необходимо найти в каком отношении объем тетраэдра делится данной плоскостью.

3. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ отмечены точки N и M на ребрах AC и AB соответственно. Отрезку BA_1 принадлежит точка F. Причем $AM{:}MB=1{:}2$, $BF{:}FA_1=3{:}2$, $AN{:}NC=4{:}1$. Найти отношение, в котором делится отрезок CA_1 плоскостью MNF, считая от вершины C [4].

4. F, M, N и P — точки пересечения ребер AB, BD, DC и AC тетраэдра $ABCD$ соответственно плоскостью. Причем $AF{:}FB=1{:}3$, $CP{:}PA=5{:}1$, $DN{:}NC=1{:}2$. Необходимо найти отношение $BM{:}MD$ [4].

5. Объем тетраэдра $DABC$ равен 5. Проведена плоскость через середины ребер DA и BC, которая пересекает ребро DC в точке M. Известно, что отношение длин отрезков DM и MC равно $\frac{2}{3}$. Необходимо найти площадь сечения тетраэдра данной плоскостью, если известно, что расстояние от A до нее равно 1.

6. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ отмечены точки P и D на ребрах A_1C_1 и B_1C_1 соответственно. Отрезкам CA_1 и CB_1 принадлежат точки M и K соответственно. Причем $C_1D{:}DB_1=1{:}4$, $B_1K{:}KC=6{:}5$, $A_1P{:}PC_1=5{:}2$, $A_1M{:}MC=3{:}4$. Необходимо доказать, что точки M, K, P и D принадлежат одной плоскости [4].

Литература

1. Колягин Ю. М. Задачи в обучении математике / под редакцией Ю. М. Колягина. Москва: Просвещение, 1977. Ч. II. 144 с.

2. Фридман Л. М., Турецкий С. Н. Как научиться решать задачи: пособие для учащихся. Москва: Просвещение, 1984. 130 с.

3. Шарыгин И. Ф., Гордин Р. К. Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами. Москва: Изд-во Астрель: АСТ, 2001. 400 с.: ил.

4. Мерзляк А. Г. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. Углублённый уровень. 10 класс / Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С.: под редакцией В. Е. Подольского. 2-е изд. Москва: Вентана-граф, 2019. 272 с.

5. Колягин Ю. М. Учебные математические задания творческого характера // Роль и место задач в обучении математике / под редакцией Ю. М. Колягина. Москва, 1973. Вып. 2. С. 5–19.

6. Дополнительные главы по курсу математики: учебное пособие по факультативному курсу для учащихся 10 кл.: сборник статей / составление З. А. Скопец. Изд. 2-е, перераб. Москва: Просвещение, 1974.

7. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Геометрия: учебник для 10 классов школ с углубленным изучением математики / Российская академия наук, Российская академия Образования, Изд-во «Просвещение». 4-е изд., дораб. Москва: Просвещение, 2006. 260 с.: ил. (Академический школьный учебник).

8. Потоскуев Е. В., Звавич Л. И. Геометрия. 11 кл.: Задачник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики. 2-е изд., стереотип. Москва: Дрофа, 2004. 240 с.: ил.

УДК 377.5

РАЗВИТИЕ ЦИФРОВОЙ КУЛЬТУРЫ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

© **Лумбунова Наталья Баировна**
кандидат педагогических наук, преподаватель,
Бурятский аграрный колледж имени М. Н. Ербанова
Россия, 670031, г. Улан-Удэ, ул. Трубачеева, 140
gnat6856mk@gmail.com

© **Миронова Екатерина Пурбуевна**
кандидат педагогических наук, старший преподаватель
кафедры алгебры, геометрии и методики преподавания математики,
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5
mirkaterina84@mail.ru

© **Содбоева Зоригма Бальжинимаевна**
магистрант,
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5
sodboevaz9@gmail.com

Аннотация. В статье рассматривается цифровая культура, становящаяся неотъемлемой частью современного человека. Актуальность темы обусловлена тем, что цифровые технологии все чаще внедряются в повседневную жизнь учащихся, в том числе и в образовательное пространство. Преподавание математики имеет потенциал в развитии цифровой культуры, инструментом развития которой являются информационные технологии. Одной из задач преподавания математики для развития цифровой культуры является поиск наилучшего способа использования цифровых технологий в образовательном процессе. Показано, что работа в прикладных программах, совместная онлайн работа над проектами, выполнение интерактивных заданий и упражнений на различных сервисах и специальных приложениях, использование облачных хранилищ, форм обратной связи при обучении математике способствуют не только повышению мотивации, качества обучения, но и развитию цифровой культуры.

Ключевые слова: цифровая культура, цифровая грамотность, цифровая компетентность, цифровые технологии, интерактивность, преподавание математики, повышение качества обучения.

DEVELOPMENT OF DIGITAL CULTURE IN THE PROCESS OF TEACHING MATHEMATICS

Lumbunova Natalya B.
Candidate of Pedagogics, teacher,
Buryat Agricultural College named after M. N. Erbanov
140 Trubacheeva St., Ulan-Ude, 670031, Russia

Mironova Ekaterina P.
Candidate of Pedagogics, Senior Lecturer,
Dorzhi Banzarov Buryat State University
5 Ranzhurova St., Ulan-Ude, 670000, Russia

Sodboeva Zorigma B.
master's degree student of the Buryat State University
Dorzhi Banzarov Buryat State University
5 Ranzhurova St., Ulan-Ude, 670000, Russia

Abstract. The article deals with the problem of the development of students' digital culture in the process of teaching mathematics. The relevance of the topic is due to the fact that digital technologies are increasingly being introduced into everyday life, including in the educational space. Teaching mathematics has the potential to develop a digital culture in which information technology is a tool. One of the tasks of teaching mathematics for the development of digital culture is to find the best way to use digital technologies in the educational process. It is shown that working in applied programs, collaborative online work on projects, performing interactive tasks and exercises on various services and special applications, using cloud storage, feedback forms in the teaching mathematics contribute not only to increasing motivation, learning quality, but also to the development of digital culture.

Keywords: digital culture, digital literacy, digital competence, digital technologies, interactivity, teaching mathematics, improving the quality of education.

Новая реальность полноценно отражает охват цифровизацией всех сфер жизни российского общества, делая доступной любую информацию для отдыха, работы и обучения [2]. Сегодня развитие цифровой культуры и всемирной сети буквально охватывает все сферы жизни. Ориентиром, в частности, в принятии на работу является владение человеком цифровыми навыками, которые дают возможность быстро и эффективно выполнять поставленные задачи, быть успешным и использовать потенциальные возможности. Мультимедийное обеспечение курса математики может активизировать взгляды учащихся; визуальное и яркое мультимедийное обеспечение учебного курса позволяет воспринимать знания разными способами (визуально, аудиально и т. п.).

Принимая во внимание технологическую эволюцию, присутствующую в современном обществе, высшие учебные заведения стремятся посредством обучения, исследований и деятельности по распространению знаний обучать граждан, способных производить знания, преобразовывать свою реальность и освобождать себя как субъектов, вовлеченных в процесс человеческого развития в научном, социальном, экономическом, экологическом и культурном контексте.

«Новая культура — цифровая культура моделирует способы мышления, действия, общения с другими, работы и действия» [2]. Эта новая коммуникационная модель позволяет разрабатывать новые способы преподавания и обучения, изменять учебные пространства, отношения между учащимися и педагогами, а также все более быстро получать информацию, доступную на различных мобильных устройствах, таких как смартфоны и планшеты [2].

Цифровая культура представляет собой этап развития культуры человека для соответствия его цифровому обществу. Его отличительные признаки указаны в национальной программе «Цифровая экономика Российской Федерации», главной целью которой выступает создание экосистемы цифровой экономики в России. Для эффективного функционирования экосистемы необходимы люди, обладающие высоким уровнем цифровой культуры, формирование и развитие которой невозможно без основы — цифровой грамотности, трансформирующейся в цифровую компетентность.

В образовательной среде к формированию и развитию цифровой культуры важно отметить элементы цифровой культуры: гибкость, адаптивность, открытые коммуникации, инновационное и цифровое мышление, решение задач, основанных на аналитических данных. Эти возможности транслируются вузами исходя из формирования цифровой культуры в ходе исполнения общепрофессиональной компетенции во ФГОС ВО «способность решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением информационно-коммуникационных технологий и с учетом основных требований информационной безопасности».

Как педагоги усваивают, применяют и адаптируются к цифровому веку? Влияют ли такие действия на работу педагога? Цифровые технологии — этоинструменты, которые могут изменить определенную культуру, изменяя то, как мы действуем в обществе, и которые необходимо испытать в образовательной среде. Чтобы технологии могли внести свой вклад в педагогическую практику, необходимо понять возможности технологических ресурсов через обмениваться, изучать и исследовать и, если это разрешено, трансформировать свои ноу-хау и ноу-хау на основе цифровых технологий и, таким образом, модифицировать преподавание и обучение.

Использование цифровых ресурсов для подготовки к занятиям или определенным мероприятиям с учащимися становится все более распространенным явлением, так как цифровые технологии все чаще внедряются в повседневную жизнь учащихся, поэтому мы не можем оставить их вне образовательных пространств. Одна из больших задачпреподавания состоит в том, чтобы найти наилучший способ использования цифровых технологий в процессе преподавания и обучения.

Насколько цифровые технологии могут способствовать обучению и изучению определенных процедур и абстрактных понятий при преподавании математики?

Математика, исторически известная как наука, использующая только формулы, правила и алгоритмы, является частью жизни каждого, и поэтому ее необходимо понимать как необходимую, полезную и доступную в контексте учащихся. Чтобы технологии расширили возможности обучения, учитель сначала выбирает, какие педагогические ресурсы использовать для удовлетворения потребностей учащихся при обучении определенным понятиям. Как правило, это учебник, интернет и социальные сети для общения с учащимися и для сообщения нового факта, организации дифференцированной деятельности. Большинство педагогов при выборе тех или иных ресурсов для преподавания математики не может использовать все возможности выбранных ресурсов [3].

При этом, задавая вопрос о важности обучения, ориентированного на использование цифровых технологий, подчеркивают: «Математика сама по себе не нуждается во многих технологиях для своего обучения, в которых актуальность технологий минимальна». Из вышесказанного видно, что цифровые ресурсы не нужны для преподавания математики. Это связано с тем, что они не осваивают такие ресурсы и не стремятся пройти специальную подготовку по использованию компьютеров и интернета. Однако, есть учителя, которые не используют цифровые технологии, а осознают изменения, происходящие в обществе, и необходимость адаптации школы к новым поколениям цифровых учащихся. Таким образом, необходима непрерывная подготовка, чтобы служить учителям с помощью педагогических практик, направленных на молодых людей и подростков. На вопрос, что они понимают под цифровыми технологиями, учителя отмечают: любой аппарат или фасилитатор данного процесса. В педагогической сфере в качестве «Образовательных технологий» можно использовать множество ресурсов, но наиболее выдающимися являются «Информационно-коммуникационные технологии (ИКТ)». Также можно заметить, что одни учителя используют цифровые технологии как ресурсы, помогающие их практике, другие, в свою очередь, не могут рассматривать их как вспомогательные средства в процессе производства знаний, поэтому не развивают никакой педагогической деятельности с помощью цифровых технологий.

Формирование образного мышления в целом является целью современного урока. Множество программных пакетов и приложений, связанных с реализацией методологических идей существуют в связи с развитием информационных технологий. Применение информационных технологий содействует не только наглядному представлению нужных дидактических единиц учебной информации, повышению интереса учащихся к математике, но и помогает накоплению учащимися опорных фактов и способов деятельности по образцу. При использовании информационных технологий в процессе обучения математике происходит существенное изменение учебного процесса, например:

1) перепрофилирование на развитие мышления и воображения, как основных процессов познания, которые необходимы для качественного обучения;

2) формирование эффективной организации самостоятельной познавательной деятельности учащихся;

3) возникновение способности к сотрудничеству, творчеству, и самосовершенствованию.

По-прежнему, при использовании информационных технологий, сохраняются все основные этапы урока. Процесс получения знаний, в рамках традиционного урока, становится более полным и эффективным при использовании некоторой части электронной версии учебного материала. В настоящее время в сети имеется довольно большое количество различных веб-сайтов, пригодных к использованию в образовательной деятельности, а именно если говорить о дистанционном обучении.

Одним из них, используемых нами активно и эффективно, является веб-ресурс Quizizz.com. Благодаря этому сервису можно бесплатно и доступно составлять опросы и тесты. Учащиеся имеют возможность проходить созданные преподавателем тесты с любых устройств с доступом в Интернет.

Отдельного внимания стоит сервис LearningApps.org, являющийся конструктором для создания интерактивных упражнений по разным учебным предметам. Используя данный сервис легко создавать и применять тестовые задания, таблицы, дидактические игры, викторины, видео-файлы, предоставляющие более полную реализацию принципа наглядности. Использование интерактивных упражнений на учебных занятиях помогает не только заинтересовать учащихся в изучаемом материале, но и создать более продуктивную атмосферу и повысить качество обучения.

Использование современных информационных технологий позволяет заменить большинство традиционных средств обучения. В большинстве из случаев, данная замена оказывается действительно полезной, так как помогает стимулировать и поддерживать интерес к изучаемой дисциплине. Благодаря информационным технологиям для преподавателя создается возможность совмещать разнообразные ресурсы, которые способствуют наиболее глубоко и осознанно усвоить изучаемый материал, при этом позволяют организовать учебный процесс, а также экономию времени урока.

Использование на занятиях облачных хранилищ (Google диск, Яндекс диск) для размещения учебных материалов, форм для обратной связи (Google форма, Яндекс форма) при проведении тестов, опросов и других служб позволяют учащимся формировать определенную систему взаимоотношений с техникой и социального цифрового взаимодействия.

Цифровая культура, вырастающая из математической грамотности, в дальнейшем должна стать основой для развития цифровой компетентности, которая может быть представлена совокупностью универсальных, общепрофессиональных и профессиональных цифровых компетенций, актуальных для жизнедеятельности в цифровом обществе.

Литература

1. Бороненко Т. А. Развитие цифровой грамотности школьников в условиях создания цифровой образовательной среды // Перспективы науки и образования. 2019. № 2(38). С. 167–193.
2. Гнатышина Е. В., Саламатов А. А. Цифровизация и формирование цифровой культуры: социальные и образовательные аспекты // Вестник Челябинского государственного педагогического университета. Педагогические науки. 2017. № 8. С. 19–24.
3. Гусакова Е. М. Реализация активных методов преподавания математики в условиях цифровизации образования // Педагогический журнал. 2019. Т. 9, № 1–1. С. 610–619.
4. Шумакова Е. О., Ведомесова О. В. Особенности преподавания математики с использованием информационных технологий // Математическое образование в цифровом обществе: сборник материалов XXXVIII Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов. Москва: Изд-во МГПУ, 2019. С. 308–310.

УДК 372.851

ПРИМЕНЕНИЕ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ДЛЯ ДИАГНОСТИКИ ТЕКУЩЕЙ УСПЕВАЕМОСТИ УЧАЩИХСЯ

© **Мордовской Андрей Константинович**
кандидат физико-математических наук, доцент
mak13@mail.ru

© **Бутина Анастасия Витальевна**
студентка 2 курса магистратуры
anastasiakidarova414@gmail.com

Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а

Аннотация. В данной статье рассмотрена проблема применения автоматизированных технологий, используемых для объективного оценивания знаний учащихся. Также представлена технологическая карта урока по математике на тему «Решение уравнений» с применением автоматизированных технологий. Основная цель разработанной технологической карты заключается в закреплении первичного материала. Также ожидается повышение мотивации у школьников, успеваемости, проявление заинтересованности в самообучении. Применяя автоматизированные технологии, мы показываем детям, что с помощью своих телефонах, компьютеров и т.д. они могут усовершенствовать свои знания по различным предметам, в частности математике. Все разработанные нами технологические карты разработаны для учеников 6-го класса. В заключении приводится пример одной такой карты. В приложении размещены 2 разработанных теста. Все тесты составлены на электронно-образовательной платформе Moodle.

Ключевые слова: методика обучения математике, автоматизированные технологии, технологическая карта урока, математика.

APPLICATION OF AUTOMATED TECHNOLOGIES TO DIAGNOSE THE CURRENT ACADEMIC PERFORMANCE OF PUPILS

Mordovskoy Andrey K.
candidate of physical and mathematical sciences
mak13@mail.ru

Butina Anastasia V.
2nd year student
anastasiakidarova414@gmail.com

Dorzhi Banzarov Buryat State University
24a Smolin St., Ulan-Ude, 670000, Russia

Abstract. This article discusses the problem of the use of automated technologies used for the objective assessment of students' knowledge. After that, the technological map of the math lesson on the topic "Solving equations" with the use of automated technologies is presented. The main purpose of the developed technological map is to consolidate the primary material. It is also expected to increase students' motivation, academic performance, and interest in self-study. Using automated technologies, we show children, with the help of their phones, computers, etc. they can improve their knowledge in various subjects, in particular mathematics. All the technological maps developed by us are designed for 6th grade students. In conclusion, an example of one such card is given. The application contains 2 developed tests. All tests are compiled on the electronic educational platform Moodle.

Keywords: methods of teaching mathematics, automated technologies, technological map of the lesson, development, mathematics.

Главные задачи модернизации образования — это повышение доступности самого образования, его качества и эффективности. В первую очередь это предполагает обновление содержания образования, и поиск новых подходов оценивания знаний учащихся.

Сегодня каждый учитель пытается найти новейшие средства, помогающие нашим детям как получить знания в полном объеме, так и смогли бы активизировать их познавательную деятельность.

Особое внимание уделяется оценки учебной деятельности учащихся. Оценивание является необходимой частью процесса контроля, потому что его результаты очень значимы как для самих обучающихся, так и для их родителей. Основанием для этого является то, что оценка влияет на будущее ребенка, а также процесс оценивания вносит воспитание соревновательности.

Возникает вопрос, как же все-таки получить объективный результат при оценивании знаний у учеников?

Применение автоматизированных технологий как раз-таки позволит получить объективный результат при диагностике качества обучения.

Тесты в данный момент времени являются новой формой оценки практической деятельности детей. Данные тесты помогают выявить уровень освоения теоретических знаний на практике с помощью экспериментальных заданий деятельностного характера. Такие тесты принято использовать на текущем контроле, чтобы узнать на каком этапе ребенок все еще затрудняется и своевременно оказать помощь в устранении этих проблемы. Дети при прохождении таких тестов не испытывают стресс, поскольку они никак не влияют на итоговое заключение и конечно же оценку за четверть, год. Даже если учащийся наберет маленький балл или вообще не справится с заданиями, у него есть возможность пройти еще раз тест. Можно сделать так, чтобы попытки были совсем неограниченными. В какой-то момент ребенок все равно пройдет этот тест на высокий уровень. Он сможет воспользоваться дополнительным материалам, найти самостоятельно нужную ему информацию или в конце концов обратиться за помощью к учителю.

Все тесты разработаны на образовательной платформе Moodle.

Современное информационное общество предъявляет новые требования к содержанию, и к методам обучения. Поэтому сочетание традиционных и инновационных методов обучения и средств оценки результатов обучения в школе способствуют развитию познавательного интереса у детей. Залог хорошей успеваемости заключается в высокой мотивации к обучению. Поэтому используя автоматизированные технологии, мы не просто повышаем мотивацию, но и улучшаем успеваемость школьников.

Нами были разработаны технологические карты урока с использованием автоматизированных технологий.

Ниже приведен пример такой карты на тему: «Решение уравнений».

Технологическая карта
(рассматривается этап актуализации и первичного закрепления знаний)

Тема: «Решение уравнений».

Тип урока: урок изучения нового материала.

Цель урока: научить учащихся решать уравнения, используя свойства уравнений.

Задачи урока:

Образовательные:

- Формировать умение решать уравнения, используя свойства уравнения.

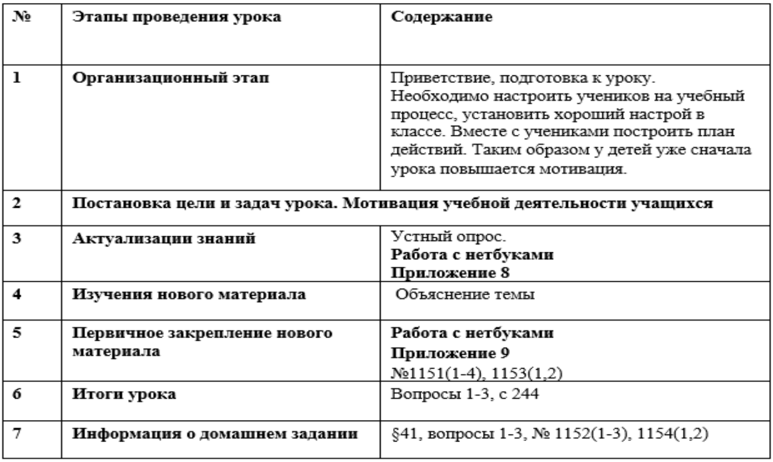
Воспитательные:

- Воспитать активность, самостоятельность, дисциплинированность;
- Воспитать сознательное усвоение предмета.

Развивающие:

- Развить вычислительные навыки;
- Умение работать с техникой.

Оборудование к уроку: учебник, телефон, ***нетбуки***.

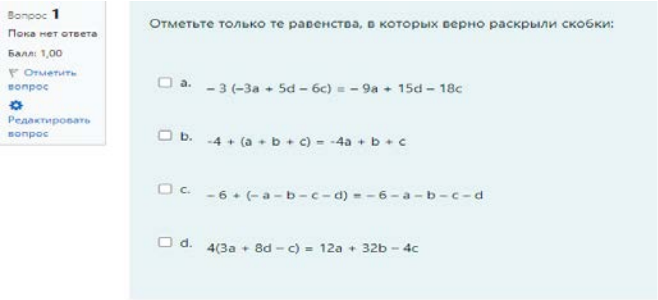


№	**Этапы проведения урока**	**Содержание**
1	**Организационный этап**	Приветствие, подготовка к уроку. Необходимо настроить учеников на учебный процесс, установить хороший настрой в классе. Вместе с учениками построить план действий. Таким образом у детей уже сначала урока повышается мотивация.
2	**Постановка цели и задач урока. Мотивация учебной деятельности учащихся**	
3	**Актуализации знаний**	Устный опрос. **Работа с нетбуками** **Приложение 8**
4	**Изучения нового материала**	Объяснение темы
5	**Первичное закрепление нового материала**	**Работа с нетбуками** **Приложение 9** №1151(1-4), 1153(1,2)
6	**Итоги урока**	Вопросы 1-3, с 244
7	**Информация о домашнем задании**	§41, вопросы 1-3, № 1152(1-3), 1154(1,2)

Описание:

В данной разработке рассматривается этап «Актуализации и первичного закрепления знаний».

Ученикам выдаются ноутбуки, либо они достают свои гаджеты. Каждый ребенок под своим логином и паролем заходит в образовательную платформу Moodle. Учащиеся выполняют назначенный тест, после выполнения которого учителя и ученики смогут увидеть результат и проследить в каком именно задании возникли сложности.



Вопрос **1**
Пока нет ответа
Балл: 1,00

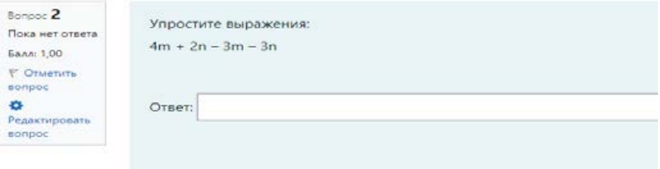
Отметьте только те равенства, в которых верно раскрыли скобки:

☐ a. – 3 (–3a + 5d – 6c) = – 9a + 15d – 18c

☐ b. -4 + (a + b + c) = -4a + b + c

☐ c. – 6 + (– a – b – c – d) = – 6 – a – b – c – d

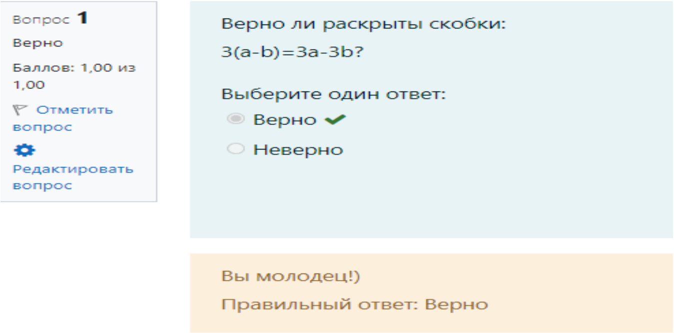
☐ d. 4(3a + 8d – c) = 12a + 32b – 4c



Вопрос **2**
Пока нет ответа
Балл: 1,00

Упростите выражения:
4m + 2n – 3m – 3n

Ответ:

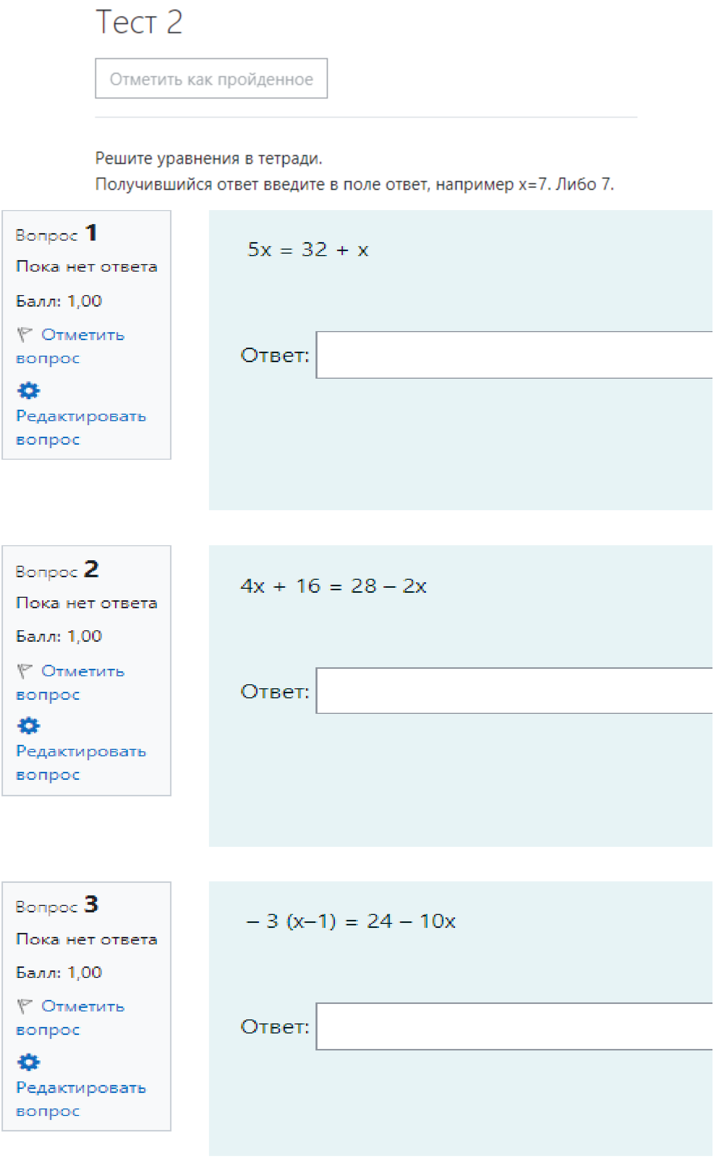


Вопрос **1**
Верно
Баллов: 1,00 из 1,00

Верно ли раскрыты скобки:
3(a-b)=3a-3b?

Выберите один ответ:
● Верно ✓
○ Неверно

Вы молодец!)
Правильный ответ: Верно



Тест 2

Решите уравнения в тетради.
Получившийся ответ введите в поле ответ, например x=7. Либо 7.

Вопрос **1**
Пока нет ответа
Балл: 1,00

$5x = 32 + x$

Ответ:

Вопрос **2**
Пока нет ответа
Балл: 1,00

$4x + 16 = 28 - 2x$

Ответ:

Вопрос **3**
Пока нет ответа
Балл: 1,00

$-3(x-1) = 24 - 10x$

Ответ:

Литература

1. Лихачев Б. Т. Педагогика: курс лекций / под редакцией В. А. Сластенина. Москва: ВЛАДОС, 2010. 647 с.
2. Смирнова И. М. Актуальные проблемы обучения математике и информатике в школе и в педагогическом вузе. Москва: Прометей, 2017. 238 с.
3. Селевко Г. К. Современные образовательные технологии. Москва: Народное образование, 1998. 128 с.
4. Гусев В. А. Теория и методика обучения математике: психолого-педагогические основы. Москва: Лаборатория знаний, 2017. 456 с.

УДК 378.146

ИНДИВИДУАЛЬНЫЙ КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ

© **Павлова Елена Бадмаевна**
старший преподаватель кафедры высшей математики,
Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления
Россия, 670013, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40в
pavlova2607@mail.ru

© **Булгатова Елена Николаевна**
кандидат физико-математических наук, доцент
кафедры высшей математики,
Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления
Россия, 670013, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40в
belena77@mail.ru

© **Елтошкина Евгения Валерьевна**
кандидат технических наук, доцент,
Иркутский государственный аграрный университет им. А. А. Ежевского
eev_baikal2005@mail.ru

Аннотация. В статье рассматриваются вопросы контроля усвоения студентами учебного материала. Классические формы контроля применяются в измененном формате для студентов, сдавших единый экзамен. Некоторые особенности такой организации образовательного процесса для сохранения непрерывности образовательного процесса глазами авторов и соблюдение педагогических условий для побуждения к исследовательской работе студентов технологического колледжа ВСГУТУ. Авторы излагают свои взгляды на Болонский процесс, формат единого экзамена, рассматривают систему непрерывного образования в свете изменяющейся обстановки, рассуждают о конкретных приемах контроля знаний с выходом на исследовательскую деятельность студентов. Занятия исследовательской работой в той или иной степени формируют базовые компетентности студента.

Ключевые слова: качество образования, цели, задачи, проблемы и особенности контроля усвоения знаний студентами, базовые компетентности, непрерывное образование, технологический колледж.

INDIVIDUAL CONTROL OF STUDENTS' KNOWLEDGE

Pavlova Elena B.
senior lecturer of East Siberia State University of Technology and Management,
40v Klyuchevskaya st., Ulan-Ude, 670013, Russia
pavlova2607@mail.ru

Bulgatova Elena N.
Candidate of Physical and Mathematical Sciences associate Professor
of East Siberia State University of Technology and Management
40v Klyuchevskaya st., Ulan-Ude, 670013, Russia
belena77@mail.ru

Eltoshkina Evgenia V.
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor,
A. A. Yezhevsky Irkutsk State Agrarian University
664038, Irkutsk region, Irkutsk district, Molodezhny settlement
eev_baikal2005@mail.ru

Abstract. The article deals with the issues of control of students' assimilation of educational material. Classical forms of control are used in a modified format for students who have passed a single exam. Some features of such an organization of the educational process in order to preserve the continuity of the educational process through the eyes of the authors and compliance with pedagogical conditions to encourage students of the VSGUT Technological College to research. The authors present their views on the Bologna process, the format of the unified exam, consider the system of continuing education in the light of the changing situation, talk about specific methods of knowledge control with access to students' research activities. Doing research work to one degree or another forms the basic competencies of the student.

Keywords: the quality of education, goals, objectives, problems and features of the control of the assimilation of knowledge by students, basic competencies, continuing education, technological college.

Образовательный процесс в Восточно-Сибирском государственном университете технологий и управления начинается еще до поступления в университет. Для этого центр довузовской подготовки совместно с кафедрой высшей математики проводит комплекс мероприятий, направленных на повышение мотивации школьников города Улан-Удэ и республики Бурятия в целом, к получению высшего образования во ВСГУТУ: проводятся занятия на подготовительных курсах, школьников приглашают на курсы «Умные каникулы». На этих курсах в удобное время ребята со всей республики имеют возможность повторить и углубленно изучить учебный материал по математике, физике, химии, информатике, русскому и иностранному языкам, проживая в комфортных общежитиях университета. На регулярной основе проводятся предметные олимпиады «Авиатор» совместно с УУАЗ, где помимо ценных призов можно получить бесценный опыт участия в подобных мероприятиях и экскурсию по учебным корпусам вуза, которую проводят студенты. Все это формирует позитивный имидж университета.

Студенты поднимаются на первую ступень образования, получая специальность в колледже ВСГУТУ. При этом одним из основных требований к образованию было и остается личностное развитие студента, которое должно сопровождаться контролем по всем учебным дисциплинам. Процесс обучения у вчерашних школьников является по сути навязанной им извне процедурой, к осознанному получению знаний приходит не каждый студент. Обезличенность, отчужденность при контроле полученных знаний рассматривается как свидетельство объективности, является достоинством контроля, показывает соответствие усвоения учебного материала образовательным стандартам, заложенным в рабочие программы той или иной дисциплины.

Одним из примеров объективного контроля уровня знаний по тому или иному предмету школьной программы является введение ОГЭ и ЕГЭ в общеобразовательных школах. Учитывая все недостатки данной формы контроля, хотелось бы отметить одно неоспоримое достоинство единого экзамена — объективность, ведь за одной и той же пятеркой в аттестате разных школ можно понимать абсолютно разный уровень знаний выпускников. Отказ от единого экзамена ограничит права абитуриентов, особенно из российской глубинки, на поступление в выбранные вузы, ведь чисто технически невозможно будет поступать в несколько выбранных вузов, доступность качественного образования резко снизится. Особенную актуальность, на наш взгляд, эта проблема приобретает именно в данный период, когда Россия заявила о выходе из Болонского процесса, хотя на первый взгляд, эти два проекта никак не связаны. При этом выпускные экзамены в форме ЕГЭ скопированы из зарубежного опыта, это, по глубокому убеждению авторов, прекрасный пример удачного заимствования. Похожая форма оценивания знаний выпускников введена в США, Германии, Франции, Великобритании и многих других странах. С 9 февраля 2007 года множество выпускников российских школ оценили систему единого экзамена. Трудно поспорить с утверждением, что введение ЕГЭ повлекло масштабные изменения в школьном и вузовском образовании.

Вернемся к вопросу разработки контрольных заданий для студентов первого курса колледжа ВСГУТУ. Мы ставим перед собой две цели: с одной стороны — контроль усвоения учебного материала, с другой — обнаружение пробелов, слабых мест, для их последующей ликвидации. Широко используем в работе задачи, направленные на составление ориентировочной основы деятельности, к таким задачам относим задания с параметром, которые включаем во все разделы математики, изучаемой студентами на первом курсе. Например, при решении квадратных уравнений или сводящимся к ним уравнений, студенты достаточно легко воспринимают введение параметра для исследования на наличие и количество корней таких уравнений. Проверяют область допустимых значений, определяют количество математических операций, правильно оценивают характеристические свойства уравнений, не забывают сделать проверку получившегося ответа. Задания с параметром органично вплетаются и в решение текстовых задач, где студенты не строят жесткие модели с порой непонятными таблицами, а решают задачи на движение, в качестве параметра рассматривая время. Координатно-параметрическая плоскость весьма эффективна в решении некоторых задач, в том числе и задач высокого уровня сложности. Ориентировочная основа действий несет здесь двойную нагрузку: формирует у студентов учебные действия и параллельно позволяет им осуществлять самоконтроль, что является в данной ситуации самым ценным приобретением для обучающегося.

Педагогическое сопровождение контроля усвоения знаний авторы пытаются углубить и элементами исследовательской работы. Перед тем как приступить к изложению теоретического материала, например, курса высшей математики на втором курсе колледжа, оговариваются темы исследовательских работ, определяется предмет исследования, очерчиваются границы объекта исследования, чуть позже студенты выбирают темы. На следующем этапе проводится контроль (в рамках ежемесячного контроля успеваемости) наличия гипотезы, целей и задач исследования. На этом и последующих контрольных проверках возникает целый ряд проблем: во-первых, замена исследовательской работы рефератом допустима только для студентов, допустивших пропуски занятий, в качестве отработки; во-вторых, законченность работы высоко оценивается, при этом «штурмовщина» не приветствуется, работа возвращается на доработку; и, наконец, самую высокую оценку можно поставить учащемуся, способному правильно сформулировать гипотезу, цели и задачи исследования, грамотно отвечать на вопросы, вести дискуссию. Высокая доступность литературы, оснащенность современным оборудованием самой крупной технической библиотеки Восточной Сибири облегчает процесс исследования. К нему мы подключаем внутреннюю мотивацию студентов — ребята ориентированы на результаты деятельности, заинтересованы в получении высокой оценки своей работы, и, для не самых организованных учащихся, отлично работает мотивация во избежание неприятностей.

Положительный опыт включения исследовательской деятельности в учебный процесс имеется. Как показала практика более чем двадцатилетнего опыта преподавания в колледже и в университете, студенты, закончившие колледж, и поступившие в вуз, более подготовлены к процессу учебной деятельности, имеют желание и готовы заниматься решением задач исследовательского характера. Базовые компетентности (информационная, коммуникативная, самоорганизация, самообразование) сформированы еще при обучении в колледже. Действительно, умение искать и анализировать информацию, применяя ее для решения математических задач, формирует информационную компетентность, коммуникативная составляющая получила свое развитие в процессе сотрудничества с одногруппниками и преподавателями. Самоорганизация студентов наработана в умении ставить цели, правильно распределять учебное и личное время, полностью использовать личные ресурсы, самообразование останется с учащимися на всю жизнь, также как умение составлять собственную образовательную траекторию.

Литература

1. Павлова Е. Б., Булгатова Е. Н. Формирование математических компетенций у студентов ВСГУТУ // Формирование компетенций выпускников вуза: соответствие образовательным и профессиональным стандартам: сборник статей международной научно-методической конференции. Улан-Удэ: Изд-во ВСГУТУ, 2019. Вып. 26. С. 437.

УДК 378.146

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ В НЕКОТОРЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

© **Павлова Елена Бадмаевна**
старший преподаватель кафедры высшей математики,
Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления
670013, Россия, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40в
pavlova2607@mail.ru

© **Лобсанова Оюна Анатольевна**
старший преподаватель кафедры информационных технологий
Института математики и информатики,
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5
otumur@mail.ru

© **Батхуу Церенадмид**
Монгольский государственный педагогический университет (МГУП)

Аннотация. В статье рассматривается ряд проблем, возникших при выходе из Болонского процесса. Некоторые особенности образовательного процесса для сохранения непрерывности образовательного процесса глазами авторов и соблюдение педагогических условий для побуждения к исследовательской работе учащихся. Интеграция геометрической и алгебраической составляющей обучения рассматривается как одна из ступеней готовности к исследовательской деятельности, способствующая повышению уровня образованности студентов и получение ими качественных образовательных услуг. По мнению авторов, снижение уровня высшего образования происходит из-за ориентации на узких специалистов, в ущерб фундаментальной подготовке, развивающей аналитическое и критическое мышление, что является основным достоинством классической схемы.

Ключевые слова: Болонский процесс, качество образования, исследовательская компетентность.

RESEARCH ACTIVITY IN SOME GEOMETRIC PROBLEMS

Pavlova Elena B.
senior lecturer,
East Siberia State University of Technology and Management
40v Klyuchevskaya St., Ulan-Ude, 670013, Russia

Lobsanova Oyuna A.
Senior Lecturer of the Department of Information Technologies,
Banzarov Buryat State University
5, Ranzhurova St., Ulan-Ude, 670000, Russia

Batkhuu Tserenadmid
Mongolian State University of Education (MSUE)

Abstract. The article discusses a number of problems that arose when leaving the Bologna process. Some features of the educational process to preserve the continuity of the educational process through the eyes of the authors and compliance with pedagogical conditions to encourage students to research. The integration of the geometric and algebraic components of learning is considered as one of the stages of readiness for research activities, contributing to the improvement of the level of education of students and their receipt of high-quality educational services. According to the authors, the decline in the level of higher education is due to the focus on narrow specialists, to the detriment of fundamental training that develops analytical and critical thinking, which is the main advantage of the classical scheme.

Keywords: The Bologna process, the quality of education, research competence.

Вступление России в Болонский процесс в 2003 г. «перекроило» всю национальную систему образования — произошла масштабная смена образовательной парадигмы, сместились акценты в организации большинства видов учебной деятельности. Образование дает стране кадры во всех сферах деятельности, переформатирование системы высшего образования повлекло замену фундаментальности классического советского образования на технологии, цели обучения изменились с усвоения знаний, умений и навыков на формирование умения учиться.

Мы живем в эпоху перемен, и, желая того или нет, вынуждены вырабатывать свою точку зрения на происходящие перемены. Процессы глобализации мировой экономики послужили одной из причин присоединения к Болонскому процессу, который первоначально отражал общеевропейские тенденции, должен был повышать уровень и доступность европейского высшего образования. Ко многим плюсам этой системы образования можно отнести главное, по нашему мнению, преимущество —

можно получить более широкое образование, т. е. изучая общую программу на первых курсах, можно сменить профессиональную направленность на старших. Есть ряд недостатков (это показывает практика двух десятилетий), к которым можно отнести самую массовую ступень такой системы образования — бакалавриат, по сути являющейся средством социальной сегрегации, отделяя «недоучившихся» бакалавров от «крепких» специалистов и магистрантов, в большинстве своем выбравшим академическую карьеру. Снижение уровня высшего образования происходит из-за ориентации на узких специалистов, в ущерб фундаментальной подготовке, развивающей аналитическое и критическое мышление. Еще одним плюсом Болонских соглашений можно считать повысившуюся конкурентоспособность российских студентов на европейском и общемировом рынке, открылись новые возможности для обычного учащегося из российской глубинки. Заметно возросла мобильность как студентов, так и преподавателей, возможность провести один или два семестра в другой стране в качестве студента, стажера или исследователя зарубежного университета заставила активизироваться многих. Но эти возможности существовали и в классической схеме для активных и способных студентов. К огромному минусу можно отнести снижение планки среднего уровня образованности, заметно снизился общий уровень подготовки, интеллектуальный уровень студентов и школьников. Как участники системы непрерывного образования «школа — колледж — вуз» не можем не отметить профанацию математических знаний, начинающуюся в школе, продолжающуюся на других ступенях этой системы. Классическое образование предусматривало усвоение знаний, умений и навыков с помощью педагога-профессионала, путем выстраивания личного общения, взаимодействия учителя и ученика, преподавателя и студента. Как преподаватели с достаточно солидным стажем, имеем возможность сравнивать студентов специалитета и нынешних бакалавров. Конечно, часть изменений в худшую сторону произошла из-за изменившейся картины мира, информация стала легко доступна, в огромных количествах лежит на поверхности, что отчасти и «развратило» учащихся. Нет стимула «добывать» знания, «грызть гранит науки», все можно отыскать на просторах интернета, фундаментальная подготовка кадров от этого страдает, мы выпускаем «сырой материал», подгоняя под западные стандарты свои проверенные наработки. Студент в общем понимании этого слова прекращает затрачивать силы на обучение, как правило, имеем на выходе продукт массового производства. Происходит потеря образовательного опыта, при этом заметна практическая недееспособность некоторых пунктов соглашения.

Выход из Болонского процесса, на наш взгляд, должен протекать как можно более плавно, без крайностей. Система национального образования в России всегда являлась специфической, например, из-за низкой плотности населения, в том числе и в Бурятии. Одним из положительных моментов, которые стоило бы оставить в качественно новой модели, по нашему мнению, является исследовательская составляющая. Для подготовки высококвалифицированных специалистов в любой области процесс обучения в школе, колледже, вузе должен систематически включать в себя исследовательскую деятельность обучающихся, направленную на формирование у них исследовательских умений. Одним из путей развития исследовательской составляющей в школе, помимо индивидуальных проектов, работы с научной литературой, систематизации знаний, составления теоретических обзоров, мы считаем пристальный, повышенный интерес к геометрии. В отличие от алгебры, которая дается большинству школьников проще в силу некоторой алгоритмизации решений, геометрические задачи повышенной трудности готовых рецептов, как правило, не терпят. Геометрия учит логически мыслить, составлять планы решения задач, формирует умение решать задачи, т.е. налицо математический мини эксперимент в практически каждой задаче.

Рассмотрим достаточно сложную задачу стереометрии на нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми. Координатный метод дает свой рецепт: одну из прямых помещаем в плоскость, параллельную другой и находим расстояние от точки до плоскости. При этом расстояние от точки до плоскости также находим по алгоритму. Для достаточно подготовленных пользователей доступно векторное произведение для нахождения искомого расстояния. Процесс интеграции геометрического условия задачи и ее алгебраического алгоритмического решения красочно описывает метапредметные связи, проверяет систему знаний учащегося. Нахождение расстояний в пространстве частью стереометрии, на которой основываются важные метрические вопросы. Решение таких задач геометрически развивает умение определять и вычислять различные расстояния, правильно изображать их на чертеже. Задача определения расстояния между скрещивающимися прямыми сводится к нахождению длины их общего перпендикуляра. В некоторых случаях удобнее использовать метод проектирования, что позволяет свести данную задачу к нахождению расстояния от точки одной из прямых до прямой, являющейся проекцией второй прямой на плоскость, перпендикулярную первой. Мы привели четыре плана для решения одной задачи, внимательный учащийся может увеличить это число. Умение искать пути решения задач, прорабатывать несколько сценариев в дальнейшем весьма полезно отражается на осознанности в процессе решения любых, в том числе исследовательских задач. Одним из выходов из создавшегося положения мы видим создание атмосферы сотрудничества, где студенты и преподаватель становятся партнерами в достижении одних и тех же целей: изучение основных понятий и методов математических дисциплин и приобретение навыков использования аппарата и методов высшей математики[1].

Извлечь уроки из сложившейся непростой ситуации вполне возможно, при этом ставя перед собой цель — изучение основных понятий и методов математических дисциплин и приобретение навыков использования аппарата и методов высшей математики[1].

Литература

1. Павлова Е. Б., Булгатова Е. Н. Формирование математических компетенций у студентов ВСГУТУ // Формирование компетенций выпускников вуза: соответствие образовательным и профессиональным стандартам: сборник статей международной научно-методической конференции. Улан-Удэ: Изд-во ВСГУТУ, 2019. Вып. 26. С. 437.

УДК 378.147

К ПРОБЛЕМЕ ПОДГОТОВКИ БУДУЩЕГО УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ

© **Янтранова Светлана Степановна**
кандидат физико-математических наук, доцент
кафедры геометрии и МПМ
yantranova@mail.ru

© **Заятуев Батор Владимирович**
кандидат физико-математических наук, доцент
кафедры геометрии и методики преподавания математики
zayatuyev@yandex.ru

Бурятского государственного университета имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5

Аннотация. Оказание качественных образовательных услуг является одной из важных задач, которые прописаны в концепции долгосрочного социально-экономического развития России до 2020 года в разделе, посвященном образованию. Решение этой наиважнейшей задачи во многом зависит от подготовки будущих учителей, их способности осуществлять профессиональную деятельность в современных условиях кардинальных изменений в сфере просвещения, умения их применять свои знания для решения реальных учебных задач. Как замечено, в настоящее время наметилась устойчивая тенденция спада математической подготовки не только школьников, но и что очень плачевно, студентов — будущих учителей математики. Поэтому одним из факторов, призванных решить эту проблему является преемственность в процессе непрерывного математического образования.

Одной из наиболее часто используемых форм является проектная технология. Практика использования метода проектов не нова. Элементы проектной технологии встречались в советской педагогике, где демонстрировалось, что “вместе учиться не только легче и интереснее, но и значительно эффективнее”. Под методом проектов подразумевалась система обучения, при которой ребенок приобретал знания и умения в процессе самостоятельного планирования и выполнения, постепенно усложняющихся, практических заданий — проектов.

Ключевые слова: подготовки будущих учителей, профессиональную деятельность в современных условиях, элементы проектной технологии, под методом проектов, в процессе самостоятельного планирования заданий

TO THE PROBLEM OF PREPARING A FUTURE MATHEMATICS TEACHER TO THE PROBLEM OF PREPARING A FUTURE MATHEMATICS TEACHER

Yantranova Svetlana S.
candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor of the Department of Geometry and MMM
yantranova@mail.ru

Zayatuyev Bator V.
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor
zayatuyev@yandex.ru

Banzarov Buryat State University
5, Ranzhurova St., Ulan-Ude, 670000, Russia

Abstract. The provision of quality educational services is one of the important tasks that are spelled out in the concept of long-term socio-economic development of Russia until 2020 in the section on education. The solution of this most important task largely depends on the training of future teachers, their ability to carry out professional activities in modern conditions of cardinal changes in the field of education, their ability to apply their knowledge to solve real educational problems. As noted, at present there has been a steady decline in mathematical training not only for schoolchildren, but also, which is very deplorable, for students — future teachers of mathematics. Therefore, one of the factors designed to solve this problem is continuity in the process of continuous mathematical education.

One of the most commonly used forms is project technology. The practice of using the project method is not new. Elements of project technology were encountered in Soviet pedagogy, where it was demonstrated that “learning together is not only easier and more interesting, but also much more effective.” The project method was understood as a learning system in which the child acquired knowledge and skills in the process of independent planning and implementation of gradually becoming more complex practical tasks — projects.

Keywords: training of future teachers, professional activity in modern conditions, elements of project technology, under the project method, in the process of independent task planning

В концепции долгосрочного социально-экономического развития России до 2020 г. в разделе, посвященном образованию, одной из приоритетных задач образования названо Оказание качественных образовательных услуг. Решение этих задач во многом зависит от подготовки будущих учителей, их осуществлять профессиональнуюв условиях модернизации образования, применять свои знания для решения реальных научных проблем.

В настоящее время наметилась устойчивая тенденция спада математической подготовки не только школьников, но и студентов — будущих учителей математики. Поэтому одним из факторов, призванных решить эту проблему является преемственность в процессе непрерывного математического образования. В данной статье рассматривается одна из задач подготовки магистрантов, работающих уже учителями математики и информатики. Это проблема затрагивает также студентов заочного отделения, которые преподают курсы математики, алгебры и геометрии в средних школах республики. В данной статье, в частности, речь пойдет о реализации принципа «обучаясь — обучай».

Свободное владение будущего учителя школьным курсом математики может быть решена лишь совместными усилиями специальных кафедр и кафедры обеспечивающей подготовку по методике преподавания математики, которая по своему месту и роли является выпускающей, работающей с магистрантами, которые к этому времени, предполагается, имеют хорошую базу по школьному курсу математики. Одним из педагогических условий оптимизации учебной деятельности магистрантов − будущих учителей математики установление и правильное использование многообразных связей между знаниями, которые они получают при изучении различных математических дисциплин и работой учителя в школе. Будущий учитель математики, изучая фундаментальные курсы математики, получает знания, которые отвечают на конкретные вопросы, перед ним ставит преподавание школьного курса математики в средней школе.

Как известно, учителя математики находятся на особом положении в школе из-за значимости математики как школьного предмета, и потому, что при любом контроле работы школы в первую очередь проверяются знания учащихся по математике. Такое положение вырабатывает в учителе математики стремление к самосовершенствованию и ответственность за результаты своего труда. Этим можно объяснить появление среди магистрантов учителей, имеющих большой опыт работы в школе. Общеизвестно, что для любого учителя самым важным в работе является повышение эффективности обучения. Этот вопрос требует непрерывного поиска решений, которые смогут оптимизировать учебный процесс. Как же учитель сможет сформировать положительную мотивацию учащихся к изучению учебного материала, создать условия полного раскрытия творческого и интеллектуального потенциала школьников, развития их познавательных интересов? Существуют разнообразные инновационные формы, позволяющие сделать учебную деятельность максимально эффективной. Одной из наиболее часто используемых форм является проектная технология.

Практика использования метода проектов показывает, что «вместе учиться не только легче и интереснее, но и значительно эффективнее». Под методом проектов подразумевается система обучения, при которой ребенок приобретает знания и умения в процессе самостоятельного планирования и выполнения, постепенно усложняющихся, практических заданий — проектов. Метод проектов предполагает определенную совокупность учебно-познавательных приемов и действий обучаемых, которые позволяют решить ту или иную проблему в результате самостоятельных познавательных действий и предполагающих презентацию этих результатов в виде конкретного продукта деятельности.

Чаще всего обучающиеся получая знания по предметам математического цикла, не знают, как воспользоваться полученными знаниями на практике. Одним из решений данной проблемы, является организация проектного обучения предметов естественно-математического цикла и в частности геометрии. Такой подход предполагает накопление и осмысление не опыта решения учебных геометрических задач, а готовность к рассмотрению жизненных задач с использованием геометрических знаний. Следовательно, основным результатом обучения будут не геометрические знания, умения и навыки, а осмысленный опыт жизнедеятельности с использованием геометрических знаний. При этом как свой, так и чужой жизненный опыт формируется поэтапно, и оцениваться будет не усвоение дидактических единиц, а способность применять освоенные дидактические единицы в различных ситуациях [2]. Отсюда, современная школа должна готовить учащихся к решению возникающих проблем при этом, полагаясь на свою самостоятельную деятельность. Естественно, что формы и методы обучения не должны быть подчинены только учебному содержанию, а должны выступать как самостоятельные средства для достижения определенных учебно-педагогических задач.

Алгоритм построения учебного занятия по проектной методике в системе обучения геометрии может состоять из четырех основных этапов:

1-й этап — целеполагание и структурирование учебного занятия по рассматриваемой теме.

2-й этап — проектирование и выделение учебных задач на этапах проектной деятельности. На данном этапе происходит:

а) Разделение содержания учебного занятия по рассматриваемым геометрическим темам на каждом этапе.

б) Установление связей внутри содержания изучаемой геометрической темы и между дисциплинами естественнонаучного цикла.

в) Прогнозирование результатов прохождения этапов проектирования.

3-й этап — выбор организации учебно-познавательной деятельности при проектном обучении. В основном на последнем этапе данный подход осуществляется посредством моделирования разнообразных ситуаций при изучении рассматриваемых геометрических тем.

Производиться регулярное консультирование по содержанию проекта, помощь в систематизации и обработке материала, консультация по оформлению проекта, отслеживание деятельности каждого ученика, оценка.

4 –й этап — Итоговый

Оформление проекта, подготовка к защите.

Подготовка выступающих, помощь в оформлении проекта.

Рефлексия

Оценка своей деятельности. «Что дала мне работа над проектом?»

Оценивание каждого участника проекта.

При формировании проектной деятельности предпочтение отдается урокам, осуществляющих активную деятельность учащихся, т.е. творческим урокам.

Как показывает опыт работы учителей школ, уроки геометрии, содержащие элементы практической деятельности вызывают интерес у обучающихся и позволяют активизировать познавательную деятельность и мотивировать их к дальнейшему изучению геометрии.

Литература

1. Янтранова С. С. К проблеме построения новых интегрированных курсов по геометрии (на примере спецкурса "Методы изображений) // Математика, ее приложения и математическое образование МПМО,11: материалы IV Международной конференции (г. Улан-Удэ, Байкал, 27 июня — 1 июля 2011 г.) / ответственный за выпуск Л. И. Назарова. Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ, 2011. Ч. 2. С. 291–293.

2. Хуторской А. В. Ключевые компетенции и образовательные стандарты // Эйдос. 2002. 23 апр. URL: http://eidos.ru/journal/2002/0423.html

УДК 378.147

О СОВЕРШЕНСТВОВАНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ СТУДЕНТОВ ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНОГО НАПРАВЛЕНИЯ

© **Янтранова Светлана Степановна**
кандидат физико-математических наук, доцент
кафедры геометрии и МПМ,
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5
yantranova@mail.ru

Аннотация. Изменения, происходившие в высшем образовании в последнее время, существенно сократили часы, отводимые на аудиторные занятия, и выявили проблему фундаментализации образования. Переход на многоуровневую систему высшего образования — на бакалавриат и магистратуру потребовало пересмотра структуры научных знаний, уровней интеграции и новых подходов в сфере профессиональной подготовки будущего специалиста.

Отсюда, при организации учебного процесса по математике на факультетах естественнонаучного направления, нужно учитывать следующие моменты.

1. Вводная лекция должна быть посвящена повторению школьного курса математики, причем обратить внимание на раздел «Тригонометрия».
2. Каждый раздел завершать контрольным мероприятием, где большую содержательную часть составляют задания профессиональной направленности, для решения которых используются методы математического моделирования.
3. Идеальный вариант — увеличение аудиторных часов на математику до 36 часов лекций и столько же на практические занятия или лабораторные занятия.

Ключевые слова: бакалавриат и магистратура, современные информационные технологии, программа по высшей математике, компетенции, математических и естественных наук, кейс-заданий.

ON IMPROVING THE MATHEMATICAL TRAINING OF STUDENTS OF THE NATURAL SCIENCE DIRECTION

Yantranova Svetlana S.
candidate of Physical and Mathematical Sciences,

Associate Professor of the Department of Geometry and MMM
Banzarov Buryat State University
5, Ranzhurova St., Ulan-Ude, 670000, Russia
yantranova@mail.ru

Abstract. The changes that have taken place in a higher educational institution in recent years, significantly observed hours allocated for classroom studies, and revealed the problems of fundamentalization of education. The transition to a multi-level education system — to the bachelor's and master's programs of the highest level to increase the structure of scientific knowledge, higher levels and new approaches in the field of professional training of future specialists.

Places, when organizing the process in mathematics at the faculty of natural science, it is necessary to take into account possible points.

1. The introductory lecture should be devoted to the repetition of the school course in mathematics, paying special attention to the section "Trigonometry".
2. Each section ends with a control event, where most of the content covers a professional orientation, for the use of mathematical modeling methods.
3. The ideal option is to increase classroom hours in mathematics to 36 hours of lectures and the same amount for practical exercises or laboratory classes.

Keywords: bachelor's and Master's programs, modern information technologies, program in higher mathematics, qualifications, mathematical and special sciences, case tasks.

Изменения, происходившие в высшем образовании в последнее время, существенно сократили часы, отводимые на аудиторные занятия, и выявили проблему фундаментализацииобразования. Переход на многоуровневую систему высшего образования — на бакалавриат и магистратуру потребовало пересмотра структуры научных знаний, уровней интеграции и новых подходов в сфере профессиональной подготовки будущего специалиста. Мы приветствуем возврат к старой системе организации высшего образования — специалитету. Как сказано, бакалавриат и магистратура не прижились в нашей стране. Пресловутая оптимизация значительно сократила часы на изучение высшей математики на факультетах естественнонаучного направления. В последнее время большой проблемой в обучении математике на 1 курсе стала слабая математическая подготовка абитуриентов и неготовность бывших школьников к самостоятельной творческой деятельности. Как научить самостоятельно готовиться бакалавров естественнонаучного направления, и еще большей проблемой является привитие умений самостоятельного применения в своей практической деятельности математических знаний. Конечно, студент может воспользоваться современными информационными технологиями и, скачать из интернета готовые решения ничего при этом, не понимая, о чем идет речь.

Если до введения двухуровневой подготовки часы, отводимые на математику на факультетах естественнонаучного направления были на первом курсе лекции -72, практические занятия -72, самостоятельная работа -144, то в последнее время в течении нескольких лет согласно учебным планам факультетов это лекции-18, практические занятия -18, самостоятельная работа -36 на весь период обучения в вузе. Программа по высшей математике осталась без изменений — это разделы по линейной алгебре, аналитической геометрии, математическому анализу и дискретной математике. Рассмотрим какие компетенции должны быть реализованы согласно ФГОС ВО с учетом проф. стандартов от 26.11.2020, для специальностей естественнонаучного направления:

05.03.02 География ОПК-1. Способен применять базовые знания в области математических и естественных наук, знания фундаментальных разделов наук о Земле при выполнении работ географической направленности. Компетенции предполагают, что студент должен получить базовые знания в соответствии с программой по высшей математике на 1 курсе. На старших курсах он должен применить полученные знания при выполнении работ практической направленности. Отсюда следует, что студент должен предварительно получить знания уже по дискретной математике.

06.03.01 Биология ОПК-6. Способен использовать в профессиональной деятельности основные законы физики, химии, наук о Земле и биологии, применять методы математического анализа и моделирования, теоретических и экспериментальных исследований, приобретать новые математические и естественнонаучные знания, используя современные образовательные и информационные технологии;

21.13.12 Землеустройство и кадастры ОПК-1. Способен решать задачи профессиональной деятельности применяя методы моделирования, математическогоанализа, естественнонаучные и общеинженерные знания

21.03.03 Геодезия и дистанционное зондирование ОПК-1. Способен решать задачи профессиональной деятельности применяя методы моделирования, математического анализа, естественнонаучные и общеинженерные знания.

Как следует, из приведенных выше компетенций трех специальностей важным объектом, является метод математического анализа и моделирования.

Ежегодно проводится проверка усвоения знаний студентами математического материала по системе ФЭПО. При этом нужно обязательно набрать не менее 24 баллов. Каждая тема оценивается или 1 балл или 2 балла в зависимости от объема зачетных единиц или от сложности изучаемого материала.

В рамках отведенных часов по учебному плану мы едва успеваем прочитать 5 разделов, что как раз и укладывается в необходимые 24 балла.

При, прохождении тестирования ПИМ обязательное условие, решение кейс-заданий. Каждый раздел завершается кейс-заданием, которое содержит задание на применение математических знаний по данному разделу при решении задач с практическим содержанием. Опыт проведения таких тестирований показал, что задачи приведенные в кейс– заданиях выходят за рамки тех тем, озвученных в данном разделе. Решение кейс-заданий нельзя игнорировать, рекомендовано их обязательное решение. Ниже приводится демонстрационный вариант таких кейс-заданий:

1. Во время весеннего паводка изменение объема поступающего в озеро воды в течение суток можно описать уравнением $\frac{dS}{dt} = 12 + 8t$, где S(t) — объем поступившей в озеро воды (в $м^3$) за время t(в часах), $0 \leq t \leq 24$. Для того, чтобы уровень воды не превысил предельного уровня, оборудован сток воды из озера с

постоянной скоростью72 м^3/ч. В момент времени t=0 объем воды в озере составил 48000 м^3.

a. если V(t) — объем воды в озере в момент времени t, то математическая модель для нахождения V(t) может иметь вид…

b. установите соответствие между временем t и объемом воды в озере V(t), при t=6 часов, t=14 часов.

c. если момент времени t=20 сток воды из озера был перекрыт и до конца суток вода из озера не вытекала, то объем воды в озере в конце дня (t=24 часа) будет равен ___м^3.

Отсюда, при организации учебного процесса по математике на факультетах естественнонаучного направления, нужно учитывать следующие моменты.

2. Вводная лекция должна быть посвящена повторению школьного курса математики, причем обратить внимание на раздел «Тригонометрия».
3. Каждый раздел завершать контрольным мероприятием, где большую содержательную часть составляют задания профессиональной направленности, для решения которых используются методы математического моделирования.
4. Идеальный вариант — увеличение аудиторных часов на математику до 36 часов лекций и столько же на практические занятия или лабораторные занятия.

Литература

1. Янтранова С. С. О компетентностном подходе математической подготовки бакалавров естественно-научного направления // Вестник Бурятского государственного университета. 2014. Вып. 15. Теория и методика обучения. С. 68–71.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ

УДК 51-72

СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЙ НЕИЗМЕНЯЕМЫХ МОЛЕКУЛЯРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ[1]

© **Ажеев Александр Андреевич**
магистрант, Томский государственный университет
Россия, 634050, Томск, пр. Ленина, 36
sazheev@gmail.com

© **Ажеев Сергей Андреевич**
магистрант, Томский государственный университет
634050, Томск, пр. Ленина, 36
sazheev@gmail.com

© **Бородин Владислав Иванович**
генеральный директор,
ООО «Газпром трансгаз Томск»
634029, г. Томск, пр. Фрунзе, 9
borodin_vi@bk.ru

© **Бубенчиков Алексей Михайлович**
доктор физико-математических наук, профессор,
ведущий научный сотрудник
регионального научно-образовательного математического центра,
профессор кафедры теоретической механики,
Томский государственный университет
634050, Томск, пр. Ленина, 36
bubenchikov_am@mail.ru

© **Бубенчиков Михаил Алексеевич**
доктор физико-математических наук, доцент
кафедры теоретической механики,
Томского государственного университета

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ в рамках научного проекта № 21-71-10066.

634050, Томск, пр. Ленина, 36
michael121@mail.ru

© **Лун-Фу Александр Викторович**
главный инженер — первый заместитель генерального директора,
ООО «Газпром трансгаз томск»
Россия, 634029, г. Томск, пр. Фрунзе, 9
a.lunfu@gtt.gazprom.ru

© **Мамонтов Дмитрий Владимирович**
младший научный сотрудник
регионального научно-образовательного математического центра,
Томский государственный университет
634050, Томск, пр. Ленина, 36
orevaore@mail.ru

Аннотация. В работе описан траекторный подход определения положения тела в пространстве. Подход в отличии от подходов, приведённых ниже, имеет преимущества. Также описана высокоточная вычислительная технология реализации этого подхода и приведено сравнение результатов работы траекторного подхода с подходом Эйлера на примере молекулярной динамики пластинки графена.

Ключевые слова: кватернионы, описание вращения, тензор инерции, молекулярная динамика, траекторный подход, метод Рунге-Кутты, углы Эйлера, классический подход Эйлера.

A METHOD FOR DETERMINING THE MOVEMENTS OF IMMUTABLE MOLECULAR STRUCTURES

Azheev Alexander A.
master student, TSU

Azheev Sergey A.
master student, TSU

Borodin Vladislav I.
General Director, LLC “Gazprom Transgaz Tomsk”.

Bubenchikov Alexey M.
Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Leading Researcher, TSU.

Bubenchikov Mikhail A.
Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, TSU.

Lun-Fu Aleksander V.
Chief Engineer, LLC “Gazprom Transgaz Tomsk”.

Mamontov Dmitriy V.
Junior Researcher, TSU

Abstract. The article describes a trajectory approach for determining the position of a body in space. The approach, in contrast to the approaches given below, has advantages. A high-precision computational technology for implementing this approach is also described and a comparison of the results of the trajectory approach with the Euler approach is given using the example of the molecular dynamics of a graphene plate.
Keywords: quaternions, rotation description, inertia tensor, molecular dynamics, trajectory approach, Runge-Kutta method, Euler angles, classical Euler approach.

Введение

Известны два способа определения вращательного движения: первый подход был предложен Леонардом Эйлером [1]. Теория Эйлера заключается в том, что если оси автономной системы отсчета совпадают с главными осями инерции перемещающегося тела, то тензор инерции примет вид диагональной матрицы. Позже был разработан ещё один способ, предложенный Уильямом Гамильтоном для описания вращения — кватернионы вращения. По своей сути, кватернионы — это система гиперкомплексных чисел, образующих четырехмерное векторное пространство над полем вещественных чисел. Проще говоря, он разрешил вопрос, суть которой является описание поворота тела при переходе из трехмерного евклидового пространства в четырехмерное пространство. Хоть и кватернионы вращения не имеют тех недостатков присущих способу Эйлера, но этот способ более сложен и имеет к тому же свои проблемы.

В данной работе мы опишем измененныйспособ описания поворотов молекулярных конструкций с использованием классического высокоточного расчётного алгоритма. Этот подход имеет отличия от классического подхода Эйлера, т.к. используются проекции уравнений вращательного движения на оси абсолютного базиса, к тому же это снимает ограничения по предельным углам нутации. В подходе кинематических соотношений Эйлера имеется координатная особенность при $\Theta = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$, которое и создает ограничения. При этом положение тела в пространстве определяется совокупностью координат атомов углерода (представительными точками). Также, известный эффект “шарнирный замок” (“gimballock”) не наблюдается в данном подходе. Т.е. получается, что этот подход допустим для использован в любых макроскопических телах. Так как, чтобы не допустить данный эффект требуется взять три представительные точки, не лежащие на одной прямой.

Говоря о плюсах данного подхода, то следует упомянуть, что в задачах молекулярной динамики с использованием углов Эйлера есть вероятность встретить неопределенные случаи или поведения. К тому же, этот метод прост для понимания и имеет высокую точность. Имеется высокая оптимизация, так как пересчёт величин по итерациям не требуется. Кроме того, в рассмотрение могут быть включены электромагнитные поля, заряды, магнитные моменты и в подходе Эйлера будет необходимо также учитывать все эти величины и постоянно производить пересчет из одной системы координат в другую.

Математическая модель

В рассматриваемой модели, молекулы интерпретируются как твердые тела, а в узлах сетки находятся атомы. Уравнения записаны в общем виде и с учетом взаимодействия каждого атома с другими атомами. Чтоб сравнить наш траекторных подход и подход Эйлера, мы испытали простейшие случаи инерциального движения. Для расчётов мы использовали схему Рунге-Кутты, так как метод относится к методам высокого порядка и имеет высокую скорость расчета для схем рассматриваемого класса, т.к. является схемой четвертого порядка. Но требуется рассчитать значения в четырех промежуточных позициях.

Уравнения об изменении момента количества движения (в абсолютном базисе) имеют следующий вид:

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum_{k=1}^{K} \left(\left(y_k - y_c \right) Z_k - \left(z_k - z_c \right) Y_k \right) = L_x, \qquad (1)$$

$$\frac{dK_y}{dt}=\sum_{k=1}^{K}\Big(\left(z_k-z_c\right)X_k-\left(x_k-x_c\right)Z_k\Big)=L_y, \qquad (2)$$

$$\frac{dK_z}{dt}=\sum_{k=1}^{K}\Big(\left(x_k-x_c\right)Y_k-\left(y_k-y_c\right)X_k\Big)=L_z. \qquad (3)$$

Здесь x_k, y_k, z_k– фазовые компоненты атома с индексом k; x_c, y_c, z_c — координаты центра молекулы; здесь K — число атомов в молекуле; K_x, K_y, K_z– компоненты вектора кинетического момента.

$$X_k=-\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x}U\left(\rho_{kj}\right), Y_k=-\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial y}U\left(\rho_{kj}\right), Z_k=-\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial z}U\left(\rho_{kj}\right). \qquad (4)$$

где N — кол-во атомов взаимодействующих с атомом индекса k, $\rho_{kj}=\sqrt{\left(x_k-x_j\right)^2+\left(y_k-y_j\right)^2+\left(z_k-z_j\right)^2}$ — расстояние между атомами с индексами k и j. Тогда относительно расстоянияимеем потенциал взаимодействий между данными атомами $U\left(\rho_{kj}\right)$.

Компонентыкоординат моментов количества движения определяются как результат произведения тензора инерции на вектор мгновенной угловой скорости:

$$\begin{aligned}K_x&=A\omega_x+F\omega_y+E\omega_z,\\K_y&=F\omega_x+B\omega_y+D\omega_z,\\K_z&=E\omega_x+D\omega_y+C\omega_z,\end{aligned} \qquad (4)$$

При этом элементы тензораинерции вычисляются следующими формулами:

$$A=m\sum\Big(\left(y_k-y_c\right)^2+\left(z_k-z_c\right)^2\Big), B=m\sum\Big(\left(z_k-z_c\right)^2+\left(x_k-x_c\right)^2\Big),$$

$$C=m\sum\Big(\left(x_k-x_c\right)^2+\left(y_k-y_c\right)^2\Big).$$

$$\begin{gathered}D=-m\sum\left(y_k-y_c\right)\left(z_k-z_c\right)_i, E=-m\sum\left(z_k-z_c\right)\left(x_k-x_c\right),\\F=-m\sum\left(x_k-x_c\right)\left(y_k-y_c\right).\end{gathered} \qquad (5)$$

где m — масса атома. Компоненты атомов молекулярной конструкции можно определить через сумму скорости молекулы и скорости вращения атома вокруг центра масс молекулы:

$$\frac{dx_k}{dt} = u_c + u_r, \frac{dy_k}{dt} = v_c + v_r, \frac{dz_k}{dt} = w_c + w_r. \tag{6}$$

где u_c, v_c, w_c – компоненты скорости центра масс молекулы, а u_r, v_r, w_r — компоненты скорости вращения атома относительно центра масс. Тогда из сказанного выше, справедливы следующие формулы:

$$u_r = \omega_y z_k - \omega_z y_k, v_r = \omega_z x_k - \omega_x z_k, w_r = \omega_x y_k - \omega_y x_k. \tag{7}$$

Координаты и скорости барицентра молекулы подчиняются следующим дифференциальным уравнениям:

$$\frac{dx_c}{dt} = u_c, \frac{dy_c}{dt} = v_c, \frac{dz_c}{dt} = w_c, \tag{8}$$

$$\frac{du_c}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{K=1}^{K} X_k = U_c, \ \frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{K=1}^{K} Y_k = V_c, \ \frac{dw_c}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{K=1}^{K} Z_k = W_c. \tag{9}$$

где M — масса молекулы.

Результаты расчетов

Для проведения расчета мы выбрали графеновый лист (рис. 1), в соотношении 2:1 длины к ширине. Погрешность вычислений во всех случаях не превышала 10^{-28}.

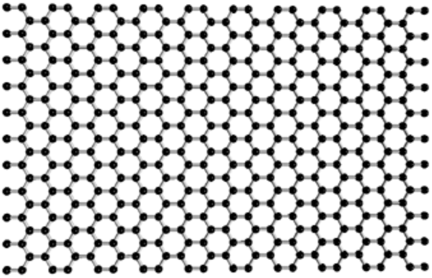


Рисунок 1. Лист графена.

Для начала проведем сравнение двух подходов на простейшем случае, при вращении вокруг одной оси длительностью 0.1 нс и с начальной чистотой $500 GHz$.

Кроме того, следуетучесть, что если угол нутации равен нулю, то невозможно произвести расчёт используя подход Эйлера. Следовательно, для удобного сравнения был произведён аналогичный поворот и для траекторного подхода.

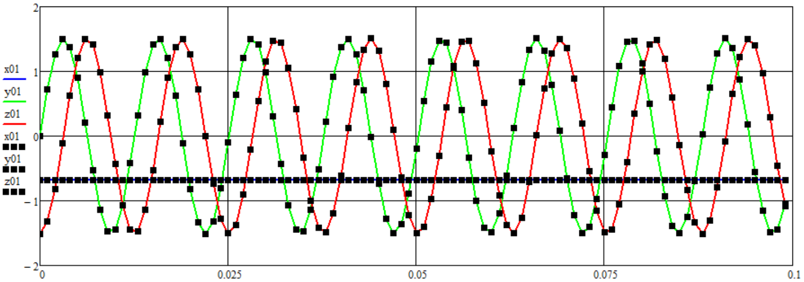


Рис. 2. Проекции траекторий одного атома графена
($p = 500\,GHz\,/\,\omega_x = 500, \omega_y = 0, \omega_z = 0$)

Рисунок 2 относится к следующим начальным условиям: $p = 500\,GHz,\ q = 0,\ r = 0,\ \omega_x = 500,\ \omega_y = 0,\ \omega_z = 0$. Сплошной линией показаны траектории, относящиеся к подходу Эйлера и квадратами показаны результаты, полученные траекторным подходом.

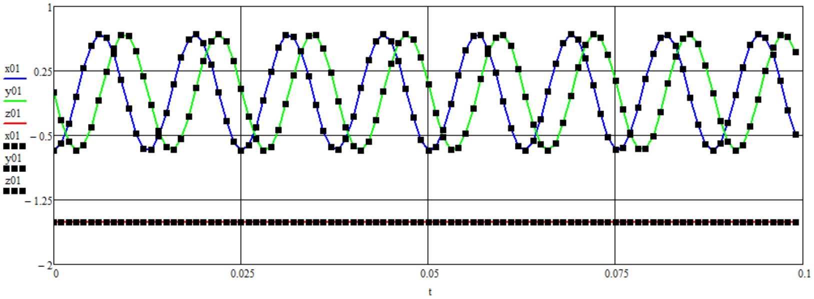


Рис. 3. Проекции траекторий одного атома графена
($q = 500\,GHz\,/\,\omega_y = 500$)

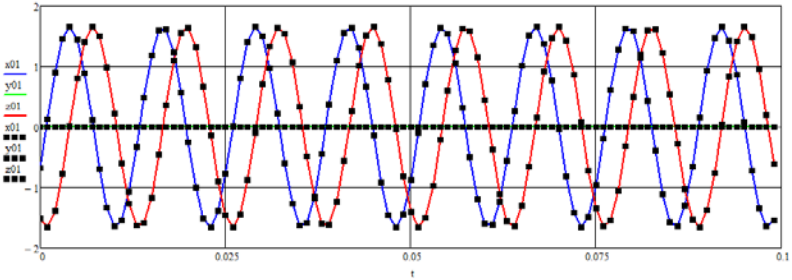


Рис. 4. Проекции траекторий одного атома графена
($r = 500GHz/\omega_z = 500$)

На рисунках [2]-[4] иллюстрированы итоги расчётов простого инерциального вращения вокруг одной оси и траекторным подходом, и подходом Эйлера. По рисункам видно, что в каждом случае мы получаем соответствие методов и точное соблюдение сохранения баланса энергии.

Далее на рисунке 6 и графике 7 иллюстрирован случай, когда вращение неустойчиво, или также известный эффект TRE (tennisracketeffect). При условии, когда соотношение длины и ширины у графенового листа при неустойчивом вращении равняется 2:1, то моменты инерции отличается значительно.

Для того чтобы добиться проявления TRE необходимо задать начальное вращение не только вокруг оси с промежуточным моментом инерции, но и ненулевую частоту вокруг ещё одной оси. Начальные частоты вращения для траекторного подхода: $\omega_x = 0.1GHz, \omega_y = 500GHz, \omega_z = 0$; Начальные частоты вращения для подхода Эйлера: $p = 500GHz, q = 0.1GHz, r = 0$.

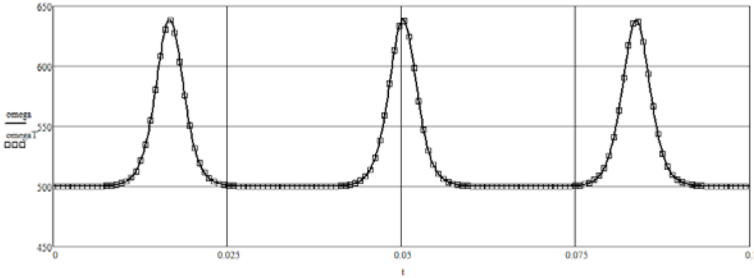


Рис. 5. Сравнение полных частот вращения.

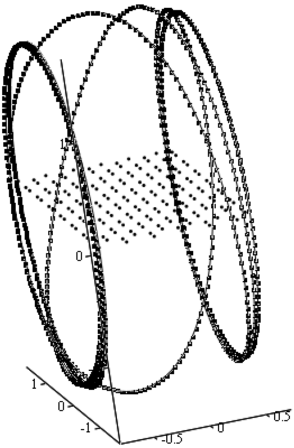


Рис. 6. Сравнение траектории одного
из атомов графеновой пластинки

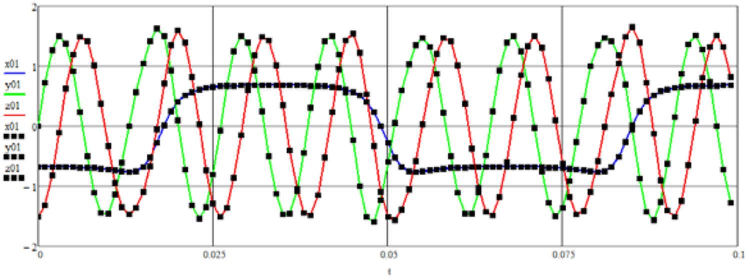


Рис. 7. Проекции координаты одного и того же атома графена

По графикам можно заметить, что на рисунке5 полная угловая частота вращения на π радиан имеет три одинаковых пика, что соответствует трём круговым поворотам графеновой пластины. Переходы из одного состояния в другое аналогичны моментам начала и конца пиков на рис. 5. Эти же 3 круговых поворота можно заметить и на рисунке 6. Сохранение баланс энергии в этом случае также точно соблюдается, как и в предыдущих случаях. На рисунке 7 можно видеть, что у проекции координаты *x* есть два положения, в которых атом находится между поворотами.

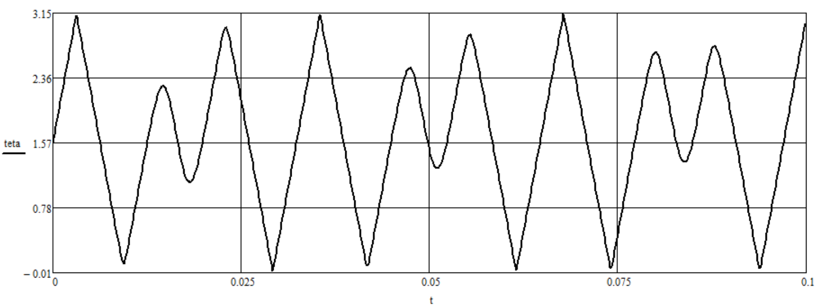


Рис. 8. Изменение углов нутации во времени

В подходе Эйлера важно контролировать угол нутации (рис. 8), так как при достижении углов, кратных π возникает неопределенность, связанная с координатной особенностью, которое может привести к возникновению грубых погрешностей и ошибок. В данном случае мы также получили полное совпадение как частот вращения, так и положений тела в пространстве.

Заключение

По итогам результата описанный нами подход показал очевидные преимущества в применение в задачахпо теории динамики деформирующих молекулярных конструкций. Проведя аналогию с классическим метод Эйлера и с нашим траекторным подходом, то получаем один и тот же результат при тех же условиях. Кроме того, предложенный подход может решить спектр задача о дипольном излучении ионов, излучении Вавилова-Черенкова и т.д. среди задач молекулярной динамики. При этом применимость подхода пригодна не только для задач молекулярной динамики, а для большинства задач, в условиях которых присутствует вращение тел. В итоге, был описан новый подход, использование которого в состоянии помочь в решении многих задач.

Литература

1. Landau, L.D.; Lifshitz, E. M. (1996), Mechanics (3rd ed.), Oxford: Butterworth-Heinemann, ISBN 978-0-7506-2896-9

2. W. R. Hamilton, On a new species of imaginary quantities connected with a theory of quaternions, Proc. Royal Irish Acad. 2, 424–434 (1844). URL http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/ People/Hamilton/Quatern1/

3. Hamilton W. R. On quaternions, Proc. Royal Irish Acad. 3, 1– 16 (1847). URL http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/ Hamilton/Quatern2/.

4. Karney, Charles. (2007). Quaternions in molecular modeling. Journal of molecular graphics & modelling. 25. 595-604. 10.1016/j.jmgm.2006.04.002.

5. Hemingway, E.G., O'Reilly, O.M. Perspectives on Euler angle singularities, gimbal lock, and the orthogonality of applied forces and applied moments. Multibody Syst Dyn 44, 31–56 (2018). https://doi.org/10.1007/s11044-018-9620-0

6. Mardesic, Pavao& Guillen, G. J & van damme, léo&Sugny, Dominique. (2020). Geometric Origin of the Tennis Racket Effect. Physical Review Letters. 125. 10.1103/PhysRevLett.125.064301.

7. Ma, Yue & Khosla, Kiran & Stickler, Benjamin & Kim, M. S. (2020). Quantum Persistent Tennis Racket Dynamics of Nanorotors. Physical Review Letters. 125. 10.1103/PhysRevLett.125.053604.

УДК 531.16, 51-73

ДИНАМИКА ФУЛЛЕРЕНА C_{60} В УГЛЕРОДНОЙ НАНОКАМЕРЕ[1]

© **Бубенчиков Алексей Михайлович**
доктор физико-математических наук, профессор,
ведущий научный сотрудник регионального научно-образовательного
математического центра, профессор кафедры теоретической механики,
Томский государственный университет
634050, Томск, пр. Ленина, 36
bubenchikov_am@mail.ru

© **Челнокова Анна Сергеевна**
младший научный сотрудник регионального
научно-образовательного математического центра,
старший преподаватель кафедры теоретической механики,
Томский государственный университет
634050, Томск, пр. Ленина, 36
smolina-nyuta@mail.ru

Аннотация. В работе представлен способ описания пространственного движения бакиболла, основанный на использовании уравнений вращательного движения фуллерена, записанных в абсолютном базисе. Предлагается также высокоточный алгоритм численной реализации разработанного подхода. На его основе проводится исследование динамического состояния бакиболла, находящегося в цилиндрической углеродной камере.

Ключевые слова: фуллерен, углеродный наноконтейнер, молекулярная динамика, траекторный подход.

FULLERENE C_{60} DYNAMICS IN A CARBON NANOCHAMBER

Bubenchikov Alexey M.
Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Leading Researcher

Chelnokova Anna S.
Junior Researcher, Senior Lecturer

Tomsk State University
36 Lenin Ave., Tomsk, 634050, Russia

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90087

Abstract. The article presents a method for describing the spatial motion of a buckyball based on the use of fullerene rotational motion equations written in an absolute basis. A high-precision algorithm for the numerical implementation of the developed approach is also proposed. On its basis, a study of the dynamic state of a buckyball located in a cylindrical carbon chamber is carried out.

Keywords: fullerene, carbon nanocontainer, molecular dynamics, trajectory approach.

Введение

Молекулярные структуры, составленные фуллеренами, графенами и нанотрубками имеют большие потенциальные применения в нанотехнологиях. Они могут использоваться как преобразователи энергии [1,2], насосы, устройства для опреснения и охлаждения воды [3–5], контейнеры для доставки лекарств [6,7], челночные запоминающие устройства, переключатели, датчики и наноасцилляторы [8–9].

В данной работе рассмотренна динамика молекулы фуллерена C_{60} в наноконтейнере: одностенной углеродной нанотрубке, диаметром 1,6 нм, высотой 4 нм, с плоскими графеновыми крышками (рис. 1).

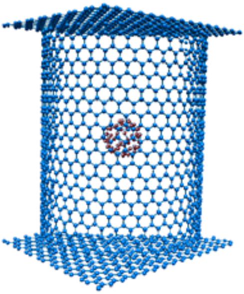


Рис. 1. Углеродная камера с фуллереном C_{60}.

1. Математическая модель

Подвижную молекулу C_{60} будем рассматривать как недеформируемую молекулярную конструкцию. Вращение фуллерена может быть описано в рамках подхода атом-атомных взаимодействий. Его применение сводит проблему взаимодействия супермолекул к проблеме взаимодействия совокупности силовых центров, роль которых в данном случае выполняют атомы углерода.

Вращения фуллерена вокруг его центра масс могут быть определены на основе уравнений теоремы об изменении момента количества движения вращающегося объекта. В абсолютном базисе они представлены следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\frac{dK_x}{dt} &= \sum_{k=1}^{K}\left(\left(y_k - y_c\right)Z_k - \left(z_k - z_c\right)Y_k\right) = L_x,\\
\frac{dK_y}{dt} &= \sum_{k=1}^{K}\left(\left(z_k - z_c\right)X_k - \left(x_k - x_c\right)Z_k\right) = L_y,\\
\frac{dK_z}{dt} &= \sum_{k=1}^{K}\left(\left(x_k - x_c\right)Y_k - \left(y_k - y_c\right)X_k\right) = L_z.
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Здесь x_c, y_c, z_c – координаты центра масс фуллерена, K — количество атомов в молекуле, K_x, K_y, K_z – проекции кинетического момента.

Уравнения системы (1) позволят определить проекции вектора мгновенной угловой скорости C_{60} на оси абсолютного базиса: ω_x, ω_y, ω_z. Для этих компонент скоростей нужны начальные условия:

при $t = 0$: $\omega_x = \omega_x^0$, $\omega_y = \omega_y^0$, $\omega_z = \omega_z^0$. (2)

Результирующие проекции сил определяются следующими суммами:

$$
X_k = -\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x}U\left(\rho_{jk}\right), Y_k = -\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial y}U\left(\rho_{jk}\right), Z_k = -\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial z}U\left(\rho_{jk}\right), \qquad (3)
$$

где N – число атомов окружения, ρ_{jk} – расстояние между k-ым атомом улерода в фуллерене и j-ым атомом наноконтейнера.

В свою очередь проекции момента количества движения определяются как произведение вектора мгновенной угловой скорости и тензора инерции фуллерена:

$$
\begin{aligned}
K_x &= A\omega_x + F\omega_y + E\omega_z,\\
K_y &= F\omega_x + B\omega_y + D\omega_z,\\
K_z &= E\omega_x + D\omega_y + C\omega_z.
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

Компоненты тензора инерции определяются следующими формулами:

$$\begin{gathered}A=m\sum\left(\left(y_i-y_c\right)^2+\left(z_i-z_c\right)^2\right), B=m\sum\left(\left(z_i-z_c\right)^2+\left(x_i-x_c\right)^2\right),\\ C=m\sum\left(\left(x_i-x_c\right)^2+\left(y_i-y_c\right)^2\right), D=-m\sum\left(y_i-y_c\right)\left(z_i-z_c\right)_i,\\ E=-m\sum\left(z_i-z_c\right)\left(x_i-x_c\right), F=-m\sum\left(x_i-x_c\right)\left(y_i-y_c\right).\end{gathered} \tag{5}$$

Здесь m – масса атома углерода.

Атомы, составляющие фуллерен, участвуют в сложном движении, а именно вместе с центром масс фуллерена и в поворотах вокруг него. Поскольку для сложного движения справедлива теорема сложения скоростей, то для координат точек, участвующих в сложном движении, будут справедливы соответствующие аддитивные формулы:

$$\begin{gathered}\frac{dx_i}{dt}=u_c+\omega_y(z_i-z_c)-\omega_z(y_i-y_c),\\ \frac{dy_i}{dt}=v_c+\omega_z(x_i-x_c)-\omega_x(z_i-z_c),\\ \frac{dz_i}{dt}=w_c+\omega_x(y_i-y_c)-\omega_y(x_i-x_c).\end{gathered} \tag{6}$$

Уравнения (6) интегрируются при соответствующих начальных условиях:

$$t=0,\ x_i=x_i^0,\ y_i=y_i^0,\ z_i=z_i^0\ \ (i=\overline{1,K}). \tag{7}$$

Координаты и скорости перемещающегося центра масс молекулы находятся из следующих дифференциальных уравнений и начальных данных:

$$\frac{dx_c}{dt}=u_c, \frac{dy_c}{dt}=v_c, \frac{dz_c}{dt}=w_c, \tag{8}$$

$$\frac{du_c}{dt}=\frac{1}{M}\sum_{K=1}^{K}X_k=U_c,\ \frac{dv_c}{dt}=\frac{1}{M}\sum_{K=1}^{K}Y_k=V_c,\ \frac{dw_c}{dt}=\frac{1}{M}\sum_{K=1}^{K}Z_k=W_c. \tag{9}$$

Здесь M — масса фуллерена.

$$\begin{gathered}t=0,\ x_c=x_c^0,\ y_c=y_c^0,\ z_c=z_c^0,\\ u_c=u_c^0,\ v_c=v_c^0,\ w_c=w_c^0.\end{gathered} \tag{10}$$

2. Результаты расчетов

Был исследован характер движения фуллерена C₆₀ в цилиндрической неподвижной углеродной нанокамере с плоскими прямоугольными графеновыми крышками. На небольших интервалах движения обмен энергией корпуса камеры с фуллереном является незначительным. Поэтому до определенного момента систему можно считать гамильтоновой. В начальный момент времени фуллерен находится в центре камеры, его центр масс покоится, а вектор угловой скорости имел направление по оси камеры: $\omega_x^0 = 0$, $\omega_y^0 = 0$, $\omega_z^0 = 100$ нс$^{-1}$.

На рисунке 2 показана самая начальная фаза движения бакиболла. Можно заключить, что начальное положение не является позицией равновесия, и фуллерен начинает свое движение под действием сил Ван-дер-Ваальса к зонам наиболее вероятного нахождения. Такими зонами являются потенциальные ямы у стенок камеры.

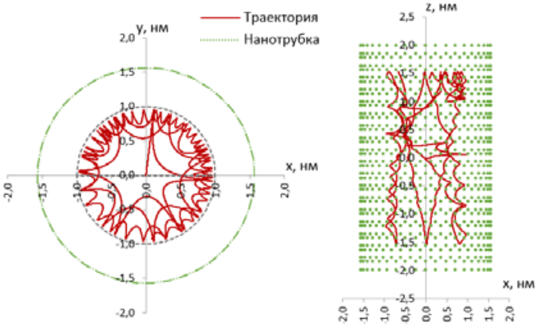


Рис. 2. График траектории центра масс фуллерена
(время движения от 0 до 0,5 нс)

Со временем действие торцевой потенциальной ямы усиливается, и бакиболл наряду с радиальными и окружными смещениями приобретает скорость в осевом направлении. Однако C_{60} не катится по дну потенциальной канавы, а перепрыгивает с одной позиции на другую.

На интервалах времени, представленных на рисунке 3 несколько изменился характер движения: прыжки бакиболла стали происходить у торцевых поверхностей. Здесь же появились диаметральные и почти диаметральные скачки, после которых происходит переход по боковой поверхности камеры до другой крышки, где фуллерен попадает в новую торцевую зону притяжения. В связи с этим наиболее вероятными зонами нахождения бакиболла в камере являются потенциальные ямы у плоских крышек.

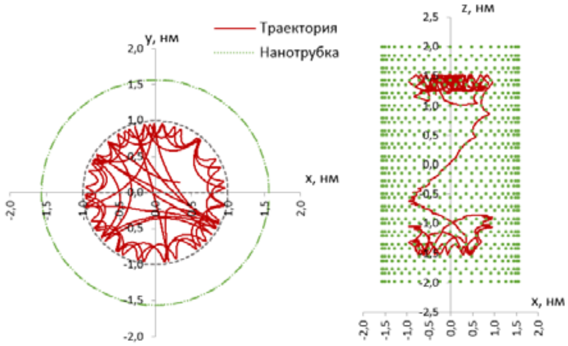


Рис. 3. График траектории центра масс фуллерена (время движения от 1,5 до 2 нс).

В процессе перемещения фуллерена внутри камеры происходит существенное изменение составляющих его кинетической энергии. Например, в потенциальных ямах у стенок заметно возрастает скорость центра масс бакиболла и его угловая скорость. При этом энергия вращения фуллерена изменяется скачком сразу после сближения с предельной поверхностью камеры, а после сближения, как и до него, она имеет постоянное значение (рис. 4). Другими словами, энергия вращения квантуется, поскольку квантуется угловая скорость, как по величине, так и по направлению. Этот ступенчатый переход реализуется с каждым ударом о стенку.

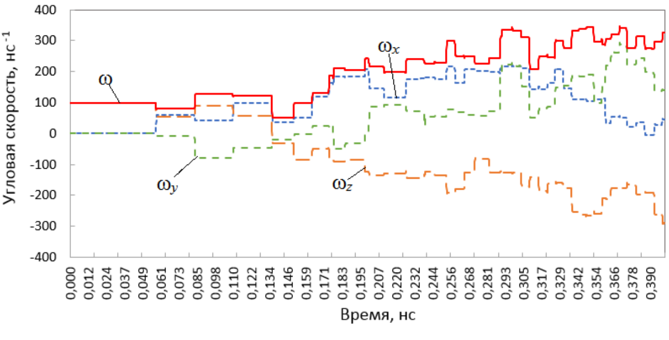


Рис. 4. График проекций вектора угловой скорости на оси координат (начальное значение $\omega_x^0 = 0$, $\omega_y^0 = 0$, $\omega_z^0 = 100$ нс$^{-1}$)

Заключение

Разработанный подход позволяет описать любые вращения фуллерена, в частности движения с множественными ударами о стенки нанокамеры. В результате этих ударов энергия вращения изменяется скачком, а между ними имеет постоянные значения. При попадании фуллерена в потенциальную яму и его преимущественном движении в касательном по отношению к стенкам направлении уменьшается высота прыжков и увеличивается их частота. Потенциальные ямы около плоских крышек камеры являются наиболее вероятными зонами нахождения для фуллерена.

Предложенный подход для описания движения фуллеренов справедлив для любых крупных и неизменяемых в процессе движения молекулярных конструкций.

Литература

1. Komatsu K., Murata M., Murata Y. Encapsulation of molecular hydrogen in fullerene C_{60} by organic synthesis // Science. 2005. 307. 238–240.
2. Farimani A. B., Wu Y. B., Aluru N. R. Rotational motion of a single water molecule in a buckyball // Phys. Chem. Chem. Phys. 2013. 15. 17993–18000.
3. Joseph S., Aluru N. R. Why are carbon nanotubes fast transporters of water? // Nano Lett. 2008. 8. 452–458.
4. Heiranian M., Farimani A. B., Aluru N. R. Water desalination with a single-layer MoS_2 nanopore // Nat. Commun. 2015. 6. 8616–8616.
5. Suk M. E., Aluru N. R. Water Transport through Ultrathin Graphene // J. Phys. Chem. Lett. 2010. 1. 1590–1594.
6. Wong B. S., Yoong S. L., Jagusiak A., Panczyk T., Ho H. K., Ang W. H., Pastorin G. Carbon nanotubes for delivery of small molecule drugs // Adv. Drug Deliv. Rev. 2013. 65. 1964–2015.
7. Prato M., Kostarelos K., Bianco A. Functionalized carbon nanotubes in drug design and discovery // Acc. Chem. Res. 2008. 41. 60–68.
8. Alipour A., Ansari R., Sadeghi F. Oscillation of C_{60} fullerene in carbon nanotube bundles // J. Vib. Acoust. 2013. 135(5). 051009.
9. Kang J.W.; Lee, K.W. Molecular dynamics study on the C_{60} oscillator in a graphene nanoribbon trench // J. Korean Phys. Soc. 2014. 65. 185–189.

УДК 544.344.015.32

ЦИФРОВИЗАЦИЯ ФАЗОВЫХ ДИАГРАММ ДЛЯ ДИЗАЙНА БЕССВИНЦОВЫХ ПРИПОЕВ[1]

© **Парфенова Мария Дмитриевна**
аспирант, СККМ ИФМ СО РАН
Россия, 670047, г. Улан-Удэ, ул. Сахьяновой, 6
krygentul@gmail.com

© **Воробьева Вера Павловна**
доктор физико-математических наук, доцент, ведущий СККМ,
ИФМ СО РАН
Россия, 670047, г. Улан-Удэ, ул. Сахьяновой, 6
vluts@ipms.bscnet.ru

© **Зырянов Александр Михайлович**
научный сотрудник СККМ,
ИФМ СО РАН
670047, г. Улан-Удэ, ул. Сахьяновой, 6
vluts@ipms.bscnet.ru

© **Луцык Василий Иванович**
доктор химических наук, профессор, зав. сектором СККМ,
ИФМ СО РАН
Россия, 670047, г. Улан-Удэ, ул. Сахьяновой, 6
vluts@ipms.bscnet.ru

Аннотация. До сих пор стоит проблема нахождения достаточно эффективного сплава-аналога припоев без содержания в составе свинца, отвечающего требованиям экологической безопасности. Знание фазовых диаграмм и термодинамических свойств компонентов и их смесей играет важную роль для разработки перспективных многокомпонентных материалов. Однако применение теоретических методов (термодинамические расчеты и расчеты из первых принципов), в сочетании с экспериментальными данными, не могут гарантировать 100%-е качество результатов в интерпретации фазовых равновесий в тройных системах. Авторами была разработана методика работы с использованием геометрической модели диаграммы для получения максимально подробной информации.

---

[1] Исследование выполнено в соответствии с госзаданием ФГБУН ИФМ СО РАН (проект № 0336-2016-0002)

Разработаны новые алгоритмы проектирования микроструктур в тройной системе с существованием разрыва растворимости в одной бинарной системе. Сначала с помощью термодинамических моделей рассчитываются контуры границ фазовых областей. Затем они используются для аппроксимации как линейчатых поверхностей, так и поверхностей с минимальными площадями. Такой алгоритм позволяет визуализировать информацию о системе, разделять и рассматривать поверхности со сложным строением на проекции.

Ключевые слова: Фазовая диаграмма, микроструктура, фазовая область, аппроксимация, линейчатая поверхность, полином, разрыв растворимости.

PHASE DIAGRAMS DIGITALIZATION FOR THE DESIGN OF LEAD-FREE SOLDERS

Parfenova Maria D.
Ph.D. student CAMDS,
IPMS SB RAS
6 Sakhyanova St., Ulan-Ude, 670047
krygentul@gmail.com

Vorob'eva Vera P.
Ph.D. (phys.-math.), Leading researcher CAMDS,
IPMS SB RAS
6 Sakhyanova St., Ulan-Ude, 670047, Russia
vluts@ipms.bscnet.ru

Zyryanov Alexander M.
scientist CAMDS,
IPMS SB RAS
6 Sakhyanova St., Ulan-Ude, 670047, Russia
vluts@ipms.bscnet.ru

Lutsyk Vasily I.
Ph.D. (chemistry), professor, head of CAMDS,
IPMS SB RAS
6 Sakhyanova St., Ulan-Ude, 670047, Russia
vluts@ipms.bscnet.ru

Abstract. There is still a problem of finding a sufficiently effective analog of solders without lead according to the requirements of environmental safety. Knowledge of phase diagrams and thermodynamic properties of components and their mixtures plays an important role for the development of promising multicomponent materials. However, the use of theoretical methods (thermodynamic calculations and calculations ab-initio), combined with experimental data, cannot guarantee 100% quality of results in the interpretation of phase equilibria in ternary systems. The authors have developed a methodology for using a geometric diagram model to obtain the most detailed information. New algorithms for designing microstructures in a ternary system with the existence of a solubility gap in one binary system have been developed. First, the contours of the boundaries of the phase regions are calculated using thermodynamic models. Then they used to approximate both ruled surfaces and surfaces with minimal areas. This algorithm allow visualizing information about the system, to separate and consider surfaces with a complex structure on the projection.

Keywords: Phase diagram, microstructure, phase region, approximation, ruled surface, polynomial, solubility gap.

Введение

Рассмотрим поверхность, которая задается исходным отрезком типа M_1M_2, проходящим вдоль кривых A_1A_4, B_1B_4 (рис. 1). Она визуализируется n+1 отрезками $M_{1i}M_{2i}$, а координаты точек M_{1i}&M_{2i} можно задать формулой (1), где t=i/n, i=0..n. После того, как полученные сегменты разделены на n+1 равных частей и соответствующие точки на соседних сегментах соединяются, производится поиск поверхности.

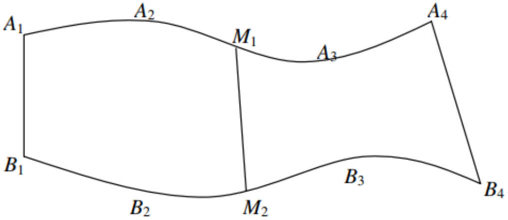


Рис. 1. Линейчатая поверхность первого типа

Направляющие кривые задаются векторными функциями $(x_1(t), y_1(t), z_1(t))$, $(x_2(t), y_2(t), z_2(t))$,

$$\begin{aligned} x_i(t) &= a_{i1}t^3 + a_{i2}t^2 + a_{i3}t + a_{i4}, \\ y_i(t) &= b_{i1}t^3 + b_{i2}t^2 + b_{i3}t + b_{i4}, \\ z_i(t) &= c_{i1}t^3 + c_{i2}t^2 + c_{i3}t + c_{i4} \end{aligned} \tag{1}$$

а их коэффициенты определяются:

$$\begin{cases} (x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (x_{11}, y_{11}, y_{11}) \\ (x_1(t_1), y_1(t_1), z_1(t_1)) = (x_{12}, y_{12}, y_{12}) \\ (x_1(t_2), y_1(t_2), z_1(t_2)) = (x_{13}, y_{13}, y_{13}) \\ (x_1(1), y_1(1), z_1(1)) = (x_{14}, y_{14}, y_{14}) \end{cases}, \begin{cases} (x_2(0), y_2(0), z_2(0)) = (x_{21}, y_{21}, y_{21}) \\ (x_2(t_3), y_2(t_3), z_2(t_3)) = (x_{22}, y_{22}, y_{22}) \\ (x_2(t_4), y_2(t_4), z_2(t_4)) = (x_{23}, y_{23}, y_{23}) \\ (x_2(1), y_2(1), z_2(1)) = (x_{24}, y_{24}, y_{24}) \end{cases},$$

где (x_{1j}(t), y_{1j}(t), z_{1j}(t)) & (x_{2j}(t), y_{2j}(t), z_{2j}(t)) — координаты заданных точек A_j&B_j, j=1..4, и t_i, i=1..4 — значение чисел принадлежат интервалу (0, 1), при условии, если $t_1 \neq t_2$, $t_3 \neq t_4$.

Для более сложных поверхностей (рис. 2), используются координаты mn точек A_{ij} (i=1..m, j=1..n). Исходная кривая задается в виде многочлена степени m-1. Любая из m направляющих кривых задается векторными функциями (x_1(t), y_1(t), z_1(t)), (x_2(t), y_2(t), z_2(t)),..,(x_m(t), y_m(t), z_m(t)), где x_i(t), y_i(t), z_i(t) — это многочлены n-1 степени.

$$\begin{aligned} x_i(t) &= a_{i1}t^n + a_{i2}t^{n-1} + a_{i3}t + a_{i4}, \\ y_i(t) &= b_{i1}t^n + b_{i2}t^{n-1} + b_{i3}t + b_{i4}, \\ z_i(t) &= c_{i1}t^n + c_{i2}t^{n-1} + c_{i3}t + c_{i4} \end{aligned} \tag{2}$$

а их коэффициенты определяются:

$$\begin{cases} (x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (x_{11}, y_{11}, y_{11}) \\ (x_1(t_1), y_1(t_1), z_1(t_1)) = (x_{12}, y_{12}, y_{12}) \\ \dots \\ (x_1(1), y_1(1), z_1(1)) = (x_{1,n}, y_{1,n}, y_{1,n}) \end{cases}, \begin{cases} (x_m(0), y_m(0), z_m(0)) = (x_{m1}, y_{m1}, y_{m1}) \\ (x_m(t_1), y_m(t_1), z_m(t_1)) = (x_{m2}, y_{m2}, y_{m2}) \\ \dots \\ (x_m(1), y_m(1), z_m(1)) = (x_{m,n}, y_{m,n}, y_{m,n}) \end{cases},$$

$$a_{1,n} = x_0, a_{1,m} = \frac{\sum_{p=1}^{n}\left((-1)^{p+m}(x_{l,p} - x_{l,0})\mathrm{I}_m^p \prod_{\substack{i=1,\, j=0, \\ i>j;i,\, j\neq p}}^{n}(t_i - t_j) \right)}{\prod_{\substack{i=1,\, j=0 \\ i>j}}^{n}(t_i - t_j)}, m = 0..n-1,$$

где $t_0 = 0, t_n = 1, \mathrm{I}_0^p = 1, \mathrm{I}_1^p = \sum_{\substack{i=1, \\ i\neq p}}^{n} t_i, \mathrm{I}_2^p = \sum_{\substack{i=1,\, j=1 \\ i,\, j\neq p, i>j}}^{n} t_i t_j, \mathrm{I}_{n-1}^p = \prod_{\substack{i=1, \\ i\neq p}}^{n} t_i,$

где (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) — координаты соответствующих точек A_{ij}, i=1..m, j=1..n и t_i, i=1..n-2 — числа из интервала (0,1), при условии, что ti≠ tj, когда i≠ j.

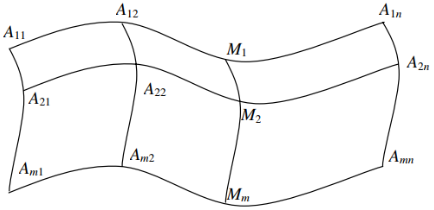


Рис. 2. Линейчатая поверхность второго типа

Поскольку поверхность образуется, когда кривая M_1M_m проходит вдоль кривых $A_{11}A_{1n}..A_{m1}A_{mn}$, она строится в виде p+1 кривых $M_{1i}M_{mi}$, которые определяются точками $M_{1i}..M_i$, заданными формулой (2), при t=i/p, i=0..p. Когда полученные сегменты разделяются на p+1 равных частей и соответствующие точки на соседних сегментах соединены, искомая поверхность выглядит как сетка из p_2 четырехугольников (рис. 2).

Тройная система

Тройная T-x-y диаграмма с разрывом растворимости в бинарной системе (рис. 3) состоит из трех обычных поверхностей на границах жидких и твердых однородных растворов и трех линейчатых поверхностей на границах трехфазной области. Все шесть поверхностей были аппроксимированы как линейчатые, которые имеют минимальные площади. Их границы, рассчитанные ранее термодинамически и аппроксимированные полиномами, служили исходными и направляющими элементами для линейчатых поверхностей [1]. Модель линейчатой поверхности первого типа (рис. 1) была использована для моделирования трех линейчатых поверхностей с горизонтальными исходными сегментами (рис. 4).

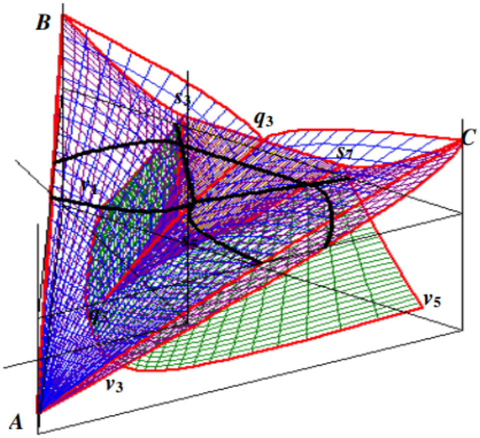


Рис. 3. Диаграмма T-x-y с разрывом растворимости
в бинарной системе B-C

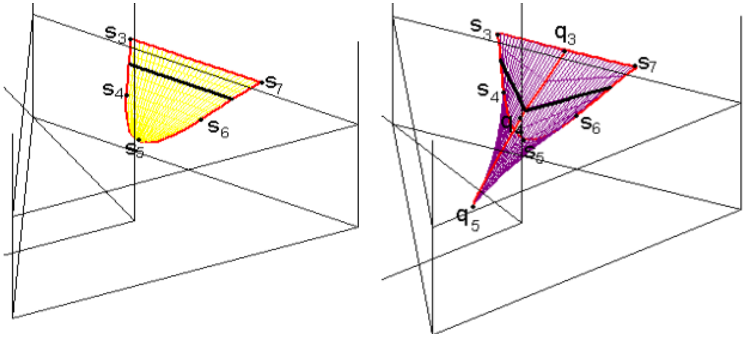


Рис. 4. Линейчатые поверхности
с горизонтальными исходными сегментами

Поверхности ликвидуса (рис. 5), солидуса (рис. 6) и сольвуса (рис. 7) были смоделированы как поверхности второго типа (рис. 2). Для этого поверхность ликвидуса сначала была разделена на 3 фрагмента: AK_1K_2, $K_1Bq_3q_5$, $q_5q_3CK_2$. Поверхность солидуса тоже была разделена на 3 фрагмента: AM_1M_2, $M_1Bs_3s_5$, $s_5s_7CM_2$.

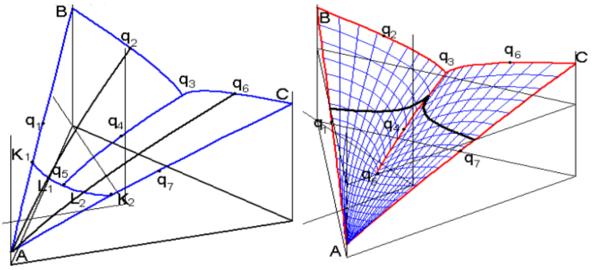


Рис. 5. Три фрагмента поверхностей ликвидуса и их визуализация

Таблица 1

Координаты точек поверхностей ликвидуса (рис. 5)

	A	B	C	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7
z_1	1	0	0	0.6	0	0	0.48	0.7	0	0.6
z_2	0	1	0	0.4	0.8	0.6	0.3	0.15	0.3	0
z_3	0	0	1	0	0.2	0.4	0.22	0.15	0.7	0.4
T	100	900	900	450	780	600	470	400	800	450

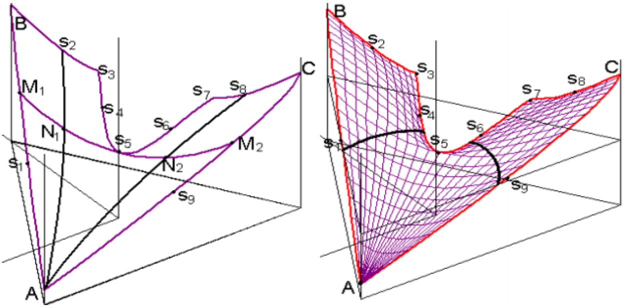


Рис. 6. Три фрагмента поверхностей солидуса и их визуализация

Таблица 2

Координаты точек поверхностей солидуса (рис. 6)

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9
z_1	0.26	0	0	0.2	0.3	0.2	0	0	0.26
z_2	0.74	0.82	0.7	0.5	0.35	0.3	0.3	0.18	0
z_3	0	0.18	0.3	0.3	0.35	0.5	0.7	0.82	0.74
T	600	680	600	470	400	470	600	680	600

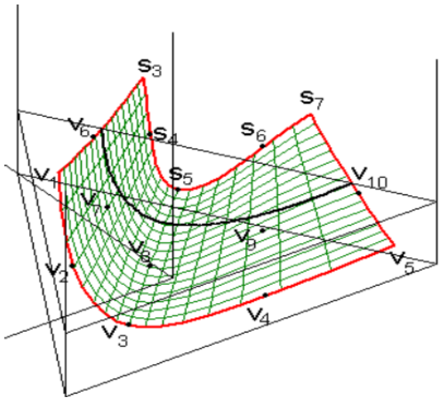


Рис. 7. Визуализация поверхностей сольвуса

Таблица 2

Координаты точек поверхностей сольвуса (рис. 7)

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}
z_1	0	0.5	0.6	0.5	0	0	0.35	0.46	0.35	0
z_2	0.1	0.1	0.2	0.4	0.9	0.17	0.2	0.27	0.45	0.83
z_3	0.9	0.4	0.2	0.1	0.1	0.83	0.45	0.27	0.2	0.17
T	50	30	0	30	50	300	250	200	250	300

Конкурс NSFC-РНФ 2022.

Рассмотренная методика сборки изобарных фазовых диаграмм тройных систем [1, 2-5] использовалась при подготовке заявки на Конкурс 2022 года на получение грантов Российского научного фонда (РНФ) по приоритетному направлению деятельности «Проведение фундаментальных научных исследований и поисковых научных исследований международными научными коллективами» и грантов Государственного фонда естественных наук Китая (NSFC) в рамках программы поддержки совместных исследовательских проектов NSFC-РНФ.

Поскольку наиболее перспективной в качестве разработки бессвинцовых припоев считается система Ag-Cu-Sn при добавлении в нее Au, как хорошего антиоксиданта, то в качестве объектов исследования выбраны трехкомпонентные системы, сформированные серебром и/или золотом. Кроме того, не исключены хорошие перспективы, связанные с системами на основе висмута, хрома, германия. В результате выполнения проекта будут проанализированы исходные литературные данные (как экспериментальные, так и полученные из термодинамических расчетов), и на их основе построены пространственные (3D) компьютерные модели фазовых диаграмм тройных систем Ag-Au-Sb, Ag-Cu-Sn, {Al, Cr, In}-Sn-Zn, Au-Ge-{Ag, Sb, Sn}, {Bi, In}-Sb-Sn, Cr-Zr-{Mo, W, V}, необходимые для разработки бессвинцовых припоев. На базе каждой такой модели будут созданы коммерческие продукты в виде автономной программы для каждой из перечисленных систем, оснащенной опциями визуализации как собственно фазовой диаграммы, так и результатов расчетов происходящих в соответствующей системе процессов кристаллизации.

Заключение

Фазовые диаграммы являются основным инструментом для изучения и проектирования микроструктуры. Проецируя геометрические элементы диаграммы в направлении концентрационного симплекса, мы разделяем нижерасполагающиеся фазовые области на термодинамически нестабильные фрагменты. Это означает, что самый нижний изотермический участок субсолидусных областей представляет собой основу диаграммы, разделенную на поля концентрации с уникальными схемами кристаллизации и микроструктурами.

Генотип гетерогенных материалов также может быть расшифрован с помощью анализа фазовых диаграмм. С этой целью все геометрические элементы фазовой диаграммы проецируются в направлении концентрационного симплекса. В результате этого фазовые области разделяются на фрагменты разного происхождения, и симплекс этих фрагментов состоит из концентрационных полей с различными наборами микроструктур. Поскольку фазовая диаграмма содержит эту информацию в форме, которая явно неразвита в ее геометрии, необходимо разработать специальную технику для манипулирования ее геометрической моделью (вырезать, спроецировать, разделить и т.д.), чтобы развить эту методику. Сначала контуры границ фазовых областей вычисляются с помощью термодинамических моделей, таких как технология Calphad. Затем они используются для аппроксимации поверхностей. Таким образом, программное обеспечение становится более экономичным. Наряду с хорошо известным и широко распространенным "молекулярным дизайном" и "структурным дизайном", этот подход в химии твердого тела открывает новые возможности для материаловедения. Когда область гетерогенного дизайна будет развиваться так же, как молекулярный и структурный дизайн, станет возможным моделировать любые типы фазовых диаграмм и использовать их для прогнозирования микроструктуры многофазных материалов и расшифровки генотипа этих материалов.

Исследование выполнено в соответствии с госзаданием ФГБУН ИФМ СО РАН (проект № 0336-2016-0002).

Литература

1. Lutsyk V. I., Zyryanov A. M. Microstructure design in the ternary systems with the only solubility gap // MRS Online Proceedings Library. 2003. V. 804. P. 272–277. https://doi.org/10.1557/PROC-804-JJ9.18

2. Parfenova, M.D., Vorob'eva V.P., Lutsyk V.I. 3D Computer Model of the Ag-Cu-Ni T-x-y Diagram: Verification of Sections in the Atlas of Phase Di-agrams for Lead-Free Soldering // Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus, Chemical Series. 2021. V. 57. N. 1. P. 15-24. DOI: https://doi.org/10.29235/1561-8331-2021-57-1-15-24.

3. Parfenova, M.D., Vorob'eva V.P., Lutsyk V.I. 3D Computer Model of the Al-Sn-Zn T-x-y Diagram // Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus, Chemical Series. 2022. V. 58. (В печати)

4. Parfenova M., Vorobjeva V., Lamueva M., Lutsyk V. T-x-y Diagrams Verification after Thermodynamic Calculation: Ag-Cu-Ni // Intern. Conf. on Computer Coupling of Phase Diagram and Thermochemistry (CALPHAD GLOBAL). June 2021. Abstracts. 2021. https://calphad.org/registration-payment-abstract/posters-in-category-experimental-phase-equilibria-thermodynamics-and-kinetics.

5. Parfenova M., Vorobjeva V., Lutsyk V., Zelenaya A. 3D computer models of isobaric phase diagrams for ternary systems to verify and validate thermodynamic calculation and experimental investigation: Ag-Bi(Sb)-Sn, Al(Bi)-Sn-Zn, Au-Ge-Sn // Book of abstracts: 2nd Edition of Intern. conf. on materials science and engineering. 28-30 Mar 2022. P. 43. https://magnusconferences.com/materials-science/

6. Parfenova M.D., Vorob'eva V.P., Lutsyk V.I. New variants of T-x diagram with three allotropes of one component // Abstracts of the International conference «Materials science of the future: research, development, scientific training (MSF’2022) » 5-7 April 2022. Nizhny Novgorod. P. 108.

УДК 517.95; 532.5

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПО ЯВНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЕ СМЕШАННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СО ВТОРЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

© **Ханхасаев Владислав Николаевич**
кандидат физико-математических наук, доцент
кафедры высшей математики
hanhvladnick@mail.ru

© **Баиров Сафрон Анатольевич**
аспирант кафедры высшей математики
bairov.sofron@gmail.com

Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40в

Аннотация. В работе представлена математическая модель и конечно-разностная схема процесса отключения электрической дуги в спутном потоке газа. Приводятся недостатки использования классического параболического уравнения теплопроводности для данного случая. Поставлена и численно решена начально-краевая задача с краевыми условиями второго рода в однородном стержне.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение теплопроводности, гиперболо-параболические уравнения, метод конечных разностей, вторые краевые условия.

NUMERICAL SOLUTION ACCORDING TO THE EXPLICIT DIFFERENCE SCHEME OF THE MIXED HEAT EQUATION WITH THE SECOND BOUNDARY CONDITIONS

Hanhasaev Vladislav N.
candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor

Bairov Safron A.
graduate student

East Siberian State University of Technology and Management
40v Klyuchevskaya St., Ulan-Ude, 670000, Russia

Abstract. The paper presents a mathematical model and a finite-difference scheme for the process of switching off an electric arc in a cocurrent gas flow. The disadvantages of using the classical parabolic heat equation for this case are given. An initial-boundary value problem with boundary conditions of the second kind in a homogeneous rod is posed and numerically solved.

Keywords: hyperbolic heat equation, hyperbolic-parabolic equations, finite difference method, second boundary conditions.

Введение

В работах В. Н. Ханхасаева [1], посвященных математическому моделированию процесса отключения электрической дуги в спутном потоке газа, аналитически и численно решались различные математические модели для гиперболического уравнения теплопроводности, получаемого обобщением гипотезы Фурье.

Дифференциальное уравнение переноса, получаемое из классического закона Фурье, в одномерном случае имеет вид параболического уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

Хорошо известно, что обычное уравнение теплопроводности имеет недостаток в том, что тепло может мгновенно распространяться в пространстве.

Причина этого дефекта причинно-следственной связи заключается в том, что уравнение теплопроводности первого порядка по времени. Второй недостаток, связанный с этим, — это ограничение задачи с начальными значениями. В задаче Коши может быть указана только температура T в момент времени t = 0. Но в экспериментах также производная по времени ∂T/∂t при t = 0 должна быть адаптирована к экспериментальной ситуации. Это возможно в гиперболическом уравнении теплопроводности второго порядка по времени.

Уравнение (1) представляет собой уравнение в частных производных параболического типа, и его аналитические решения показывают парадоксальное поведение бесконечной скорости распространения теплового возмущения. Любое локальное изменение температуры вызывает мгновенное возмущение в каждой точке среды на любом расстоянии от начала координат. Это противоречит теории относительности, а также известным механизмам теплопроводности [2].

Эксперименты со вторым звуком в твердом гелии и других кристаллических твердых телах, при очень низких температурах и очень короткой продолжительности ясно показали, что тепло течет как затухающая волна. Если кристаллическая структура практически бездефектна (идеальна) и выполняются условия для второго звука, то после импульсного нагрева наблюдаемое горбовидное образование повышенной температуры (затухающая тепловая волна) перемещается с постоянной скоростью через среду. Волна отскакивает назад и вперед от границ, медленно рассеивая свою энергию по пути. Затухающая тепловая волна описывается уравнением в частных производных гиперболического типа, впервые полученным Максвеллом, а затем постулированным Верноттом и Каттанео [3].

Применяя обобщенный закон Фурье, получаем гиперболическое уравнение теплопроводности в одномерном случае:

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2}$$

Раздел 1. Постановка начально-краевой задачи

Модифицируем математическую модель исследуемых процессов, рассматривая вместо гиперболического уравнения теплопроводности (2) уравнение теплопроводности смешанного типа:

$$k(x,t)u_{tt}+a(x,t)u_t=\lambda\cdot u_{xx}+c(x,t)u+f(x,t) \tag{3}$$

В прямоугольной области $G=[0,X]\times[T_1,T_2],\ \ T_1<0, T_2>0.$ При этом, $k(x,t)=0,\ t\leq 0;\ k(x,t)>0,\ t>0; a(x,t)>0, \square(x,t)\in G$, т.е. при $t\leq 0$ — параболическое, а при $t>0$ -гиперболическое.

Начально-краевая задача: Найти температурное поле в однородном стержне с длиной $X=\pi$ и временем расчета: $T_1=-0.2$, $T_2=1$; Начальные условия:

$$u(x,t)\Big|_{t=T_1}=u_0(x),\quad u_0(x)=\sin(x) \tag{4}$$

Граничные условия:

$$x=0: \quad -\lambda\frac{\partial u}{\partial x}=g_0, \quad g_0=0; \; x=L: \quad \lambda\frac{\partial u}{\partial x}=g_1, \quad g_1=0 \qquad (5)$$

Коэффициенты:$k=1$, $c=1$, $\lambda=1a=1;$Источник тепла: f(x,t)=0;

Раздел 2. Численное решение поставленной задачи

Применяя метод конечно-разностной аппроксимации [4] точной постановки начально-краевой задачи (3-5) её дискретной постановкой, рассмотрим явную разностную схему (6):

$$k(x,t)\frac{(u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1})}{\tau^2}+a(x,t)\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{\tau}=\lambda\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}+c\cdot u_{i,j}+f(x,t) \qquad (6)$$

Кроме этого проведем дискретизацию граничных условий II рода (7-8) с погрешностью O(h).

$$-\lambda\frac{\partial u}{\partial x}=g_0; \quad -\lambda\frac{u_{2,j}-u_{1,j}}{h}=g_0; \quad u_{1,j}=u_{2,j}+\frac{h\cdot g_0}{\lambda} \qquad (7)$$

$$\lambda\frac{\partial u}{\partial x}=g_1; \quad \lambda\frac{u_{n,j}-u_{n-1,j}}{h}=g_1; \quad u_{n,j}=u_{n-1,j}+\frac{h\cdot g_1}{\lambda} \qquad (8)$$

Программа написана в системе MathCAD-15. Результаты численного решения задачи (4,6-8) представлены на рисунке 1.

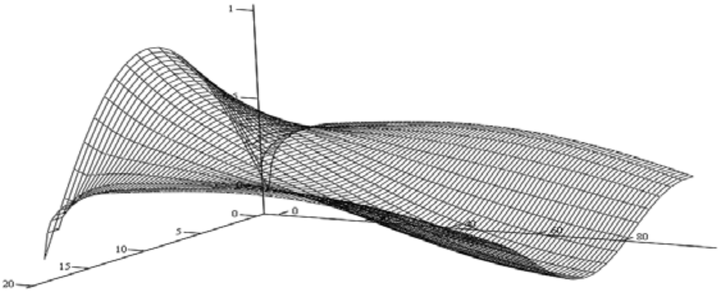


Рис. 1

Заключение

Данная модель адекватно описывает некоторые процессы, связанные с отключением электрической дуги в спутном потоке газа. В дальнейшем планируется использовать метод теплового баланса, применить эту математическую модель к более реальной задаче в двухмерном и трехмерном пространственных случаях.

Литература

1. Ханхасаев В. Н., Дармахеев Э. В. О некоторых применениях гиперболического уравнения теплопроводности и методах его решения. Математический анализ, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 155, ВИНИТИ РАН, М., 2018, 89–97 с.

2. Шашков А. Г., Бубнов В. А., Яновский С. Ю. Волновые явления теплопроводности: 2-е изд. доп. Москва: УРРС, 2004. 298 с.

3. Gunter Scharf, “Approach to steady state in the heat equation and the hyperbolic heat transfer equation”arXiv:1612.08527 [math-ph]

4. Дульнев Г. Н., Парфенов В. Г., Сигалов А. В. Применение ЭВМ для решения задач теплообмена: учебное пособие для теплофизических и теплоэнергетических спец. вузов. Москва: Высшая школа, 1990. 207 с.

УДК 517.95; 532.5

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ НЕЯВНОЙ СХЕМЫ СМЕШАННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ТРЕТЬЕГО РОДА

© **Ханхасаев Владислав Николаевич**
кандидат физико-математических наук, доцент
кафедры высшей математики
hanhvladnick@mail.ru.

© **Муняев Сергей Иннокетьевич**
аспирант кафедры высшей математики
SergMoon1986@mail.ru

Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления
Россия, 6700, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40в

Аннотация. В работе представлена математическая модель и конечно-разностная схема процесса отключения электрической дуги для температурного поля в однородном стержне. С помощью введения времени релаксации для существенно нестационарного случая теплопереноса и использования гиперболического уравнения теплопроводности ставится начально-краевая задача для смешанного уравнения с краевыми условиями третьего рода. Далее, эта задача численно решена в среде MathCad — 15 с помощью неявной схемы.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение теплопроводности, гиперболо-параболические уравнения, метод конечных разностей, третье краевое условие.

THE IMPLICIT SCHEME SOFTWARE IMPLEMENTATION OF THE MIXED HEAT EQUATION WITH THE THIRD KIND BOUNDARY CONDITIONS

Hanhasaev Vladislav N.
candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor

Munyaev Sergey I.
graduate student
East Siberian State University of Technology and Management
40v Klyuchevskaya St., Ulan-Ude, 670000, Russia

Abstract. The paper presents a mathematical model and a finite-difference scheme for the process of switching off an electric arc for a temperature field in a homogeneous rod. By introducing a relaxation time for an essentially non-stationary case of heat transfer and using a hyperbolic heat equation, an initial-boundary value problem is posed for a mixed equation with boundary conditions of the third kind. Further, this problem is numerically solved in the MathCad — 15 environment using an implicit scheme.

Keywords: hyperbolic heat equation, hyperbolic-parabolic equations, finite difference method, third boundary condition.

Введение

В работе рассматривается математическая модель для смешанного уравнения теплопроводности с краевыми условиями третьего рода. Как известно, классическое линейное уравнение теплопроводности параболического типа описывает локально-равновесные процессы в предположении, что изменение теплового потока происходит одномоментно с изменением градиента температуры. Однако интенсификация технологических процессов, использование материалов со сложной структурой, широкое распространение лазерной техники, возможность достижения экстремальных температур и давлений диктуют необходимость анализа поведения таких систем в экстремальных, локально-неравновесных условиях [1]. Например, для кратковременных переходных процессов, с очевидной нестационарностью, классические параболические модели теплопроводности, основанные на обычной гипотезе Фурье, создают грубые искажения температурных полей.

В таких процессах тепломассопереноса классические гипотезы о пропорциональности плотности потока вектору градиента потенциала приводят к бесконечной скорости распространения возмущений, что противоречит фундаментальным законам естествознания.

Для разрешения этого парадокса: в рамках теории газодинамики Дж. Максвелл, массообмена А. В. Лыков, теплопроводности К. Каттанео и П. Вернотте — из молекулярно-кинетических представлений, используя гипотезу о конечности времени соударения молекул и представления о их длине свободного пробега, получили новый обобщённый закон тепломассопереноса, в котором фигурирует дополнительный элемент, так называемое время релаксации, т. е. время установления термодинамического равновесия между тепловым потоком и градиентом потенциала. При этом выводится уравнение тепломассопереноса гиперболического типа [2].

Раздел 1. Численное решение 1 этапа начально-краевой задачи

С помощью определенных преобразований устанавливается связь указанного гиперболического уравнения тепломассопереноса и теории уравнений смешанного типа, что приводит к уравнению следующей формы [3]:

$$k(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} = b(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c(x,t)u + f(x,t), \qquad (1)$$

В работе, численное решение уравнения (1) с начально-краевыми условиями третьего рода, осуществляется методом конечных разностей по неявной схеме [4], в области $0 < x < X$, $-T \leq t \leq T$. Введем равномерную сетку с узлами $x_i = ih,\ 0 \leq i \leq N$, по переменной *x* и с узлами $-M \leq j \leq M$, $t_j = j \cdot \tau$ по переменной *t*, где $h = X/N$ и, $\tau = T/M$ — шаги сетки. Искомая функция $U_{i,j}$ является приближенным решением уравнения (1).

При этом $t \leq 0, k(x,t) = 0$, для $t > 0, k(x,t) = 1$, *X* — длина струны, *T* — начало и конец отчета по времени.

Численный расчет ведется с нижнего основания прямоугольника вверх по времени t в два этапа:

1. При $-T \leq t \leq 0$ уравнение (1) является параболическим;
2. При $0 < t \leq T$ уравнение (1) является гиперболическим.

Краевые условия в для $T \leq t \leq 0$ запишутся следующим образом:

$$\left[\mp p_{0,L}\cdot\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+q_{0,L}\cdot u(x,t)\right]_{x=0,L}=\begin{cases}g_0(t)\\ g_L(t)\end{cases}, \qquad (2)$$

начальные условия:

$$u(x,-T)=u_0(x), \qquad (3)$$

Проведем дискретизацию краевых условий III рода (2) для левого края:

$$-p_0\cdot\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}+q_0\cdot u|_{x=0}=g_0(t)\ \ =>$$

$$-p_0\cdot\frac{U_1^{j+1}-U_0^{j+1}}{h}+q_0\cdot U_0^{j+1}=g_0\left(t^{j+1}\right)$$

Введем $\gamma_0=\frac{h}{p_0}$ и $\gamma_L=\frac{h}{p_L}$ получаем в итоге:

$$U_0^{j+1}=U_1^{j+1}\frac{1}{\gamma_0 q_0+1}+\gamma_0 g_0\left(t^{j+1}\right)\frac{1}{\gamma_0 q_0+1}, \qquad (4)$$

Правое краевое условие для определения u_N выглядит так:

$$U_N^{j+1}=U_{N-1}^{j+1}\cdot\frac{1}{1+\gamma_L q_L}+\gamma_L g_L\left(t^{j+1}\right)\cdot\frac{1}{1+\gamma_L q_L}, \qquad (5)$$

Дискретизация начального условия (3):

$$u(x,0)=u_0(x)\quad => \quad U_i^0=\varphi(x_i),\ \ 0\le i\le N, \qquad (6)$$

На первом этапе для численного решения параболического уравнения, т.е. при $-T\le t\le 0$, применим неявную конечно-разностную схему. Пусть: $a(x,t)=1, b(x,t)=1, c(x,t)=1, f(x,t)=u(x,t)$, тогда первое уравнение (1) запишется в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u, \qquad (7)$$

для начально-краевой задачи (1, 4-6):

$$p_{0,L} = 1,\ q_{0,L} = 0,\ g_{1,2}(t) = 0, u_0(x) = \sin(x)$$

$$\begin{cases} \left[\mp \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]_{x=0,L} = 0 \\ u_0(x) = \sin(x) \end{cases}, \qquad (8)$$

Аппроксимируя дифференциальное уравнение (7) по неявной конечно-разностной схемы, получаем:

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{\tau} = \left(\frac{U_{i+1}^{j+1} - 2 \cdot U_i^{j+1} + U_{i-1}^{j+1}}{h^2}\right) + U_i^{j+1}, i = 1, \dots, N-1, N \geq 0, \quad (9)$$

Для решения системы уравнений (8-9), используется метод прогонки, для этого (9) сводим к каноническому виду:

$$A_i \cdot U_{i+1}^{n+1} + B_i \cdot U_i^{n+1} + C_i \cdot U_{i-1}^{n+1} = F_i, \qquad (10)$$

откуда определяются коэффициенты A_i, B_i, C_i, F_i, после вычислим:

$$U_i^{j+1} = \alpha_i U_{i+1}^{j+1} + \beta_i, \qquad (11)$$

где α_i, β_i — прогоночные коэффициенты:

$$\alpha_i = \frac{A_i}{B_i - C_i \alpha_{i-1}}, \beta_i = \frac{C_i \beta_{i-1} - F_i}{B_i - C_i \alpha_{i-1}}, \qquad (12)$$

Для определения α_0, β_0, используем краевые условия (4) и исходя из (11) получаем:

$$\begin{cases} \alpha_0 = \dfrac{1}{\gamma_0 q_0 + 1} \\ \beta_0 = \gamma_0 g_0(t^{j+1}) \dfrac{1}{\gamma_0 q_0 + 1} \end{cases}, \tag{13}$$

На этом, 1-ый этап расчета заканчивается.

Раздел 2. Численное решение 2 этапа поставленной задачи

Рассмотрим уравнение (1) при $0 < t \leq T$ и $k(x,t) = 1$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u, \tag{14}$$

Используя предыдущий подход, получаем:

$$\frac{U_i^{j+1} - 2U_i^j + U_i^{j-1}}{\tau^2} + \frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{\tau} = \left(\frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{h^2}\right) + U_i^j, \tag{15}$$

где $i = 1, \dots, N-1, N \geq 0$ для внутренних точек области. Систему (15) приводим к каноническому виду (10). Прогоночные коэффициенты определяются по (11-13).

Начальные условия для (4) равны значениям из результатов предыдущего расчета при *t = 0*, т.е. при *j = 0*, помимо этого для гиперболического уравнения требуется знать второе начальное условие, т.е. производную при *t = 0*, дискретизация которой выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,0) = v(x) \quad => \quad V(x_i) = \frac{U_i^0 - U_i^{-1}}{\tau}, \tag{16}$$

При $1 \leq i \leq N-1$ разложим в ряд Тэйлора первую производную по *t*:

$$\frac{U_i^1 - U_i^0}{\tau} = V(x_i) + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad (17)$$

где аппроксимацию второй производной возьмем из (15) и подставляя в (17) получим:

$$\frac{U_i^1 - U_i^0}{\tau} = V(x_i) + \frac{\tau^2}{2}\left(\left(\frac{U_{i+1}^0 - 2U_i^0 + U_{i-1}^0}{h^2}\right) + U_i^0 - \frac{U_i^1 - U_i^0}{\tau}\right),$$

после преобразований:

$$U_i^1 = U_i^0 + \frac{\tau}{2+\tau^2}\left[V(x_i) + \frac{\tau^2}{2}\left(\left(\frac{U_{i+1}^0 - 2U_i^0 + U_{i-1}^0}{h^2}\right) + U_i^0\right)\right], \qquad (18)$$

После установления всех необходимых компонентов уравнение (15) с начально-краевыми условиями (13, 17-18) вычисляются методом прогонки, при этом все 2 этапа решения реализованы в программном комплексе MathCAD-15. Результаты представлены на рисунке 1.

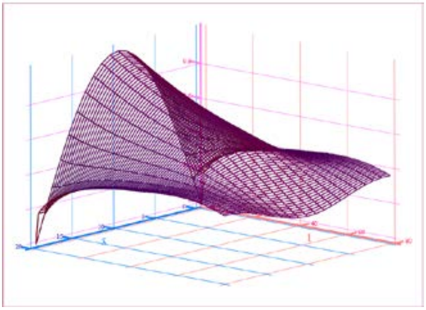


Рис. 1.

Заключение

В данной работе рассматривается математическая модель, где возможно появление тепловых волн с момента включения существенно нестационарных процессов. Указанная модель была выражена дифференциальным уравнением смешанного типа с соответствующими начальными условиями и краевыми условиями 3 — го рода, при этом для решения поставленной задачи использовались численные методы, а точнее, конечно-разностный метод по неявной схеме. Данная модель и ее решение адекватно описывают процесс отключения электрической дуги.

В дальнейшем планируется изучить данную модель в случае нелинейности коэффициентов уравнения (1) и в более реальных задачах для двухмерных и трехмерных пространственных случаев. При этом, чтобы указанная модель соответствовала действительности, где выполняются законы сохранения энергии, для решения будет использоваться интегро-интерполяционный метод, который также известен как метод теплового баланса.

Литература

1. Соболев С. Л. Локально-неравновесные модели процессов переноса // УФН. 1997. Т. 167. № 10. С. 1096–1106.
2. Шашков А. Г., Бубнов В. А., Яновский С. Ю. Волновые явления теплопроводности. Системно-структурный подход. Изд. 2-е. Москва: УРРС, 2004. 296 с.
3. Ханхасаев В. Н., Дармахеев Э. В. О некоторых применениях гиперболического уравнения теплопроводности и методах его решения // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. ВИНИТИ РАН. Москва, 2018. Т. 155. С. 89–97.
4. Дульнев Г. Н., Парфёнов В. Г., Сигалов А. В. Применение ЭВМ для решения задач теплообмена. Москва: Высшая школа, 1990. 207 с.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И СОВРЕМЕННЫЕ ТЕНДЕНЦИИ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

УДК 004.9

© Н. С. Ботясова, Д. Ф. Дерюгин, С.А. Цыбиков

ПРОТОТИП DISCOVERY-СЕРВИСА ДЛЯ КАТАЛОГОВ НАУЧНОЙ БИБЛИОТЕКИ УНИВЕРСИТЕТА

© **Ботясова Наталья Сергеевна**
студент, Институт математики и информатики
mrrnyash@gmail.com

© **Дерюгин Даниил Федорович**
старший преподаватель, Институт математики и информатики
dandwor@gmail.com

© **Цыбиков Анатолий Сергеевич**
кандидат педагогических наук, зав. кафедрой
Информационных технологий
cas313@rambler.ru

Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5

Аннотация. Научная библиотека каждого университета имеет электронные каталоги, включающие в себя как коллекцию самой библиотеки, так и множество подключенных внешних электронно-библиотечных систем (ЭБС). Каждая внешняя ЭБС имеет свой собственный веб-интерфейс, позволяющий пользователю получать доступ к научной литературе, содержащейся в базе данных этой ЭБС. Наличие множества подключенных ЭБС и их разрозненность вынуждают конечного пользователя библиотеки для доступа к интересующей научной литературе обращаться к множеству различных веб-интерфейсов, которые зачастую значительно отличаются друг от друга как по внешнему виду, так и по функционалу. При этом осуществлять поиск сразу по всем базам данных подключенных ЭБС для пользователя не представляется возможным.

Поисковый сервис единого окна (discovery-сервис) позволяет объединить содержащиеся в электронных каталогах библиотеки внешние ЭБС в единое информационное пространство и обеспечить функционал поиска научной литературы одновременно по всем базам данным этих ЭБС через единое поисковое окно. Таким образом, становится актуальной задача разработки поискового сервиса единого окна для каталогов научной библиотеки университета. В статье рассматривается прототип данного сервиса.

Ключевые слова: поиск документов, электронно-библиотечные системы, библиотеки, поисковый сервис, электронный каталог, единое поисковое окно, автоматизированная библиотечная информационная система, discovery-сервисы.

PROTOTYPE OF A DISCOVERY SERVICE FOR UNIVERSITY’S SCIENTIFIC LIBRARY CATALOGS

Botyasova Natalya S.
student, Institute of Mathematics and Computer Science

Deryugin Daniil F.
senior lecturer, lead programmer,
Institute of Mathematics and Computer Science

Tsybikov Anatoly S.
Candidate of Pedagogical Sciences, Head of the Department
of Information Technology

Dorzhi Banzarov Buryat State University
5 Ranzhurova St., Ulan-Ude, 670000, Russia

Abstract. The scientific library of each university has electronic catalogs, which include both the literature collection of the library itself and many connected external electronic library systems (ELS). Each external ELS has its own web interface that allows the user to access the scientific literature contained in the database of this ELS.

The presence of many connected ELS and their fragmentation force the end user of the library to use of various different web interfaces in order to access the scientific literature of interest. These web interfaces often differ significantly from each other both in appearance and functionality. At the same time, it is not possible for the user to search through all databases of connected ELS at once.

The single window search service (discovery service) allows to combine external ELS contained in the library's electronic catalogs into a single information space and provide the functionality of searching scientific literature simultaneously across all databases of these ELS through a single search window. Thus, the task of developing a single window search service for the catalogs of the university's scientific library becomes actual. The article considers the prototype of this service.

Keywords: document search, electronic library systems, libraries, search service, electronic catalog, single search window, integrated library system, discovery services.

Введение

Научная библиотека любого университета располагает электронными каталогами, содержащими множество коллекций научной литературы. Данные коллекции представлены в виде совокупности внутреннего каталога самой библиотеки, программной основой которого является автоматизированная библиотечная информационная система — АБИС, и множества подключенных внешних ЭБС. Для доступа к научной литературе, содержащейся в каждой из таких коллекций, пользователю необходимо воспользоваться одним из множества различных интерфейсов, предоставляемых внешними ЭБС, а также АБИС библиотеки [6]. При этом пользователю желательно иметь представление о том, в базе данных какой ЭБС может содержаться искомая научная публикация, в противном случае пользователь вынужден осуществлять поиск по всем ЭБС, поочередно переходя на внешний ресурс каждой из них, что негативно сказывается на удобстве взаимодействия с электронными каталогами библиотеки и является одной из причин массового оттока пользователей с ресурсов библиотек университетов [2].

Низкий уровень удобства поиска научной литературы в электронных каталогах библиотеки университетов и, как следствие, массовый отток пользователей с ресурсов библиотек, стали причиной необходимости интеграции в библиотечную среду системы, позволяющей осуществлять поиск и получать доступ к научной литературе, содержащейся в базах данных различных ЭБС, без необходимости обращения ко множеству различных интерфейсов. Такой системой является поисковый сервис единого окна, который предоставляет конечному пользователю единый интерфейс для поиска по всем базам данных внешних

ЭБС, содержащихся в электронных каталогах библиотеки. В статье рассматривается прототип поискового сервиса единого окна для каталогов научной библиотеки университета, его строение и принцип работы.

1. Описание предметной области

В настоящее время существуют системы, позволяющие объединить разрозненные коллекции электронных каталогов библиотеки университета в единое информационное пространство. Такие системы принято называть discovery-сервисами. Существующие discovery-сервисы можно разделить на два класса [1, 3]:

1. Сервисы, распространяемые по платной подписке;
2. Свободно распространяемые сервисы.

Наиболее известными сервисами, распространяемыми по платной подписке, являются EBSCO Discovery Service, WorldCat Discovery, Summon Web-Scale Discovery и Primo Central.

Свободно распространяемые discovery-сервисы являются набором программных инструментов с открытым исходным кодом, наиболее известные сервисы в данной категории — VuFind, Blacklight и eXtensible Catalog.

Также существуют российские discovery-сервисы, к ним относятся «Библиопоиск» и Единое окно доступа к ресурсам АППОЭР (Ассоциация производителей и пользователей образовательных электронных ресурсов).

Важными элементами discovery-сервисов являются [5]:

1. Пользовательский интерфейс, включающий в себя единую поисковую строку, множество фасетных фильтров для уточнения результатов поиска и блок выдачи результатов поиска.

2. Центральный индекс, содержащий в себе метаданные и ряд ключевых полей библиографических записей в виде JSON-подобных структур — документов, необходимых для осуществления поиска.

3. База знаний — содержит список внешних ЭБС, к которым библиотека имеет доступ.

4. Определитель ссылок — система, позволяющая определять ссылки по набору известных метаданных для предоставле-

ния пользователю полнотекстового доступа к интересующей научной публикации.

5. Алгоритмы определения релевантности поисковой выдачи, позволяющие ранжировать результаты поиска.

2. Постановка задачи

Отсутствие в электронной библиотечной среде университета системы, объединяющей разрозненные коллекции, становится причиной проблем не только для конечного пользователя, но и для самой библиотеки. При наличии множества подключенных внешних ЭБС для библиотеки не представляется возможным адаптировать и изменять интерфейсы этих ЭБС под нужды своих пользователей. Также у библиотеки отсутствует возможность улучшать систему взаимодействия с конечным пользователем, например, осуществив внедрение морфологического поиска или некоторых других дополнительных элементов. Кроме того, библиотека не имеет возможности осуществлять сбор и анализ статистики, связанной с поисковыми запросами пользователей.

Существующие решения также не могут удовлетворить нуждам библиотек университетов в полном объеме и имеют ряд проблем [6]:

1. Ограниченная поддержка русского языка у большинства крупных зарубежных discovery-сервисов, а также малое количество или отсутствие российских ЭБС и контент-провайдеров в центральном индексе данных сервисов.
2. Ограниченные возможности настройки состава коллекций (добавления или удаления доступных ЭБС из базы знаний).
3. Высокая сложность интеграции и обслуживания сервисов с открытым исходным кодом.
4. Широкий диапазон цен за подписку, который зависит от конфигурации конкретной библиотеки.
5. Отсутствие возможности выбора и замены конкретных технологий реализации хранения данных и технологий осуществления поиска. Технические возможности разных библиотек университетов могут существенно отличаться по производительности, поэтому для обеспечения наибольшей эффективности функционирования электронных каталогов библиотеки

необходимо иметь возможность адаптации программных модулей под доступные библиотеке технические ресурсы.

6. Недостаточная гибкость настройки набора функций. Данная проблема заключается в том, что большинство крупных discovery-сервисов обладают избыточным функционалом, в котором могут не нуждаться небольшие библиотеки, однако данный функционал может входить в минимальный платный набор и отказаться от него для библиотеки не представляется возможным.

3. Требования к прототипу системы

Для прототипа поискового сервиса единого окна был сформулирован ряд требований, согласно которым сервис должен обладать следующим функционалом:

1. Поиск научной литературы через единую поисковую строку.
2. Фасетная фильтрация для уточнения поискового запроса (тип документа, автор, заглавие, год издания, издательство, кодификационная информация).
3. Формирование библиографической записи для цитирования по стандартам ГОСТ, APA и MLA.
4. Загрузка, индексирование и хранение метаданных и библиографических данных из внешних ЭБС.
5. Авторизация пользователей и система ролей.
6. Хранение данных пользователей.
7. Возможность выбора и замены технологий хранения данных и технологий поиска путем конфигурирования системы.
8. Сбор статистики.

Следует отметить, что для возможности выбора и замены технологий хранения данных и поиска сервис должен быть реализован как совокупность модулей. Модульность предполагает возможность добавлять или отключать дополнительные модули без потери работоспособности и общей целостности системы.

4. Алгоритм обработки библиографических данных

Объединение разрозненных внешних ЭБС в единое информационное пространство реализуется посредством загрузки библиографических данных в формате MARC (Machine-

Readable Cataloging — «машиночитаемая каталогизация») из БД внешних ЭБС во внутреннюю БД системы. Метаданные и библиографические записи обрабатываются и сохраняются в БД системы в унифицированном виде для их последующего использования. Каждый раз при изменении состояния БД системы инициируется индексирование данных.

На рис. 1 изображена схема обработки библиографических данных в системе.

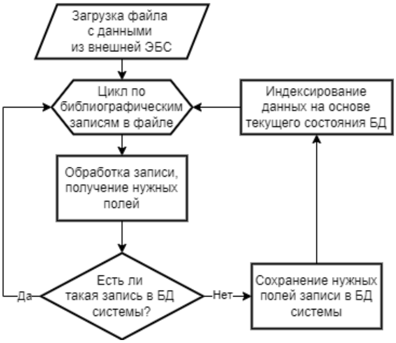


Рисунок 1. Схема обработки данных

5. Алгоритм поиска

Поиск научной литературы осуществляется по запросу, полученному из полей формы поиска. Каждое поле формы поиска имеет свой приоритет и привязано к определенному полю документов в центральном индексе (кроме единой поисковой строки). В случае ввода пользователем данных в нескольких полях, в системе формируется единый поисковый запрос, а между значениями, полученными из полей формы, устанавливается одна из логических операций — логическое умножение (И) или логическое сложение (ИЛИ). Оценка релевантности каждого найденного документа для конкретного поискового запроса может быть рассчитана с помощью функции ранжирования Okapi BM25 или ее модификаций [4].

На рис. 2 изображена схема процесса поиска научной литературы по запросу пользователя.

Рис. 2. Схема поиска научной литературы

Поиск осуществляется в центральном индексе системы, поскольку запрос к БД является более ресурсоемким. Кроме того, БД системы хранит данные, по которым поиск не осуществляется (например, данные пользователей или гиперссылки на полный текст документов на ресурсе внешней ЭБС), но которые необходимы для функционирования системы.

Заключение

Интеграция поискового сервиса единого окна в электронную библиотечную систему университета позволит улучшить ее качество. Для конечных пользователей библиотеки можно выделить следующие преимущества интеграции такой системы:

1. Возможность поиска научной литературы по всем коллекциям, доступным библиотеке университета, через единый интерфейс.
2. Получение релевантной поисковой выдачи.
3. Возможность автоматической генерации библиографической записи для цитирования по актуальному стандарту.

Для библиотеки можно выделить следующие преимущества интеграции подобной системы:

1. Возможность гибкой настройки системы в соответствии с техническими ресурсами библиотеки.

2. Возможность добавления дополнительного функционала в систему путем конфигурирования.

3. Возможность отключения функционала, в котором библиотека не нуждается путем конфигурирования.

4. Возможность сбора статистики.

5. Прирост пользователей электронных каталогов библиотеки ввиду повышения качества и удобства доступа к научной литературе.

Литература

1. Khiste G. P., Deshmukh R. K. Discovery services: an overview // Library Research World. 2017. T. 2, № 2. C. 24–32.

2. Schonfeld R. C. Does discovery still happen in the library // Roles and strategies for a shifting reality. 2014.

3. Sonawane C. S. Library discovery system: an integrated approach to resource discovery // Informatics Studies. 2017. T. 4, №. 3. C. 27–38.

4. Whissell J. S., Clarke C. L. A. Improving document clustering using Okapi BM25 feature weighting // Information retrieval. 2011. T. 14, № 5. C. 466–487.

5. Литвинова Н. Н. Организация единой точки доступа к ресурсам библиотеки: поиск вариантов реализации // Наука и научная информация. 2018. Т. 1, № 1. С. 60–66.

6. Снеткова А. А. Системы дискавери: роль в навигации по электронным ресурсам // И38 Интернет и современное общество: сборник тезисов докладов. Труды XIX Международной объединенной научной конференции «Интернет и современное общество» (IMS-2016), Санкт-Петербург, 22–24 июня 2016 г. Санкт-Петербург: Университет ИТМО, 2016. 80 с. С. 64–65.

УДК 004.9

ИНФОРМАЦИОННЫЙ РЕСУРС «ВЫПУСКНИКИ БГУ»

© **Мачнев Илья Алексеевич**
студент 3-го курса Института математики и информатики
machnev.ilya@mail.ru

© **Хабитуев Баир Викторович**
старший преподаватель кафедры Информационных технологий
bairkhabituev@bsu.ru

© **Семенова Эржена Васильевна**
доцент кафедры перевода и межкультурной коммуникации,
директор ИФИЯиМК
semenenovaev@bsu.ru

Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5

Аннотация. Организация сообществ выпускников — важнейшая задача для любого вуза. На данный момент большинство сообществ организуется в социальных сетях. Несмотря на все преимущества данного способа, у него есть существенный недостаток — вуз фактически не контролирует информацию о выпускниках. Учитывая, что база выпускников является визитной карточкой вуза, а также важна для организации взаимодействия с выпускниками, это становится серьёзной проблемой. В связи с этим задача разработки решения для создания и публикации базы выпускников в открытом доступе является актуальной задачей. Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова существует 90 лет, за время работы в университете было подготовлено более 50000 специалистов. В статье описаны требования и программные решения, которые были использованы при разработке прототипа информационного ресурса «Выпускники БГУ».

Ключевые слова: информационная система, базы данных, интерактивная карта, сообщество выпускников университета.

WEB-RESOURCE «BSU ALUMNI»

Machnev Ilya A.
Student
machnev.ilya@mail.ru

Khabituev Bair V.
Senior Lecturer
bairkhabituev@bsu.ru

Semonova Erzhena V.
associate professor of department
of Translation and Crosscultural Communication, director of IPFLMC
semenovaev@bsu.ru

Dorzhi Banzarov Buryat State University
5 Ranzhurova St., Ulan-Ude, 670000, Russia

Abstract. Alumni communities’ organization is the most important task for any university. Now, most communities are organized in social networks. Despite all the advantages of this method, it has a significant problem — the university does not actually control information about graduates. Considering that the alumni base is the hallmark of the university, and is important for organizing interaction with alumni, this becomes a serious problem. In this regard, the task of developing a solution for creating and publishing a database of graduates in the public domain is an urgent task. Buryat State University exists for 90 years, more than 50,000 specialists have been trained at the university during its work. The paper describes the requirements and software solutions that were used in the development of the prototype of the web-resource "BSU Alumni".

Keywords: web-resource, database, map service, alumni communit.

Введение

Во всех крупнейших университетах выпускники давно считаются активом. Сообщества выпускников активно участвуют в жизни университета: оказывают финансовую помощь, участвуют в проектах, взаимодействуют со студентами. На данный момент наиболее популярным вариантом являются сообщества выпускников, организованные в социальных сетях. Однако помимо очевидных достоинств у подобного решения есть ряд недостатков, главным недостатком является фактическое отсутствие контроля над информацией.

Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова существует 90 лет и на данный момент включает в себя 6 институтов, 7 факультетов, 1 общеуниверситетскую кафедру и колледж. За время его работы было подготовлено более 50 000 специалистов. На данный момент в университете обучается около 10 000 студентов. В связи с этим возникла необходимость в создании информационного ресурса для публикации и объединения данных о выпускниках.

1. Постановка задачи

Разрабатываемый ресурс представляет собой информационный ресурс, размещённый в сети Интернет. Ресурс должен иметь открытую и закрытую часть (личный кабинет). На этапе проектирования были разработаны требования к ресурсу.

Открытая часть доступна всем пользователям сети Интернет и позволяет просматривать информацию о выпускниках, карту выпускников, а также страницы авторизации и регистрации.

Информация о выпускниках представлена в виде списка выпускников, с возможностью фильтрации по факультетам/институтам и годам выпуска. В списке отображается факультет, фотография и фио выпускника. При нажатии на элемент списка отображается карточка выпускника с подробной информацией.

Карта выпускников представляет собой карту мира с нанесёнными метками — местоположениями выпускников.

Работа с базой данных выпускников должна быть доступна только авторизованным пользователям. Для того чтобы разместить информацию о себе посетитель сайта должен создать аккаунт и заполнить анкету с информацией в личном кабинете, после этого информация попадает на рассмотрение модераторов, после одобрения анкеты информация появится в публичном доступе.

Таким образом в система должна поддерживать три типа учётных записей: пользователь, модератор и администратор. В зависимости от типа учётной записи должны быть доступны разные функции.

Пользователь — может заполнять и редактировать свою анкету.

Модератор — может просматривать, одобрять, отклонять анкеты, а также добавлять, удалять и редактировать факультеты, хранящиеся в таблицах базы данных.

Администратор — может назначать модераторов из зарегистрированных пользователей, а также имеет доступ ко всем функциям модератора.

Информационный ресурс должен корректно отображаться как на мобильных устройствах, так и на стационарных компьютерах/ноутбуках.

2. Прототип ресурса «Выпускники»

В результате анализа требований, было выделено пять сущностей:

1. Анкета;
2. Факультет;
3. Статус анкеты;
4. Роль пользователя;
5. Пользователь.

После чего была разработана ER — модель, которая демонстирует взаимодействие данных в системе [1] (см. рис 1.).

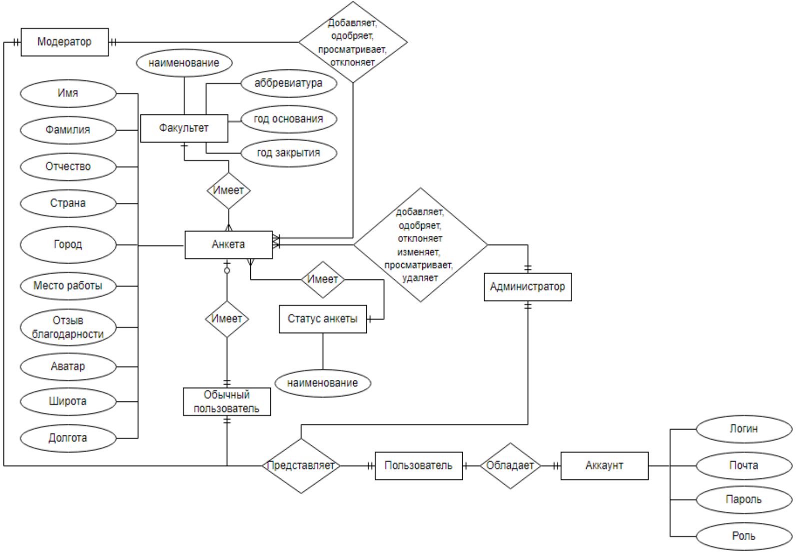


Рис. 1. ER-модель

Основными данными авторизованного пользователя являются его логин, почта и пароль. При помощи этих данных пользователи могут авторизоваться в системе.

Атрибутами анкеты являются: имя, фамилия, отчество, страна, город, место работы, отзыв благодарности о БГУ, широта, долгота (координаты, которые необходимо вычислять на основании введённого почтового адреса) и фотография.

Атрибутами факультетами являются: наименование, аббревиатура, год основания и год закрытия.

В ходе анализа функциональных требований были выделены основные модули системы.

Модуль Авторизации. Обеспечивает сквозную авторизацию на ресурсе, с возможностью разграниченного доступа с определенными правами к различным разделам системы.

Модуль «База выпускников». Предоставляет администратору функционал для работы с базой данных: создание, редактирование, удаление анкет и факультетов, а также модерирование анкет пользователей. Авторизованные пользователи могут заполнить личную анкету выпускника. Содержит программные классы для работы с GPS координатами.

Для реализации прототипа решения был выбран PHP — фреймворк Laravel [2]. Схема работы ресурса представлена на рис 2.

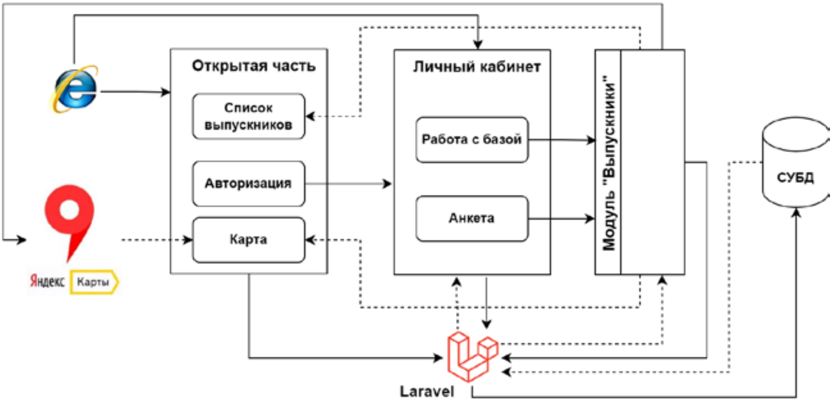


Рис. 2. Схема работы ресурса.

Посетители сайта получают доступ к ресурсу через веб-браузер. Неавторизованным посетителям доступна открытая часть, для доступа в личный кабинет необходимо пройти процедуру аутентификации. В качества модуля авторизации был использован стандартный модуль фреймворка. Модуль выпускники позволяет управлять базой данных выпускников, а также предоставляет функции для управления анкетами пользователей. Для работы с GPS координатами (определение координат по введённому почтовому адресу) и отображения карты используется API Яндекс.Карты [3].

Заключение

По результатам работы разработан прототип ресурса. Происходит первичное наполнение базы, на данный момент зарегистрировано более 250 выпускников. Ресурс работает в тестовом режиме и размещён в сети Интернет по адресу: https://vip.bsu.ru.

Литература

1. C. P. P., The entity-relationship model-towards a unified view of data, ACM Transactions on Database Systems, 1976.
2. Руководство по Laravel. URL: https://laravel.com/docs/9.x.
3. API Яндекс.Карт. URL: https://yandex.ru/dev/maps/?p=realty.

УДК 004.9

РАЗРАБОТКА ПРОТОТИПА ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ «ОТКРЫТАЯ ТЕОЛОГИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА»

© **Патласова Александра Алексеевна**
студентка Института математики и информатики
patlasovs28@gmail.com

© **Дерюгин Даниил Федорович**
старший преподаватель Института математики и информатики
dandwor@gmail.com

Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а

Аннотация. В век информатизации и стремительного развития сети Интернет книги или бумажные периодические издания, вытесняются электронными. Студенты университетов получили доступ к научным публикациям посредством внутренних электронно-библиотечных систем (далее — ЭБС), что значительно упростило поиск как обучающей литературы, так и научных статей.

По решению Совета Научно-образовательной теологической ассоциации (далее — НОТА) от 12 марта 2020 г. была поддержана инициатива ректора Бурятского государственного университета (далее — БГУ) Мошкина Н. И. о создании единой базы данных научных источников по теологии на базе Научной Библиотеки БГУ. Организация сбора научных источников имеет ряд организационных проблем, подлежащих автоматизации.

Таким образом, актуальной задачей является разработка информационной системы для автоматизации процесса сбора научных источников по теологии. В статье рассматривается прототип данной системы.

Ключевые слова: библиотека, информационная система, статьи, базы данных.

DEVELOPMENT OF THE INFORMATION SYSTEM «OPEN TEOLOGICAL LIBRARY»

Patlasova Alexandra A.
Student
Patlasovs28@ gmail .com

Deryugin Daniil F.
Senior Lecturer
dandwor@ gmail.com

Dorzhi Banzarov Buryat State University
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia

Abstract. In the age of informatization and rapid development of the Internet, the Internet books or paper periodicals are replaced by electronic. University students gained access to scientific publications through internal electron-bibliocent systems (hereinafter referred to as the EBS), this greatly simplified the search for literature when writing qualification works.

The central connecting link in the interaction between the EBS and students of the Buryat State University (hereinafter — BSU) is the BSU scientific library, one of the latest projects of which is the creation of an open theological library of the scientific and educational theological association (hereinafter referred to as the note).

By decision of the Council, the note of March 12, 2020 [1] The initiative of the rector of BSU Moshkin N. I. On the creation of a unified database of scientific sources on theology based on the BSU library was supported.

Thus, the urgent task is to develop an information system for automating the process of collecting scientific sources in theology.

Keywords: library, information system, articles, database.

Введение

На текущий момент в состав НОТА входит 67 образовательных учреждений и организаций [1], каждое из которых занимается научной и публикационной деятельностью. Решению Совета НОТА от 12 марта 2020 г. запустило процесс создания единой базы данных научных источников по теологии на базе Научной Библиотеки БГУ. Было принято решение хранить статьи в ЭБС Ирбис Научной Библиотеки с организацией единой системы для сбора и экспертизы статей.

1. Описание предметной области

Упрощенно процесс сбора Процесс сбора научных статей можно описать следующим образом: авторы отправляют статьи в оргкомитет, после чего оргкомитет либо принимает статью, либо отправляет ее на доработку. Коммуникация при этом зачастую происходит в различных мессенджерах и/или через электронную почту. В случае единой базы данных НОТА процесс в таком виде очень плохо масштабируется и требует большого количества людей, отвечающих за сбор и экспертизу статей.

Основная идея информационной системы для автоматизации процесса сбора трудов заключается в том, что все взаимодействие авторов и ВУЗов-участников НОТА с ответственными за сбор ведется в рамках одной системы, что позволит централизованно отслеживать статус тех или иных работ. Информационная система будет предоставлять возможность формирования заявки на публикацию научных трудов, проходящих впоследствии экспертизу. С помощью экспертизы будет осуществляться проверка отправленной статьи на соответствие тематики, требуемому оформлению, корректности ключевых слов и т. п.

2. Требования к системе

Были сформулированы требования к функционалу системы:

- Просмотр публикаций
- Публикация статей.
- Формирование заявки
- Изменение статуса заявки
- Удаление статей
- Работа со статьями
- Поиск по научным публикациям
- Назначение роли пользователям

Были выделены следующие роли в системе: гость, участник НОТА, модератор, администратор.

Соответствие функционала системы каждой из ролей представлено в таблице 1.

Таблица 1

Уровни доступа к функционалу ИС

№	Функционал	Гость	Участник	Модератор	Администратор
1	Просмотр публикаций	+	+	+	+
2	Формирование заявки	-	+	-	+
3	Изменение статуса заявки	-	-	+	+
4	Публикация статей	-	-	+	+
5	Удаление статей	-	-	+	+
6	Работа со статьями	-	-	+	+
7	Поиск по научным публикациям	+	+	+	+
8	Назначение роли пользователям	-	-	-	+

Гость. Пользователь, не аутентифицированный в системе, может производить поиск по всем научным трудам, имеющимся в библиотеке. Статьи для пользователя будут получены из базы данных, с помощью поиска по каталогу ИРБИС.

Участник НОТА. Может отправлять статьи на экспертизу. После того, как отправка была совершена, участник ожидает ответа от модератора, который в свою очередь проверяет содержимое отправленной статьи. В случае, если научный труд соответствует тематике, то модератор загружает эту статью в базу данных, и она будет отображаться на сайте. В противном случае, заявка участника будет отклонена.

Администратор же занимается управлением учетными записями пользователей.

3. Архитектура системы

На основе выдвинутых требований к системе были выделены следующие модули [2] (Табл.2)

Таблица 2.

Модули системы

Название	**Описание**
Модуль «Авторизация»	Позволяет пользователю авторизоваться в системе.
Модуль «Поиск»	Представляет собой форму, в которой каждый пользователь может внести нужную ему информацию, для поиска нужной ему статьи
Модуль «Новости»	Хранит все новости, имеющиеся в системе.
Модуль «Выставка»	Хранит различные выставки. Под выставкой понимается коллекция изображений, относящихся к одной и той же тематики.
Модуль API	Обеспечивает взаимодействие портала ЭБС БГУ на базе САБ ИРБИС.
Модуль «Обратная связь»	Обеспечивает связь между гостевым пользователем и модератором.
Модуль «Экспертиза»	Взаимодействие между модератором и пользователем, посетившим сайт. Пользователь может задать интересующий ему вопрос модератору, а также оставить жалобу или предложение.
Модуль «Работа с пользователями»	Модуль предназначен для работы с пользователями.

На рисунке 1 представлена архитектура системы.

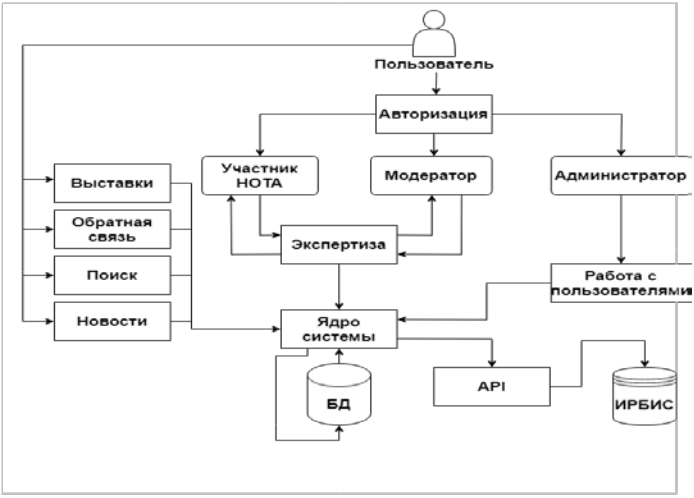


Рис. 1. Архитектура системы

4. Структура базы данных системы

В результате анализа предметной области были выделены основные сущности и спроектирована ER-модель, на основе которой была спроектирована структура базы данных системы (см.рис.2).

Структура состоит из 14 таблиц, из которых 2 таблицы пересечений. Из-за отсутствия антипаттернов структура базы данных является легко расширяемой, и тем самым удовлетворяет требованиям 3 нормальной формы [3].

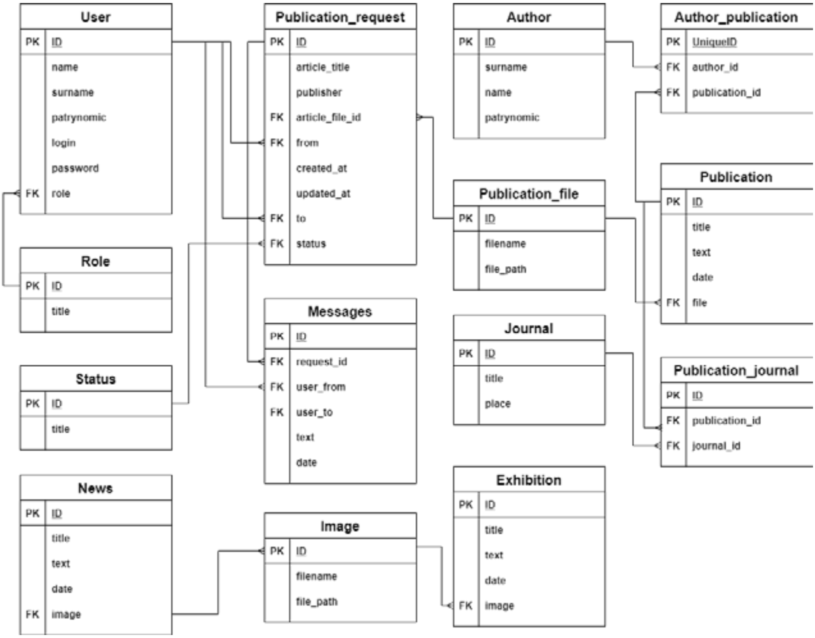


Рис. 2. Структура базы данных

Заключение

Информационная система «Открытая теологическая библиотека» повысит удобство сбора статей как для специалистов, так и для авторов. Данный прототип также может быть использован для сбора статей для сборников, журналов, проведения различных конференций. Функционал системы может быть расширен в сторону анализа содержимого представленных работ: автоматического выделения ключевых слов, проверка оформления, соответствие заявленной тематике.

Разработанный прототип системы тестируется и готовится к внедрению в Научной библиотеке БГУ.

Литература

1. Список вузов НОТА URL: http://nota-theology.ru/content/public/upload/files/spisok_vuzov_nota_6.12.30.pdf (дата обращения: 17.01.2021).

2. Ларман, Крэг. Применение UML 2.0 и шаблонов проектирования. 3-е издание: перевод с английского. Москва: Вильямс, 2019. 736 с.

3. Карвин Б. Программирование баз данных SQL: Типичные ошибки и их устранение. Москва: Рид Групп, 2012. 336 с.

УДК 004.04

ОБНАРУЖЕНИЕ И РАСПОЗНАВАНИЕ ОБЪЕКТОВ В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ (С ПРИМЕНЕНИЕМ ТЕХНОЛОГИИ OPENCV)

© **Степанов Тимур Ильич**
студент физико-технического факультета
stepanov@mail.ru

© **Тонхоноева Антонида Антоновна**
кандидат педагогических наук, доцент
ant_ton@mail.ru

Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а

Аннотация. В нашем мире все чаще и чаще встречаются такие явления научного и технологического прогресса как: Распознавание объектов, автомобильных номеров и даже лиц. Соответственно возникают закономерные вопросы, как это все реализовать и как заставить машину распознавать изображения. В качестве примера можно привести человеческий мозг, который способен распознать объект гораздо быстрее любой машины, когда у нас есть достаточно информации о представляемом объекте. Мы с уверенностью можем сказать тот это или иной предмет когда видим только его часть. Но возникают другой вопрос: «Как научить машины распознаванию?». В этой статье я разберу идентификацию и распознавание объектов с помощью технологии «компьютерного зрения».

Ключевые слова: Распознавание и идентификация объектов, распознавание лиц, технология компьютерного зрения, алгоритмы YOLO, библиотека OpenCV, сверхточные нейронные сети.

OBJECT DETECTION AND RECOGNITION IN THE MODERN WORLD (USING OPENCV TECHNOLOGY)

Stepanov Timur I.
student

Tonhonoeva Antonida A.
Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor

Dorzhi Banzarov Buryat State University
24a Smolina St., Ulan-Ude, 670000, Russia

Abstract. In our world, such phenomena of scientific and technological progress as Object recognition, car license plates and even faces are becoming more and more common. Accordingly, there are legitimate questions about how to implement all this and how to make the machine recognize images. As an example, we can cite the human brain, which is able to recognize an object much faster than any machine, when we have enough information about the represented object. We can say with confidence that this or that object when we see only a part of it. But another question arises: "How to teach cars recognition?". In this article, I will analyze the identification and recognition of objects using computer vision technology.

Keywords: Object recognition and identification, face recognition, computer vision technology, YOLO algorithms, OpenCV library, ultra-precise neural networks.

Первые эксперименты в области компьютерного зрения проходили в 1950-х годах, с помощью первых нейронных сетей, для обнаружения объектов, сортировки простых объектов на категории: Квадрат-круг. В 1979-х состоялось первое коммерческое использование технологии компьютерного зрения (Компьютерное зрение — сфера программирования, в которой осуществляется распознавание, классификация и обнаружение различных объектов или предметов. [6]) где был обработан распечатанный текст с использованием оптического распознавания. Эксперимент проводился для того, чтобы заменить написанный текст для слепых людей.

В 1990-х годах, интернет достиг высокого уровня развития, сделав доступным, возможность подвергнуть анализу множество изображений взятых из сети. Тогда же, программы распознавания лиц стали развиваться сильнее.

Цели исследования: Показать насколько может быть полезна технология распознавания.

Задачи:

– Представить технологию OpenCV.

– Представить алгоритмы YOLO.

– Показать возможное применение.

– Перспективы технологии в будущем.

На сегодняшний день, несколько факторов слились воедино для того, чтобы дать жизнь компьютерному зрению: Первое, развитие мобильных технологий со встроенными камерами, заполонили мир обилием всевозможных фото и видео материалов. Второе, мощность компьютеров также возросла. Третье устройств для самой технологии компьютерного распознавания и процесса анализа стал гораздо больше. Польза всех этих факторов, невероятна. Аккуратность и стабильность распознавания и классифицирования объектов возросла с 50 до 99 процентов, меньше чем за десять лет. Современные технологии гораздо быстрее и стабильны, в распознавании и ответной реакции на разного рода сигналы.

Компьютеры собирают изображения таким же образом, как пазл. К примеру у нас есть все кусочки, части пазла и нам просто нужно собрать их в одну цельную картину. Таким образом работают нейронные сети с компьютерным зрением. Они распознают множество разных частей изображения, идентифицируют кусочки и затем моделируют подкомпоненты. Используя фильтрацию через глубокую сеть слоев, все части собираются воедино. Компьютер не видит конечное изображение, но зато видит тысячи похожих изображений в целях обучения распознавания специальные объекты. Вместо того, чтобы обучать машину обнаруживать к примеру: Усы, уши и лапы, для обнаружения кота. Программист загрустит миллионы различных фото котов и затем модель сама научится распознавать отдельные характеристики котов для их обнаружения.

Компьютерное зрение работает в три основных этапа:

1. Получение начального изображения, даже тяжелые по размеру изображения, к примеру, взятые из видео в реальном времени или полученные с помощью 3D технологий, для полного анализа.

2. Непосредственно, обработка и анализ изображения. Модель глубокого обучения (Глубокое обучение — метод, из семейства машинного обучения, основанный на понимании данных и репрезентации, в отличие от алгоритмов конкретных задач) автоматизирует большинство из этих процессов, но модель чаще всего обучается с помощью первых полученных пронумерованных или преидентифицированных изображений.

3. Распознавание и понимание изображения, на этом этапе изображение проходит полную обработку и становится идентифицированным.

Сейчас ИИ (Искусственный интеллект — метод, средство, используемое в машинном обучении для понимания, у которой из используемых моделей большая производительность) системы развиваться все дальше и дальше и основываются чаще всего на понимании образа, изображения. Существует множество различных типов компьютерного зрения, использующихся в различных сферах: Сегментация картинки разбивает само изображение на фрагменты для изучения каждой области отдельно.

Обнаружение объекта идентифицирует конкретный объект на изображении. Advanced Object Detection распознает несколько объектов на одном изображении: игровое поле, игроки, мяч и так далее. Эти модели используют координаты X, Y для создания ограничивающей рамки и идентификации всего внутри нее. Распознавание лиц — это продвинутый тип обнаружения объектов, который не только распознает человеческое лицо на изображении, но и идентифицирует самого человека. Обнаружение краев — это метод, используемый для обнаружения края объекта или ландшафта, чтобы лучше определить, что находится на изображении. Распознавание образов — это процесс распознавания повторяющихся форм, цветов и другого на изображениях. Сопоставление признаков — это тип нахождения закономерностей, который сравнивает сходства на изображениях, чтобы помочь их классифицировать. Простые приложения компьютерного зрения используют только один из этих методов, но более сложные, такие как компьютерное зрение для автомобилей с автоуправлением, полагаются на другие методы.

OpenCV (Библиотека компьютерного зрения с открытым исходным кодом) — это библиотека программного обеспечения для компьютерного зрения и машинного обучения с открытым исходным кодом. OpenCV была создана, чтобы обеспечить общую инфраструктуру для приложений компьютерного зрения и ускорить использование машинного восприятия в коммерческих продуктах. Будучи продуктом с лицензией BSD, OpenCV позволяет предприятиям легко использовать и изменять код.

Библиотека содержит более 2500 оптимизированных алгоритмов, включая полный набор как классических, так и современных алгоритмов компьютерного зрения и машинного обучения. Эти алгоритмы можно использовать для обнаружения и распознавания лиц, идентификации объектов, классификации действий человека в видео, отслеживания движений камеры, отслеживания движущихся объектов, извлечения 3D-моделей объектов, создания 3D-облаков точек со стереокамер, объединения изображений для получения высокого разрешения. изображения всей сцены, находить похожие изображения из базы данных изображений, удалять эффект красных глаз на изображениях, сделанных с использованием вспышки, следить за движениями глаз, распознавать пейзажи и устанавливать маркеры для наложения на них дополненной реальности и т. д. OpenCV имеет более 47 тысяч пользователей и предполагаемое количество загрузок превышает 18 миллионов. Библиотека широко используется в компаниях, исследовательских группах и государственных органах.

С 2000 по 2008 год OpenCV разрабатывалась и поддерживалась в основном компанией Intel, а нижегородский филиал корпорации с самого начала играл ведущую роль в формировании имиджа библиотеки. В первые годы своего существования OpenCV быстро расширялся вширь, приобретая базовые функции, такие как базовые структуры данных, алгоритмы обработки изображений, базовые алгоритмы компьютерного зрения, ввод и вывод изображений и видео. Уже в то время были реализованы алгоритмы обнаружения человеческих лиц (каскадный классификатор), поиска соответствия оптического потока и другие. Однако в 2004 году Intel почти прекратил поддержку библиотеки. Многие участники проекта, к тому времени уже зарекомендовавшие себя как специалисты в области компьютерного зрения, не захотели переучиваться и покинули компанию.

Второй мощный толчок к развитию проект получил с появлением Willow Garage, основной целью которого является создание персонального робота. При поддержке Willow была сформирована команда, начавшая значительную доработку библиотеки. Именно в результате этих усилий OpenCV приобрел API C++ и Python, функции второго модуля, новую архитектуру, систему сборки на основе CMake, систему непрерывной интеграции на основе BuildBot, улучшенную документацию, отличные учебные пособия и множество других нововведений.

Можно говорить о третьем значимом этапе в жизни библиотеки, наступившем с появлением NVidia. В 2010 году эта компания поддержала создание CUDA-оптимизированной версии библиотеки. Первым публичным результатом стала реализация алгоритма стереосопоставления, способного обрабатывать видео в реальном времени в разрешении FullHD (1920x1080 пикселей). На сегодняшний день OpenCV_gpu — это полноценный модуль, нашедший применение во многих промышленных приложениях. Кроме того, OpenCV был дополнен Java API, встроенной системой тестирования производительности и рядом улучшений. [2]

Теперь нам нужно определить, что такое компьютерное зрение и зачем оно нам нужно.

Компьютерное зрение в основном имеет дело со всем, что люди могут видеть. Есть так много задач, которые мы, делаем подсознательно, едва ли думаем. Однако для компьютера научиться выполнять или даже пытаться имитировать такие вещи очень сложно, простой пример: представьте, что вы смотрите в окно, что мы можем увидеть? Мы можем сидеть в офисном здании и видеть движение снаружи, но мы никогда не задумываемся, как мы узнаем что-то или кого-то. Знаем ли мы, как мы можем посмотреть на кого-то и узнать, кто они? Мы подсознательно видим, что мы идентифицируем объекты в любом видимом нами изображении, затем мы пытаемся найти, какая связь существует между объектом, чтобы идентифицировать сцену или место, и только тогда мы получаем представление о том, что происходит на изображении.

Иногда мы также можем посмотреть на незавершенное изображение и использовать наши знания и предыдущий опыт, чтобы определить, чего в нем не хватает. Что касается КЗ (компьютерного зрения), мы можем выполнять различные задачи, такие как обнаружение объектов, классификация изображений и воспроизведение изображений.

Обнаружение объекта — это способность правильно обнаруживать объект или идентифицировать объект на любом заданном изображении, тогда у нас есть классификация изображений, которая в основном означает определение того, к какому классу принадлежит объект. Подписи к изображениям — это просмотр изображения и определение того, что происходит на изображении.

И последнее, но не менее важное: у нас есть воспроизведение изображения. При воспроизведении изображения у нас в основном есть возможность определить, чего не хватает в изображении, чтобы восстановить его, когда мы прошли через обнаружение объекта, и узнать, что мы можем с ним сделать. поскольку OpenCV — это огромная библиотека с открытым исходным кодом для машинного обучения, компьютерного зрения и обработки изображений, и теперь она играет важную роль в работе в режиме реального времени, что очень важно в современной системе. Используя OpenCV, мы можем предварительно обрабатывать видео для идентификации лиц людей или даже почерка человека, когда он уже загружен в базу с различными библиотеками.

Итак, продвигаясь вперед, давайте теперь посмотрим, как работают сверточные нейронные сети, так что же такое сверточная нейронная сеть СНС (Сверточные нейронные сети — наиболее распространенный тип сети, используемый в компьютерном зрении. Комбинируя множество сверточных слоев, она может узнавать все более сложные. Первые слои узнают о таких вещах, как горизонтальные, вертикальные и диагональные линии и блоки похожих цветов, средние слои узнают о комбинациях этих функций, таких как текстуры и углы, а последние слои учатся комбинировать эти функции для определения концепций более высокого уровня, например, «уши» и «часы».) Это алгоритм машинного обучения, который может принимать входное изображение, присваивать важность объекту, а затем иметь возможность различать один объект и другой СНС, и работает, находя признаки из изображений.

Любая СНС состоит из следующих вещей: входной слой, который представляет собой изображение в градациях серого, затем у нас есть выходной слой, который представляет собой двоичные или мультиклассовые метки, а затем у нас есть скрытые слои, которые содержат сверточный слой Relu, потом у нас есть объединяющие слои. Если у нас будет искусственная нейронная сеть, для выполнения классификации очень важно понимать её.

Дальше, алгоритм YOLO (YOLO — You Only Look Once, семейство однократных моделей обнаружения объектов, самообучающихся, обеспечивающих самые современные результаты обнаружения объектов по состоянию на осень 2020 г., [6]). Для чего у нас есть два разных семейства, для обнаружения объектов, мы видим, что есть большая разница между семейством YOLO и подходом, основанным на СНС. В СНС, он делает упор в основном на разделении изображения на части, а затем присваивает значения вероятности этим частям, и в зависимости от того, какая часть имеет наибольшую вероятность, мы считаем, что объект присутствует, тогда как структура YOLO фокусируется на всем изображении как на целый предмет и предсказывает ограничивающие рамки, а затем вычисляет вероятность класса для подчеркивания рамок. Семейство фреймворков YOLO очень быстрое по сравнению с СНС. Алгоритм YOLO развивался все эти годы, когда он впервые появился с YOLO v1. Эта модель также называется унифицированной YOLO, и причина этого в том, что она совмещает модель обнаружения и классификации объектов вместе как единое целое. Единая сеть обнаружения, это было первой попыткой создать сеть, которая может очень быстро обнаруживать объекты в реальном времени. YOLO предсказывает только ограниченное количество выделяющих рамок. Однако теперь у нас есть YOLO v2 и последняя версия — YOLO v3. Платформа YOLO v1 допускает несколько ошибок локализации, а YOLO v2 улучшает это, сконцентрировав внимание на ответе и локализации. YOLO v2 использует якорные блоки пакетной нормализации, классификаторы высокого разрешения, тонкие функции градиента и многоуровневую классификацию, а также использует нечто, называемое даркнетом. Все эти функции сделали YOLO v2 лучше, чем v1. Darknet — это предварительно обученная модель, и здесь YOLO v2 использовала darknet 19, что означает, что она содержала 19 слоев свертки, 5 слоев максимального пула и мягкий максимальный слой для классификации объектов. Последняя модель YOLO — YOLO v3, эта модель является самой быстрой и точной. Модель обнаружения объектов точно идентифицирует объект с помощью логистической классификации по сравнению с технологией, которая использовалась в YOLO v2. YOLO v3 идет с даркнетом 53, что означает наличие 53 сверточных слоев, в результате чего он может делать более точные прогнозы объекта. Теперь мы знаем, что такое обнаружение объектов, что такое алгоритм YOLO и как работать с OpenCV. [8]

Заключение. Таким образом, компьютерное зрение — это очень быстро развивающаяся область, уже изменяющая многие другие области, а также нашу повседневную жизнь. Точность анализа и распознавания образов растет с каждым днем, а может и быстрее, что позволяет создавать все более сложные приложения.

Сегодня существует несколько направлений дальнейшего развития направления компьютерного зрения:

1. Развитие промышленных систем компьютерного зрения. Оно используется для создания медицинских устройств, фармацевтических препаратов, продуктов питания, автомобилей и др. Позволяет обеспечить высокий уровень контроля качества.

2. Облачные системы глубокого обучения. ГО (Глубокое обучение — техника машинного обучения, которая учит компьютеры запоминать, то или иное (машины имитируют обучение, как человеческий разум, используя методы классификации) [6]. Алгоритмы нейронных сетей позволяют систематизировать и различать полу-

ченные изображения быстрее и точнее, соответственно, происходит и увеличение числа таких разработок.

3. Робототехника. Промышленные роботы используются все больше и больше, поэтому спрос на системы КЗ для роботов также будет расти.

4. Повышение требований к оптическим настройкам для КЗ. Сейчас наблюдается интерес к повышению четкости и разрешения считываемых ихображений. Для этого нужна более качественная оптика, поэтому разрабатываются и применяются различные прогрессивные решения, например, микролинзы на каждый пиксель.

Что касается OpenCV, то современный вид библиотеки — это результат долгой эволюции. Проект идет параллельно с быстро развивающейся областью компьютерного зрения. А в становление библиотеки в такой вид, который есть сейчас, участвовало сразу несколько компаний мирового уровня, поэтому и говорить о завершении ее разработки пока рано.

Литература

1. Компьютерное зрение: технологии, компании, тренды // GRFC. URL: https://rdc.grfc.ru/2021/04/analytics-computer-vision/
2. Библиотека OpenCV // OpenCV. URL: https://OpenCV.org
3. Основы компьютерного зрения и OpenCV // gitbook URL: https://copter-space.gitbook.io/uchebnik-mashinnoe-zrenie-tom-2/razdel-3/osnovy-kompyuternogo-zreniya-i-OpenCV
4. Горячкин Б. С., Китов М. А. Компьютерное зрение // Article // Cyberlininka. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/kompyuternoe-zrenie-1/viewer
5. Сборник распространенных терминов в области компьютерного зрения // Article // Roboflow. URL: https://blog.roboflow.com/glossary/
6. Сборник терминов в области искусственного интеллекта // Article // Appen. URL: https://appen.com/ai-glossary/
7. Компьютерное зрение в реальном времени с библиотекой OpenCV // ACM. URL: https://queue.acm.org/detail.cfm?id=2206309
8. YOLO: Объяснение примеров из реального времени // v7labs. URL: https://www.v7labs.com/blog/yolo-object-detection
9. Что такое компьютерное зрение и где его используют // RBC. URL: https://trends.rbc.ru/trends/industry/5f1f007e9a794756fafbfa83

СОДЕРЖАНИЕ

НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

Выонг Б. Геометрическая структура на конических многообразиях 3
Казьмин И. Д., Гунов П. В. Об одном методе оптимизации вырожденных билинейных управляемых систем 10
Козловская Т. А. Группа сингулярных крашеных кос на 4 нитях 19
Трунин Д. О. Процедура нелокального улучшения в билинейной задаче оптимального управления с терминальными ограничениями 27
Шаранхаев И. К. О бесповторных представлениях булевых функций 32

ВОПРОСЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Антонова Л. В., Бородина Л. А. Формирование приемов учебной деятельности учащихся по теме «Тригонометрические уравнения и неравенства» 38
Антонова Л. В., Бурзалова Т. В. О систематизации тригонометрических уравнений для повышения качества обучения учащихся 50
Антонова Л. В., Зимирева К. В. Роль нестандартных задач в развитии математических способностей 55
Лумбунова Н. Б., Миронова Е. П., Содбоева З. Б. Развитие цифровой культуры в процессе обучения математике 67
Мордовской А. К., Бутина А. В. Применение автоматизированных технологий для диагностики текущей успеваемости учащихся 74
Павлова Е. Б., Булгатова Е. Н., Елтошкина Е. В. Индивидуальный контроль знаний студентов 81
Павлова Е. Б., Лобсанова О. А., Ц. Батхуу. Исследовательская деятельность в некоторых геометрических задачах 87
Янтранова С. С., Заятуев Б. В. К проблеме подготовки будущего учителя математики 92
Янтранова С. С. О совершенствовании математической подготовки студентов естественнонаучного направления 98

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ

Бородин В. И., Лун-Фу А. В., Бубенчиков М. А., Бубенчиков А. М., Мамонтов Д. В., Ажеев А. А., Ажеев С. А. Способ определения движений неизменяемых молекулярных конструкций 103

Бубенчиков А. М., Челноков А. С. Динамика фуллерена C_{60} в углеродной нанокамере 114
Парфенова М. Д., Воробьева В. П., Зырянов А. М., Луцык В. И. Цифровизация фазовых диаграмм для дизайна бессвинцовых припоев 122
Ханхасаев В. Н., Баиров С. А. Численное решение по явной разностной схеме смешанного уравнения теплопроводности со вторыми краевыми условиями 132
Ханхасаев В. Н., Муняев С. И. Программная реализация неявной схемы смешанного уравнения теплопроводности с краевыми условиями третьего рода 137

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И СОВРЕМЕННЫЕ ТЕНДЕНЦИИ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Ботясова Н. С., Дерюгин Д. Ф., Цыбиков С. А. Прототип Discovery-сервиса для каталогов научной библиотеки университета 145
Мачнев И. А., Хабитуев Б. В., Семёнова Э. В. Информационный ресурс «Выпускники БГУ» 154
Патласова А. А., Дерюгин Д. Ф. Разработка прототипа информационной системы «Открытая теологическая библиотека» 160
Степанов Т. И., Тонхоноева А. А. Обнаружение и распознавание объектов в современном мире (с применением технологии opencv) 167

Научное издание

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ В УСЛОВИЯХ ЦИФРОВИЗАЦИИ

Материалы научной конференции с международным участием,
посвященной 90-летию БГПИ-БГУ

(г. Улан-Удэ — пос. Энхалук — оз. Байкал,
30 июня — 2 июля 2022 г.)

Компьютерная верстка
Н. Б. Лумбуновой

Свидетельство о государственной аккредитации
№ 2670 от 11 августа 2017 г.

Подписано в печать 15.10.2022. Формат 60×84 1/16.
Усл. печ. л. 10,34. Уч.-изд. л. 7,5 Тираж 150. Заказ 136
Цена свободная.

Издательство Бурятского госуниверситета
670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: riobsu@gmail.com